
Potenzieller Klausur- und Prüfungsstoff zur Theoretischen Physik V (Statistische Physik, Dozent: Thomas Filk)

1. Observable und Zustände

- (a) Klassische Observable als Funktionen auf dem Phasenraum; Quantenobservable als selbst-adjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum.
- (b) Zustände als Erwartungswertfunktionale der Observablen; Eigenschaften eines Erwartungswertfunktionals (Linearität, Positivität, Normierung); Klassische Zustände als Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Phasenraum; reine Zustände als δ -Funktion.
- (c) Quantenzustände als Dichtematrizen; Definition einer Dichtematrix, reine und gemischte Zustände.
- (d) Erwartungswerte, Mittelwert, Varianz, Standardabweichung, Kovarianz, Korrelationsfunktion.
- (e) Mehrteilchensysteme in klassischer Mechanik und Quantenmechanik. Verkürzung von Zuständen. Behandlung identischer Teilchen in QM.

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

- (a) Kolmogorov-Axiome für Wahrscheinlichkeiten (Normierung; Positivität; Additivität für disjunkte Ereignisse); Begriff der Zufallsvariablen (ZV), kumulative Verteilung zu einer ZV, Wahrscheinlichkeitsdichte zu einer ZV. Charakteristische Funktion(en) zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. einer Zufallsvariablen.
- (b) Diskrete Fälle (Gleichverteilung $\omega(i) = \text{const.}$, Binomialverteilung $\omega_N(i) = N!/(2^N i!(N-i)!)$, Poisson-Verteilung $\omega_\lambda(i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$, Gauß-Verteilung. Kovarianzen und Erwartungswerte bei Gauß-Verteilungen; Multivariate Gauß-Verteilung.
- (c) Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von Bayes
($P(a; \text{cond. } b) = P(b; \text{cond. } a)P(a)/P(b)$), Beziehung zu „Fließgleichgewichtsbedingung“: $P(a)P(a \rightarrow b) = P(b)P(b \rightarrow a)$.
- (d) Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz
- (e) Zeitmittel, Ensemble-Mittel, Ergodenhypothese (anschaulich: durch die Dynamik kann jeder Punkt im Konfigurationsraum beliebig genau erreicht werden).
- (f) Begriff der Legendre-Transformation.

3. Gesamtheiten

- (a) Mikrokanonische, kanonische, großkanonische Gesamtheit; harmonische Gesamtheiten; Art der Austauschbedingungen. Welche Parameter werden kontrolliert? Spektraldichte der Energie.
- (b) Zustandssummen zu den Gesamtheiten (klassisch und quantenmechanisch); Erwartungswerte als Ableitungen des Logarithmus von Zustandssummen. Anschauliche Begründung, weshalb die Näherung der Laplace-Transformation zwischen Gesamtheiten zu einer Legendre-Transformation der Potenziale wird.

- (c) Intensive und extensive Zustandsvariable (Temperatur, Druck, Dichte, chemisches Potenzial, Fugazität, ..., Entropie, innere Energie, Volumen, Teilchenzahlen, Magnetisierung, ...)
- (d) Klassischer Grenzfall (Ansatz, Idee, Ergebnis); klassisches Phasenraumvolumenmaß: $d\mu[x, p] = 1/(N!h^N)dx dp$. Anschauliche Interpretation der Beiträge $N!$ und h^N .
- (e) Anschauliche Begründungen für den Boltzmann-Faktor (Additivität der Entropie als Funktion extensiver Größen, Zustandsverteilung bei Ankopplung an ein Wärmebad; Maximale Entropie bei Festlegung des Energieerwartungswertes)
- (f) Thermodynamische Potenziale; Fundamentalformen; Wechsel zwischen thermodynamischen Potenzialen (Legendre-Transformation);
- (g) Maxwell-Relationen; Ableitung aus gegebenem thermodynamischen Potenzial, Erkennen einer Maxwell-Relation und Zuordnung der Gesamtheit.
- (h) Die wichtigsten thermodynamischen Potenziale bzw. Gibbs-Funktionen: Entropie, freie Energie, großkanonisches Potenzial, Enthalpie und freie Enthalpie.

4. Thermodynamik

- (a) Hauptsätze der Thermodynamik (einschließlich 0.tem Hauptsatz); insbesondere 1. Hauptsatz (E ist Zustandsgröße und erhalten - zugeh/örige Fundamentalform mit Wärmebeitrag) und 2. Hauptsatz (es gibt Zustandsgröße S , sodass $\delta Q = TdS$ und S nimmt in abgeschlossenen Systemen nie ab).
- (b) Folgerungen aus 2. Hauptsatz: T und S liegen (bis auf Skala) fest; thermodynamische Messvorschrift für S ;
- (c) Extremal- und Stabilitätsbedingungen allgemein formulieren und in konkreten Fällen - insbesondere aus Entropie, Energie und freier Energie - ableiten können. Konkret Temperatur- und Druckgleichheit bei entsprechendem Kontakt. Energieflussrichtung bei ungleicher Temperatur.
- (d) Begriffe: adiabatish, isentrop, reversibel(bei $\delta S = \delta S_e + \delta S_i$ ist adiabatish $\delta S = e$, isentrop $\delta S = 0$, reversibel $\delta S_i = 0$; isochor ($V = \text{const.}$), isotherm ($T = \text{const.}$), isobar ($p = \text{const.}$).
- (e) Allgemeine Kreisprozesse; Wärmekraftmaschine und Wärmepumpe; speziell Carnot-Prozess (Wechsel zwischen isotherm und adiabatish); Wirkungsgrad, optimaler Wirkungsgrad ($\eta = (1 - (T_1)/(T_2))$); Berechnung der geleisteten Arbeit ($A = -\sum_i \oint \sigma_i dX_i = \oint TdS$);
- (f) Zustandgleichungen: thermische ($p(V, N, T)$ und kalorische $E(V, N, T)$); Zustandgleichungen eines idealen Gases ($pV = NkT$ und $E = \frac{n}{2}NkT$ mit $n =$ thermodynamische Freiheitsgrade); Zustandgleichungen des van der Waals-Gases ($(p + \frac{a}{v^2})(v - v_0) = kT$).
- (g) Materialgrößen: Spezifische Wärme bei konstantem Volumen ($C_V = (\partial E/\partial T)_V$); die anderen Größen von der Bedeutung her wissen: isobarer Ausdehnungskoeffizient ($\alpha = 1/V(\partial V/\partial T)_p$), isotherme Kompressibilität ($\kappa = -1/V(\partial V/\partial p)_T$), spezifische Wärme bei konstantem Druck ($C_p = T(\partial S/\partial T)_p$).

- (h) Gleichgewichtsbedingung bei 2-Phasensystem (Gleichheit der chemischen Potentiale; Idee der Gleichung von Clausius und Clapeyron ($dp/dT = \frac{1}{T} \Delta q(T, p(T)) / \Delta v(T, p(T))$)).
- (i) Entropie: thermodynamischer, statistischer und informationstheoretischer Entropiebegriff; Shannon-Entropie ($S = -\sum \rho \ln \rho$); Entropie als Extremalverteilung unter gewissen Bedingungen; Anschauliche Bedeutung der Entropiezunahme; Beziehung zu Satz von Liouville (formale Entropieerhaltung unter Zeitentwicklung - Entropiezunahme als „Vergessen“ von Korrelationen, coarse-graining, Einschränkung der möglichen beobachtbaren Größen).

5. Allgemeine Beziehungen und Anwendungen

- (a) Klassisches ideales Gas: Herleitung der klassischen idealen Gasgleichungen in kanonischer Gesamtheit; de Broglie-Wellenlänge $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$, Begriff der Entartungstemperatur (bei der $v/\lambda^3 = 1$); Gültigkeit der klassischen Näherung.
- (b) Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung. Idee der Herleitung.
- (c) Barometrische Höhenformel: Idee der Herleitung.
- (d) Gleichverteilungssatz ($\langle x_j \partial H / \partial x_i \rangle = \delta_{ij} kT$): Idee der Herleitung (Integral über Ableitung verschwindet) und Aussage. Begriff des thermodynamischen Freiheitsgrads (quadratische Beiträge in H liefern $\frac{1}{2}kN$ zu spezifischer Wärme).
- (e) Spezifische Wärme in klassischen und Quantensystemen. Einfrieren von Freiheitsgraden in Quantenmechanik; spez. Wärme bei harmonischem Oszillator. Asymptotisches Verhalten (T gegen null und unendlich).
- (f) Klassische Systeme im Magnetfeld: van Leeuwen'sches Theorem (Idee der Herleitung), klassischer Paramagnetismus. Qualitatives Verhalten der Magnetisierung als Funktion der Temperatur. Curie'sches Gesetz (magnetische Suszeptibilität geht für große T gegen null).
- (g) Virialsatz $pV = \frac{2}{3} \langle E_{\text{kin}} - \frac{1}{3} \langle Q \frac{\partial U}{\partial Q} \rangle$ (Faktor 3 entspricht Dimension, Faktor 2 der Potenz von p in E_{kin}): Idee der Herleitung (klassisch und quantenmechanisch). Relation $E = 3/2 pV$ bzw. $E = 3pV$ für ideale Gase (abhängig von Energie-Impuls Beziehung).
- (h) Begriff der Paarverteilungsfunktion und 1-Teilchen-Verteilungsfunktion. Idee (mit Anleitung) der Bedeutung für thermische und kalorische Zustandsgleichung. Anschauliche Abhängigkeit bei gängigen Potenzialen.

Wechselwirkungsfreie Systeme

- (a) Bedingungen, unter denen diese Näherung sinnvoll (Systeme bei hohen Temperaturen; Fermi-Systeme bei tiefen Temperaturen; Quasiteilchen).
- (b) Besetzungszahldarstellung; Unabhängigkeit der Besetzungszahlen für verschiedene Energieniveaus; allgemeine Zustandssumme für Fermionen und Bosonen ($\ln Z_G = \pm \sum_i \ln(1 \pm z e^{-\beta \epsilon_i})$; mittlere Besetzungszahl ($n_i = 1/(z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} \pm 1)$). Allgemeine Formeln für $\ln Z_G$, N und E (mit Hilfestellung). Beziehung $\ln Z_G = pV/kT$.

- (c) Idee der Entwicklung nach Potenzen von z , Auflösung zu $z = z(N)$ und Einsetzen in andere Gleichungen. Bezug zur Virialentwicklung. Anschauliche Erklärung, weshalb Statistik Korrekturen zum Druck liefert (bei Fermionen erhöhter Druck bei Bosonen niedriger); Paramagnetismus bei hohen Temperaturen (Spin 1/2-System).
- (d) Ideales Fermi-Gas; Verteilungsfunktion für $T = 0$ und $T \approx 0$. Idee des Fermi-Drucks bei tiefen Temperaturen (Nullpunkts-Druck), Anschauliche Erklärung des Paramagnetismus bei Fermionen bei tiefen Temperaturen. Anschauliche Erklärung, weshalb es in QM Diamagnetismus geben kann (Energie nicht mehr unabhängig von Magnetfeld, da gebundene Zustände quantisiert sind).
- (e) Planck'sche Strahlungsformel; Qualitativer Verlauf, asymptotisches Verhalten für kleine und große Frequenzen (proportional zu ω^3 für kleine ω und exponentieller Abfall für große Frequenzen); Stefan-Boltzmann-Gesetz ($E/V = \sigma T^4$). Wien'sches Verschiebungsgesetz ($\hbar\omega_m = 2,82kT$)
- (f) Bosonen bei tiefen Temperaturen; Problem, dass Beitrag von $i > 0$ Zuständen zu N endlich (für $z = 1$) (bzw. $\int dp 1/(e^{\beta\epsilon(p)} - 1)$ ist endlich). Bei großer Teilchenzahl entsprechend makroskopisch viele Teilchen im Grundzustand. Isotherme ($p = const$ im Kondensationsgebiet), anschauliche Erklärung.
- (g) Quasiteilchen. Allgemeiner Begriff; Phononen als Quanten der Gitterschwingungen. Beziehung zwischen spezifischer Wärme und Spektralverteilung (Debye- und Einstein-Ansatz). Gesetz von Dulong-Petit; $D_V \propto T^3$ für kleine Temperaturen. Bestimmung des Spektrums von Kristallen (schematisch).
- (h) Innere Freiheitsgrade; Beiträge zu C_V von Vibrationen und Rotationen ($C_V/kN = \frac{3}{2}_{\text{frei}} + 1_R + 1_V$). Größenordnungen der Temperaturen, bei denen die Beiträge relevant werden. Begriff des Para- und Ortho-Wasserstoffs (Para: j gerade, Atomkernspin antisymmetrisch bei Fermionen und symmetrisch bei Bosonen; Ortho: j ungerade, Atomkernspins symmetrisch bei Fermionen, antisymmetrisch bei Bosonen).

6. Näherungsverfahren

- (a) Entwicklung nach Kopplungskonstante (klassisch); Begriff der asymptotischen Reihe;
- (b) Quantenmechanische Störungsrechnung (Idee)
- (c) Virialentwicklung; allgemeine Idee (nach v_0/v); zweiter Virialkoeffizient schematisch; Lennard-Jones-Potenzial; Beziehung zum van der Waals-Gas. Begriff des „Theta-Punkts“.
- (d) van der Waals-Gas: thermische und kalorische Zustandsgleichung $E = \frac{3}{2}NkT - a/v$; anschauliche Bedeutung der Korrekturterme; Maxwell-Konstruktion; Isotherme.

7. Gittermodelle

- (a) allgemeine Formulierung; periodische Randbedingung; nächste-Nachbar-Wechselwirkung

- (b) Transfermatrix-Formalismus: Transfermatrix des 1-dim. Ising-Modells; Idee der Transfermatrix; Bedeutung des größten Eigenwerts für freie Energie; Verhältnis von größtem zu zweitgrößtem Eigenwert für Korrelationsfunktionen. Satz von Frobenius und Perron - Bedeutung von Level-Crossing für Phasenübergang. Begründung, weshalb es in einer Dimension keinen Phasenübergang geben kann (bei endlich vielen Freiheitsgraden).
- (c) Ising-Modell; verschiedene physikalische Interpretationen; speziell 2-dim.; Begriff der Hoch- und Tieftemperaturentwicklung. Weiss'sche Theorie des Phasenübergangs. Molekularfeldnäherung. Qualitative Beschreibung der Phasen; Magnetisierung als Funktion der Temperatur (schematisch).

8. Theorie der Phasenübergänge

- (a) Ordnungsparameter; Ordnung eines Phasenübergangs; kritische Exponenten (zu spezifischer Wärme, Ordnungsparameter als Fkt. der Temperatur, Suszeptibilität als Fkt. der Temperatur; Ordnungsparameter als Funktion der konjugierten Variablen auf kritischer Isotherme), kritische Exponenten der Korrelationsfunktion; Bedeutung von langreichweitigem Verhalten.
- (b) Begriff der spontanen Symmetriebrechung; Landau-Theorie des Phasenübergangs.