

Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie

Thomas Filk

Skript zur Vorlesung

**Ausgewählte Kapitel der Theoretischen Physik für
Lehramtsstudierende**

Wintersemester 2013 & Wintersemester 2014

(Version vom 03.02.2015)

Vorwort

Im Wintersemester 2013/14 fand an der Universität Freiburg die Vorlesung „Ausgewählte Kapitel der Theoretischen Physik für Lehramtsstudierende“ zum ersten Mal statt. Damals waren die Schwerpunktthemen dieser Vorlesung die Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie sowie die Quantenfeldtheorie. Ein Jahr später, im Wintersemester 2014/15, wurde die Vorlesung erneut angeboten, allerdings wurde in diesem Fall die Quantenfeldtheorie einer etwas intensiveren Behandlung der Allgemeinen Relativitätstheorie geopfert. Es handelt sich bei dieser Vorlesung um eine so genannte Wahlpflichtvorlesung, die somit nicht zum festen Kanon des Lehramtsstudiums mit Physik im Haupt- oder Nebenfach gehört.

Die Idee zu dieser Vorlesung entstand aus vielen Diskussionen mit Physiklehrer/innen. Gerade die Relativitätstheorie gehört zu den faszinierenden Themenbereichen der theoretischen Physik. Schwarze Löcher sind kein Hirngespinnst von Science Fiction Autoren, sondern viele Beobachtungen deuten darauf hin, dass es unzählige Schwarze Löcher nicht nur in unserer Milchstraße gibt. Und im Zentrum unserer Milchstraße befindet sich vermutlich ein Schwarzes Loch mit einer Masse von rund 4 Millionen Sonnenmassen.

In diesem Zusammenhang ist es nur natürlich, dass interessierte Schüler und Schülerinnen einen Physiklehrer fragen, was denn ein Schwarzes Loch sei, was passiert, wenn man in ein Schwarzes Loch hineinfällt, ob man nicht doch irgendwie wieder herauskommen kann, etc. Ein Lehrer sollte auf solche Fragen fundierte Antworten geben können. Und auch wenn die Allgemeine Relativitätstheorie kein Unterrichtsstoff ist, eignet sie sich sehr gut als Thema für Arbeitsgemeinschaften oder Schülerprojekte.

Leider erfährt der durchschnittliche Physikstudent kaum etwas über Allgemeine Relativitätstheorie in den Standardvorlesungen. Gewöhnlich handelt es sich um eine Spezialvorlesung, deren Schwerpunkt – wie so oft an den Universitäten – die Vermittlung von mathematischen Techniken zur Lösung konkreter Probleme bildet. Vorlesungen sind im Allgemeinen forschungsorientiert und nicht unbedingt verständnisorientiert. Ein gutes Verständnis bildet sich zwar, wenn man in einem Bereich forscht, doch gerade der zukünftige Lehrer wird kaum jemals damit konfrontiert werden. Aus diesem Grund erschien mir eine eher konzept- und verständnisorientierte Vorlesung für Lehramtsstudierende angebracht.

Das bedeutet natürlich nicht, dass auf den mathematischen Formalismus verzichtet werden soll. Im Gegenteil: Die mathematischen Grundlagen zur Formulierung der Theorien sollen vergleichsweise ausführlich behandelt werden, da nur so ein wirklich tiefes Verständnis möglich wird. Verzichtet wird aber auf die mathematischen Techniken, die in erster Linie der Lösung von Gleichungen dienen, ohne dass wirklich ein erheblicher Gewinn an Verständnis damit verbunden ist.

Es wird gelegentlich auch der Versuch unternommen, Dinge „anschaulich“ zu erklären, was in vielen Fällen bedeutet, dass man aus dem Alltag bekannte Vergleichssituationen heranzieht, um bestimmte Aspekte der Theorie zu verdeutlichen. Ein solcher Vergleich wird niemals vollkommen korrekt sein. Man könnte hier das Bild der Differentialgeometrie auf eine abstrakte Ebene übertragen: Ebenso wenig wie man eine gekrümmte Fläche überall abstandsgetreu in einer euklidischen Ebene darstellen kann, kann man beispielsweise die Allgemeine Relativitätstheorie vollkommen korrekt durch ein mechanisches Bild repräsentieren. Man kann jedoch bestimmte Konzepte (kleine „Umgebungen“ im abstrakten Aufbau der Relativitätstheorie) durch anschauliche Bilder wiedergeben, muss sich dann aber darüber im Klaren sein, dass diese Bilder ungenauer werden, je weiter man sich von diesen speziellen Konzepten entfernt. In diesem Sinne ist die Anschauung oft nur in einer lokalen Umgebung adäquat, und für ein globales Verständnis muss man verschiedene Anschauungen verbinden, die jedoch an ihren Überlappungsstellen nicht immer exakt übereinstimmen, sondern eine „Übersetzung“ erfordern.

Während des Wintersemesters 2014/15 wird dieses Skript nochmals überarbeitet, bevor es dann auf der Webseite den Studierenden zugänglich gemacht wird.

Freiburg, Frühjahr 2015

Thomas Filk

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Inhaltsverzeichnis	4
1 Die spezielle Relativitätstheorie	9
1.1 Der Äther	10
1.2 Das Experiment von Michelson und Morley	12
1.3 Axiomatische Formulierung der speziellen Relativitätstheorie	15
1.4 Lorentz-Transformationen	17
1.5 Die Minkowski-Raumzeit	20
1.5.1 Die Geometrie des Minkowski-Raums	21
1.5.2 Darstellung des Minkowski-Raums	21
1.5.3 Die kausale Struktur	22
1.5.4 Inertialsysteme	24
1.6 Geometrische Konstruktionen	25
1.6.1 Der Raum gleichzeitiger Ereignisse	25
1.6.2 Die Einstein-Synchronisation	26
1.6.3 Die relativen Skalen	27
2 „Philosophisches“ Zwischenkapitel	31
2.1 Eine Kette gekoppelter Pendel	31
2.2 Von der Ätherhypothese zur Relativitätstheorie	36
2.3 Die Synchronisation von Uhren	39
2.3.1 Synchronisation durch Lichtsignale	39
2.3.2 Die Einstein-Synchronisation	40
2.3.3 Synchronisation mit der Ätherhypothese	41
2.3.4 Synchronisation durch langsamen Uhrentransport	44
3 SRT – Anwendungen	45
3.1 Zeitdilatation	45

3.2	Lorentz-Kontraktion	46
3.3	Doppler-Effekte	48
3.3.1	Der Doppler-Effekt in der klassischen Mechanik	48
3.3.2	Der longitudinale relativistische Doppler-Effekt	49
3.3.3	Der transversale Doppler-Effekt	50
3.4	„Einparken“	50
3.5	Das Zwillingssparadoxon	52
3.6	Die Eigenzeit	53
3.7	Der kanonische Formalismus	54
3.8	Die Äquivalenz von Masse und Energie	56
4	SRT – Beschleunigte Systeme	59
4.1	Die konstante Beschleunigung	59
4.1.1	Herleitung der Differentialgleichung für die Geschwindigkeit	60
4.1.2	Bestimmung der Bahnkurve	61
4.1.3	Erste Analyse der konstant beschleunigten Bewegung	62
4.2	Zwei konstant beschleunigte Systeme	65
4.3	Das Rindler-Universum	68
4.3.1	Kausale Beziehungen	68
4.3.2	Was „sehen“ die Beobachter voneinander?	70
5	Die ART – Philosophische Vorbemerkungen	75
5.1	Die Motivationen für die allgemeine Relativitätstheorie	75
5.1.1	Das Äquivalenzprinzip	76
5.1.2	Das Mach'sche Prinzip	77
5.1.3	Das Relativitätsprinzip	81
5.1.4	Raum und Zeit nehmen nicht an der Dynamik teil	82
5.2	Geometrisierung des Raumes	83
5.3	Ein einfaches Beispiel	88
6	Differentialgeometrische Grundlagen	91
6.1	Mannigfaltigkeiten	91
6.1.1	Karten und Atlanten	91
6.1.2	Der Tangentialraum	93
6.1.3	Eingebettete Mannigfaltigkeiten	94
6.2	Die Metrik	95
6.2.1	Induzierte Metrik bei Einbettungen	97
6.2.2	Projektionen und die Metrik von Landkarten	98
6.2.3	Koordinatensingularitäten	99

6.3	Der Levi-Civita-Zusammenhang	101
6.3.1	Die Christoffel-Symbole	101
6.3.2	Ein paar mathematische Zwischenbemerkungen	103
6.3.3	Ein Beispiel aus der klassischen Mechanik – konstant rotierende Bezugssysteme	104
6.3.4	Die Geodätengleichung	105
6.4	Krümmungstensoren	106
6.5	Die Einstein’schen Feldgleichungen	108
7	ART-Effekte für schwache Gravitation	111
7.1	Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld	111
7.2	Die Rotverschiebung von Licht	113
7.2.1	Uhren im Gravitationsfeld	113
7.2.2	Rotverschiebung	115
7.3	Periheldrehung des Merkur	116
7.4	Gravitationswellen	117
7.5	Die Newton’sche Näherung	119
7.6	Gravity B Probe	121
8	Schwarze Löcher und ART-Kosmologie	123
8.1	Isotrope, statische Lösungen	123
8.1.1	Standardform einer asymptotisch flachen isotropen und stati- schen Metrik	123
8.1.2	Robertson-Entwicklung	124
8.1.3	Der Ricci-Tensor als Funktion von $A(r)$ und $B(r)$	125
8.2	Schwarze Löcher – Schwarzschild-Metrik	126
8.2.1	Klassische Berechnung des kritischen Radius	126
8.2.2	Herleitung der Schwarzschild-Lösung	127
8.2.3	Die Schwarzschild-Lösung	128
8.3	Schwarze Löcher mit Ladung und Drehimpuls	135
8.3.1	Quantentheorie und Gravitation	136
8.3.2	Die Hawking-Bekenstein-Strahlung	139
8.4	Kosmologische Modelle	141
8.4.1	Das Olbers’sche Paradoxon	142
8.4.2	Expandierende Universen	143
8.4.3	Das de Sitter-Universum	145
	Literaturangaben	147

Kapitel 1

Die spezielle Relativitätstheorie

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts mehrten sich die Anzeichen, dass irgendetwas im Weltbild der Physiker nicht stimmen konnte. Die Newton'sche Mechanik war sehr erfolgreich bei der Beschreibung der Bewegungen von materiellen Körpern, andererseits war die Theorie Maxwell's ebenso erfolgreich bei der Beschreibung der Phänomene im Zusammenhang mit elektrischen und magnetischen Feldern. Doch die beiden Theorien passten nicht zusammen: Die Newton'sche Theorie ist fundamental Galilei-invariant, d.h. in jede zwei über eine Galilei-Transformation verbundenen Inertialsystemen gelten dieselben physikalischen Gesetze. Die Maxwell'sche Theorie enthält jedoch als Parameter eine Geschwindigkeit (die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) und scheint somit ein spezielles Ruhesystem auszuzeichnen. Dieses Ruhesystem dachte man sich gleichzeitig als Ruhesystem des Äthers, dessen oszillatorische Anregungen den elektromagnetischen Wellen entsprechen sollten, ähnlich wie die Schwingungen von Luft den Schallwellen entsprechen. Das Experiment von Michelson und Morley (siehe Abschnitt 1.2) war dazu gedacht, dieses Ruhesystem experimentell zu bestimmen.

Oftmals wird der Ausgang des Michelson-Morley-Experiments als Beweis dafür gewertet, dass es den Äther bzw. das ausgezeichnete Ruhesystem nicht gibt. Das ist streng genommen nicht richtig: Die mechanistischen Erklärungen von Lorentz und Fitzgerald (wonach sich Gegenstände bei einer Bewegung relativ zum Äther verkürzen und alle Zeitabläufe entsprechend verlangsamen) kann sämtliche Phänomene ebenso erklären wie die heute vorherrschende Einstein'sche Interpretation ohne ausgezeichnetes Ruhesystem. Man kann sogar sagen, dass jede Lorentz-invariante Theorie *per definitionem* auch die Interpretation von Lorentz-Fitzgerald zulässt. Physikalisch lässt sich zwischen diesen beiden Interpretationen nicht unterscheiden. (Näheres siehe Abschnitt 2.1) Die Einstein'sche Interpretation hat lediglich den Vorteil, auf unbeobachtbare Entitäten verzichten zu können.

Wenn auch heute die spezielle Relativitätstheorie in erster Linie mit dem Namen Albert Einsteins verbunden ist, sollte man nicht vergessen, dass insbesondere

Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) und Jules Henri Poincaré (1854–1912) wesentliche Vorarbeiten geliefert haben. Was die entscheidenden Schritte zur speziellen Relativitätstheorie betrifft, so werden heute meist drei Arbeiten zitiert (aus [24], S. 2 und [31], S. 408):

1. H.A. Lorentz; *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* ([18]). Eingereicht hatte er diese Arbeit am 27.5.1904.
2. J.H. Poincaré; *Sur la dynamique de l'électron* ([25]). Diese Arbeit wurde bei der Französischen Akademie der Wissenschaften am 5.6.1905 eingereicht.
3. A. Einstein; *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* ([7]). Diese Arbeit wurde am 30.6.1905 eingereicht.

Eine Diskussion, welchem Autor was zuzuschreiben ist, findet man bei Pauli [24] (S. 2/3).

1.1 Der Äther

Den Begriff des Äthers gab es in unterschiedlichen Bedeutungen schon im Altertum. Bei den Griechen bezeichnete er je nach Autor eine „leuchtende Substanz“, „Sitz der Götter“, „Urmaterie und Quintessence (fünftes Element neben den vier bekannten Elementen)“ etc. [Brockhaus]. Eine spezifischere Wiederbelebung erfuhr der Äther bei Descartes zur Erklärung der Planetenbahnen (allgemeiner zur Erklärung der Gravitation) und bei Huygens als Träger der Lichtwellen. Newton setzte sich in seiner Optik ([23], Frage 18ff, besonders Frage 22: „... Äther (denn so will ich ihn nennen) ...“) mit der Ätherhypothese auseinander.

Eine konkrete Definition von Äther bzw. der Ätherhypothese zu geben fällt schwer, da sich die Bedeutung des Wortes wie auch die ihm zugesprochenen Eigenschaften oft gewandelt haben. Meist verstand man aber unter Äther eine „schwerelose, durchsichtige, reibungslose, chemisch oder physikalisch nicht nachweisbare und alle Materie und den gesamten Raum durchdringende Substanz“ ([6]; Stichwort ‘Ether’). Manchmal schienen die oben genannten Eigenschaften jedoch auch im Widerspruch zu den Beobachtungen zu stehen. Um den großen Wert der Lichtgeschwindigkeit erklären zu können, musste man beispielsweise eine sehr hohe Dichte des Äthers annehmen. 1816 zeigten Augustin Jean Fresnel (1788–1827) und François Arago (1786–1853), dass senkrecht aufeinander polarisierte Strahlen nicht interferieren und 1817 erklärte Thomas Young (1773–1829) diese Erscheinung durch die Annahme transversaler Schwingungen.

Transversale Schwingungen setzen jedoch voraus, dass es in dem Trägermedium Scherkräfte gibt, die einer transversalen Auslenkung entgegenwirken. Damit schied aber ein Äther mit den Eigenschaften von Flüssigkeiten oder Gasen (in denen nur

longitudinale Wellen existieren) aus (vgl. Born [5], S. 3). Die fehlende longitudinale Polarisierung konnte sogar nur erklärt werden, wenn man dem Äther die Eigenschaften eines unendlich dichten Festkörpers zuschrieb. Andererseits sollten sich aber die Planeten nahezu reibungslos durch dieses Medium bewegen können.

Eine Theorie von George Gabriel Stokes (1819–1903) zur Erklärung dieser scheinbaren Widersprüche erscheint uns heute eher absurd: Er schrieb dem Äther die Eigenschaften bestimmter nicht-newtonscher Fluide zu, wie sie beispielsweise bei Pech, Siegellack oder nassem Sand beobachtet wurden. Von diesen Stoffen war bekannt, dass sie einerseits recht schneller Schwingungen fähig sind (also die hohe Lichtgeschwindigkeit und die fehlende longitudinale Polarisierung erklärbar wurde), andererseits aber auch gegenüber langsamen Beanspruchungen völlig nachgiebig sind (und dadurch die vergleichsweise langsame, nahezu reibungslose Planetenbewegung möglich war).

Im 19. Jahrhundert wurden viele Experimente unternommen, den Äther nachzuweisen. Als Beweis für die Existenz des Äthers wurde oft ein Experiment von Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819–1896) gewertet, der die Lichtgeschwindigkeit c' in einer bewegten Flüssigkeit gemessen und festgestellt hatte, dass sich die Geschwindigkeit von Licht in der ruhenden Flüssigkeit (d.h. c/n , wobei n der Brechungsindex der Flüssigkeit ist) und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit v nicht addieren, sondern v um einen vom Brechungsindex abhängigen Faktor verringert werden muss ([31]; S. 400):

$$c' = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v. \quad (1.1)$$

Dieses Ergebnis konnte unter der Annahme einer partiellen, von der optischen Dichte n abhängigen Mitführung des Äthers durch die Flüssigkeit erklärt werden ([31], S. 400). Erst das verallgemeinerte Additionstheorem für Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie konnte diese Erscheinung auch ohne Ätherhypothese erklären. Danach erhält man (vgl. Pauli [24], S. 114):

$$c' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{cv}{nc^2}} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{v}{nc}}. \quad (1.2)$$

In führender Ordnung von v/c stimmt dieses Ergebnis mit dem alten Resultat überein. In seiner bekannten „Geschichte der Physik“ schreibt Max von Laue ([17], S. 63) in diesem Zusammenhang:

Der Fizeausche Versuch galt lange als der schlagende Beweis für die Existenz eines Äthers, der alle Körper durchdringen sollte, ohne an ihrer Bewegung teilzunehmen. Denn nur so konnte man diesen verkleinerten Faktor verstehen. ... So ist die Geschichte des Fizeau-Versuchs ein lehrreiches Beispiel dafür, wie weit in die Deutung jedes Versuchs schon theoretische Elemente hineinspielen; man kann sie gar nicht ausschalten. Und wenn dann die Theorien wechseln, so wird aus einem schlagenden Beweise für die eine leicht ein ebenso starkes Argument für eine ganz entgegengesetzte.

Im 19. Jahrhundert war die Ätherhypothese auch Grundlage vieler Modelle von Raum, Zeit und Materie, die weit über die einfache Erklärung der Wellennatur von Licht hinausgingen. Ein interessantes Modell stammt beispielsweise von William Thomson (1824–1907), dem späteren Lord Kelvin of Largs. 1866 hatte er unter dem Eindruck der bahnbrechenden Arbeiten von Hermann von Helmholtz (1821–1894) zur Theorie der Vortizes in einem idealen Fluid (1858, [15]) – insbesondere ihrer erstaunlichen Stabilität, der Möglichkeit elastischer Stoßprozesse zwischen Vortizes und der Komplexität ihrer Strukturen – eine Theorie aufgestellt, wonach der Äther in unserem Kosmos nicht nur für die optischen, elektrischen und magnetischen Phänomene verantwortlich ist, sondern darüberhinaus auch die Atome – die Bausteine der Materie – als Verknotungen von Vortizes in diesem Äther beschreibt. Die einzelnen Atomarten entsprechen dabei topologisch verschiedenen Knotentypen. Sämtliche Naturgesetze sollten sich somit aus den statischen und dynamischen Eigenschaften des Äthers als einem idealen Fluid ableiten lassen. Dieses Modell würde sogar erklären, weshalb der Raum eines „nicht leeren“ Universums dreidimensional sein muss, denn nur in drei Dimensionen sind Knoten topologisch stabil. (Lit.: Encyclopaedia Britannica [6], Macropaedia, Stichwort ‘Helmholtz’, Bd. 20, S. 564-2b.)

1.2 Das Experiment von Michelson und Morley

Wenn der Äther tatsächlich existierte und wenn er, wie das Experiment von Fizeau andeutete, die Körper durchdringt, ohne unmittelbar an ihrer Bewegung teilzuhaben, dann sollte die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Äther – und damit relativ zum absoluten Raum – bestimmbar sein. Auf diese Möglichkeit hatte auch bereits Maxwell hingewiesen. Da die von Maxwell, Hertz und Lorentz entwickelte Theorie des Elektromagnetismus die Lichtgeschwindigkeit c als Konstante enthielt, galt es als sicher, dass die Maxwell’schen Gleichungen nur in dem Bezugssystem gelten, in dem Licht diese Geschwindigkeit hat, d.h. dem System, in dem der Äther als Träger der Lichtwellen ruht.

Das Schlüsselexperiment zum Nachweis des Äthers sollte das Experiment von Albert Abraham Michelson (1852–1931) und Edward Williams Morley (1838–1923) werden. Der entsprechende Versuch wurde 1881 von Michelson, dann 1887 nochmals von ihm gemeinsam mit Morley durchgeführt. Mit Hilfe eines Interferrometers (Abb. 1.1(a)) wurde die Laufzeit von Licht entlang zweier aufeinander senkrecht stehender Richtungen l_l und l_t verglichen. l_l bezeichnet dabei die Distanz in longitudinaler Richtung, d.h. der Richtung der vermuteten Erdbewegung relativ zum Äther, und l_t eine dazu senkrechte Distanz.

Relativ zum Äther hat Licht immer die Geschwindigkeit c . Für die longitudinale Richtung berechnen wir die Laufzeit am einfachsten im Laborsystem. Je nachdem, ob

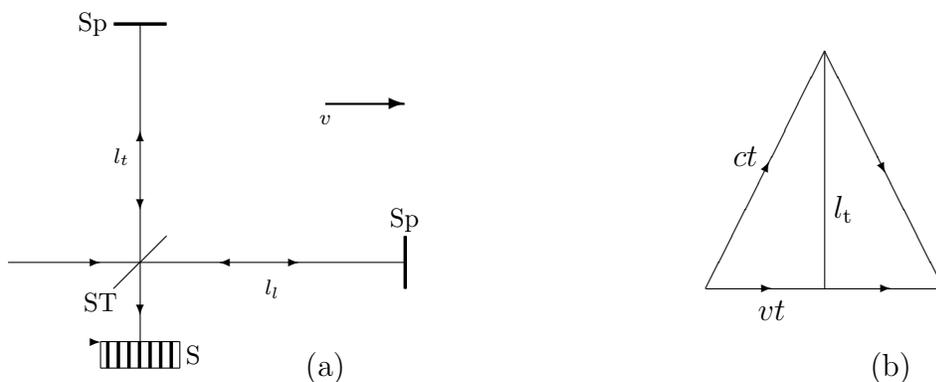


Abbildung 1.1: Das Michelson-Morley-Interferometer. (a) Ein Lichtstrahl trifft auf einen Strahlteiler (ST) und die beiden Anteile breiten sich in orthogonale Richtungen entlang der Strecken l_l und l_t aus. Sie werden an Spiegeln (Sp) reflektiert, treffen wieder auf den Strahlteiler und können auf dem Schirm (S) interferieren. (b) Der Strahl transversal zur Bewegungsrichtung relativ zum Äther legt die Strecke $2ct$ zurück, während sich die Apparatur um die Strecke $2vt$ weiterbewegt hat.

sich die experimentelle Anordnung in oder entgegen der Ausbreitungsrichtung des Lichts bewegt, hat das Licht im Laborsystem die Geschwindigkeit $c + v$ bzw. $c - v$. Die Summe der Zeiten zur Durchquerung der Strecke l_l in beide Richtungen ist somit

$$t_l = \frac{l_l}{c + v} + \frac{l_l}{c - v} = \frac{2l_l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.3)$$

Für die transversale Richtung berechnen wir die Laufzeit im Ruhesystem des Äthers (vgl. Abb. 1.1(b)). Das Labor bewegt sich in diesem System mit der Geschwindigkeit v und das Licht „schräg“ dazu mit der Geschwindigkeit c , sodass die Geschwindigkeitskomponente von Licht parallel zum Laborsystem ebenfalls gleich v ist. Wir berechnen zunächst die Zeit t , die das Licht bis zum Umkehrpunkt benötigt, also die Hälfte der Zeit t_t zum Durchlaufen der gesamten Strecke. Für die vom Licht und vom Bezugssystem (Erde) zurückgelegten Strecken, bis das Licht am Umkehrpunkt ist, gilt:

$$(vt)^2 + l_t^2 = (ct)^2$$

d.h.

$$t = \frac{l_t}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

und damit insgesamt

$$t_t = \frac{2l_t}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.4)$$

Durch Drehung der Apparatur um 90° konnten die Rollen von l_t und l_l vertauscht werden. Außerdem wurde das Experiment zu verschiedenen Jahreszeiten wiederholt, falls zu einem Zeitpunkt des Experiments die Erde zufällig relativ zum Äther ruhen sollte.

Wäre die Ätherhypothese richtig gewesen, hätte man im Rahmen einer Newton'schen Beschreibung eine Differenz zwischen der longitudinalen und der transversalen Richtung finden müssen. Das Experiment zeigte aber keine solche Differenz.

Zunächst war man derart von der Richtigkeit der Ätherhypothese überzeugt, dass man nach anderen Erklärungen für den negativen Ausgang des Michelson-Morley-Experiments suchte. Eine naheliegende Erklärung war, dass die Erde den Äther in ihrer Umgebung gleichsam mitschleppt, sodass an der Erdoberfläche die Geschwindigkeit des Äthers relativ zur Erde immer Null ist. Eine solche Erklärung widersprach aber nicht nur dem Fizeau'schen Experiment (wonach der Mitführungsterm ja von der optischen Dichte abhängen sollte und somit für Luft nahezu verschwindet), sondern auch der 1728 von James Bradley (1692–1762) entdeckten Aberration des Lichtes. Darunter versteht man den Effekt, dass ein Fernrohr relativ zur Richtung zu einem Stern etwas vor bzw. nachgestellt werden muss, je nach der senkrechten Geschwindigkeit der Erde relativ zu dieser Richtung ([31], S. 400). Der Effekt beruht darauf, dass das Licht wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit auch eine endliche Zeit benötigt, um das Fernrohr zu durchqueren. Die Aberration ließ sich am einfachsten durch die Annahme erklären, dass die Erde den Äther nicht mitführt.

Ein interessanter Vorschlag kam 1892 von Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) und gleichzeitig von George Francis Fitzgerald (1851–1901). Nach ihrer Hypothese sollte jeder Maßstab als Folge der Wechselwirkung mit dem Äther in Richtung der relativen Bewegung zum Äther eine sogenannte Lorentz-Fitzgerald-Kontraktion erfahren. Diese Kontraktion bzw. Verkürzung von Längenmaßstäben sollte gerade einem Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ (mit $\beta = v/c$) entsprechen. Wie ein Vergleich der Gleichungen 1.3 und 1.4 zeigt, werden die beiden Laufzeiten t_l und t_t gleich, wenn man l_l mit diesem Faktor multipliziert. Lorentz konnte in den folgenden Jahren seine Theorie soweit ausbauen, dass er nicht nur die bekannten Phänomene beschreiben sondern sogar die Transformationsgesetze formulieren konnte, die sich später aus der speziellen Relativitätstheorie ergeben sollten. Für eine widerspruchsfreie Theorie musste neben der Kontraktion von Längen auch noch angenommen werden, dass die Zeitskalen sämtlicher physikalischer Phänomene bei einer Bewegung relativ zum Äther um einen entsprechenden Faktor größer werden. Seine Überlegungen basierten jedoch immer noch auf der Annahme eines ausgezeichneten Bezugssystems, in welchem der Äther ruhte. Diese Annahme hat er auch nachdem die Relativitätstheorie ihre Triumpfe feierte nur langsam und zögerlich aufgegeben.

1.3 Axiomatische Formulierung der speziellen Relativitätstheorie

Wie schon aus den Titeln der drei in der Einleitung zu diesem Kapitel zitierten Arbeiten deutlich wird, nahm die Relativitätstheorie ihren Ausgang von der Elektrodynamik. Auch Lorentz hat sich die Frage gestellt, wie sich physikalische Systeme (z.B. solche, die wir als Uhren und Maßstäbe verwenden) verhalten, wenn ihre elementaren Bestandteile durch elektromagnetische Kräfte zusammengehalten werden. Auf diese Weise konnte er den Faktor für die Längenkontraktion aus den Maxwell'schen Gleichungen ableiten. In der Folgezeit wurde jedoch versucht, die Annahmen, die zur Herleitung der speziellen Relativitätstheorie führen, auf ein Minimum zu reduzieren. Man kann zeigen, dass die folgenden drei Axiome bereits die Struktur der speziellen Relativitätstheorie – und damit auch die Lorentz-Invarianz der fundamentalen Gleichungen – implizieren:

1. Der Raum ist homogen und isotrop.
2. Es gilt das Relativitätsprinzip.
3. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Axiom 1 wird zunächst als Erfahrungstatsache angesehen. Axiom 2 war für Einstein eine Konsequenz der fehlgeschlagenen Versuche, den Äther bzw. Bewegungen relativ zu dem ausgezeichneten Ruhesystem des Universums nachzuweisen. Wenn sich experimentell kein ausgezeichnetes Ruhesystem nachweisen lässt, dann sollte die Annahme eines absoluten Raumes oder einer absoluten Zeit auch aus der Theorie verschwinden.

Diese ersten beiden Axiome gelten auch für die Newton'sche Theorie. Es gibt also kein „Relativitätsprinzip der Relativitätstheorie“ oder relativistisches Relativitätsprinzip. Inertialsysteme sind solche Bezugssysteme, in denen die kräftefreie Bewegung geradlinig und gleichförmig verläuft. Das Relativitätsprinzip besagt, dass die Physik in allen Inertialsystemen gleich ist.

Axiom 3 ist das Minimum, auf das sich die Aussagen der Maxwell-Gleichungen reduzieren lassen, so dass zusammen mit den ersten beiden Axiomen die spezielle Relativitätstheorie eindeutig wird. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bedeutet, dass jeder inertielle Beobachter die Wellenfronten einer punktförmigen Lichtquelle als kozentrische (gleichzentrierte) Sphären beobachtet.

Streng genommen gelten die ersten beiden Axiome nur in einem lokalen Sinne: Die Mikrowellenhintergrundstrahlung bzw. die sichtbare Masse im Universum zeichnen

ein Ruhesystem aus. Auf diesen Punkt werden wir bei der Untersuchung kosmologischer Modelle noch eingehen. Solange wir aber nicht das Universum als Ganzes bzw. kosmologische Probleme betrachten, sind die ersten beiden Axiome hinreichend gut erfüllt.

Nicht alle Schritte zur Herleitung der Lorentz-Transformationen werden in voller mathematischer Strenge durchgeführt (siehe beispielsweise Pauli [24] oder unter anderem Sexl und Urbantke [30]). Die folgende Herleitung umgeht die meisten mathematischen Feinheiten.

1. Aus dem Relativitätsprinzip (Axiom 2) folgt insbesondere, dass geradlinige Bewegungen wieder in geradlinige Bewegungen übergehen müssen, also Geraden in der Raum-Zeit in Geraden transformiert werden. Diese Aussage bedeutet, dass der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen nur durch eine lineare Transformation gegeben sein kann:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda(\vec{v}) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix},$$

wobei $\Lambda(\vec{v})$ eine 4×4 Matrix ist, die von der relativen Geschwindigkeit \vec{v} zwischen den beiden Koordinatensystemen abhängen kann. An dieser Stelle haben wir außerdem angenommen, dass beide Koordinatensysteme denselben Ursprung haben, d.h., dass die Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$ für den Ursprung in beiden Systemen dasselbe Ereignis O beschreiben. Allgemeiner sind es die (bijektiven) affinen Transformationen, die sämtliche Geraden wieder in Geraden überführen.

Dieser Schritt ist übrigens mathematisch am schwierigsten zu beweisen.

2. Da die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem dieselbe sein soll (Axiom 3), folgt aus $|\vec{x}|/t = \pm c$ auch $|\vec{x}'|/t' = \pm c$, bzw.

$$(ct)^2 - (\vec{x})^2 = 0 \iff (ct')^2 - (\vec{x}')^2 = 0. \quad (1.5)$$

Hierbei stellen wir uns vor, dass bei dem Ereignis O (das für beide Koordinatensysteme dasselbe ist) ein Lichtsignal ausgesandt wurde. In Gl. 1.5 sollen sich (t, \vec{x}) bzw. (t', \vec{x}') auf ein Ereignis A beziehen, das von diesem Lichtsignal „getroffen“ wird.¹

Betrachten wir nun ein beliebiges Ereignis (nicht notwendigerweise auf dem Lichtkegel) mit den Koordinaten (t, \vec{x}) bzw. (t', \vec{x}') , so folgt zusammen mit der

¹Man beachte, dass es sich bei t, t' bzw. \vec{x} und \vec{x}' um *Differenzen* handelt, die sich auf zwei Ereignisse beziehen: das Ereignis A und das Referenzereignis O. Trotzdem werde ich die umständlichere Notation $\Delta t, \Delta \vec{x}$ etc. vermeiden.

Linearität der Transformation, dass sich die beiden Ausdrücke nur um einen Faktor unterscheiden können:

$$(ct)^2 - (\vec{x})^2 = \alpha \left((ct')^2 - (\vec{x}')^2 \right).$$

3. Der Faktor α kann noch von der Geschwindigkeit \vec{v} abhängen, mit der sich das eine System gegen das andere bewegt: $\alpha = \alpha(\vec{v})$. Wegen der Isotropie des Raumes (Axiom 1) sollte $\alpha(-\vec{v}) = \alpha(\vec{v})$ gelten, und aus der Tatsache, dass die zu \vec{v} inverse Transformation durch $-\vec{v}$ gegeben ist, folgt $\alpha(-\vec{v})\alpha(\vec{v}) = 1$, insgesamt also $\alpha(\vec{v}) = \pm 1$. Aus der Stetigkeit als Funktion von \vec{v} (sowie $\alpha(0) = 1$) können wir schließen: $\alpha(\vec{v}) = 1$ oder

$$(ct)^2 - (\vec{x})^2 = (ct')^2 - (\vec{x}')^2. \quad (1.6)$$

4. Gesucht sind also alle linearen Transformationen Λ , welche die Kombination $(ct)^2 - \vec{x}^2$ invariant lassen.

1.4 Lorentz-Transformationen

Wie allgemein üblich führen wir nun die 4-Koordinaten $x^0 = ct$ und x^i ein und bezeichnen mit x (ohne Vektorpfeil) einen 4-Vektor: $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Die Komponenten eines 4-Vektors bezeichnen wir mit griechischen Buchstaben (μ, ν , etc.) und sie nehmen die Werte 0, 1, 2, 3 an. Für die räumlichen Komponenten verwenden wir weiterhin lateinische Buchstaben.

Dass die Indizes für die Komponenten von Vektoren hochgestellt sind, ist eine Konvention. Wir bezeichnen damit die Koordinaten von Vektoren. Wie aus der Linearen Algebra bekannt, gibt es zu jedem Vektorraum auch einen Dualraum (der Raum der linearen Abbildungen von dem Vektorraum in den jeweiligen Zahlenkörper). Die Komponenten von Elementen des Dualraums kennzeichnen wir durch untenstehende Indizes. Außerdem verwenden wir im Folgenden noch die *Einstein'sche Summenkonvention*: Über doppelt auftretende Indizes, einmal oben und einmal unten, auf einer Seite einer Gleichung wird summiert. Diese Konvention macht viele Formeln wesentlich übersichtlicher.

Wir definieren nun ein symmetrisches, bilineares Produkt

$$(x, y) := \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \sum_{i,j=1}^3 x^i y^i. \quad (1.7)$$

Wir bezeichnen dieses Produkt manchmal als Skalarprodukt, obwohl es nicht positiv definit und damit in der üblichen mathematischen Sprechweise kein Skalarprodukt ist.

Oft nennen wir es auch Minkowski-Produkt. Dieses Produkt ist nicht-entartet, d.h., es gibt keine nicht-verschwindenden Vektoren y , sodass (x, y) für alle Vektoren x gleich null ist. Die Matrix

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

bezeichnen wir manchmal als Minkowski-Metrik. Auch dieser Ausdruck ist strenggenommen irreführend, da von einer Metrik üblicherweise verlangt wird, dass Abstände nie negativ werden können, was hier aber nicht der Fall ist. Daher spricht man manchmal auch von einer *Pseudo-Metrik*.

Durch die Bilinearform η können wir jedem Vektor $\{x^\mu\}$ einen dualen Vektor $\{x_\mu\}$ zuordnen:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu. \quad (1.9)$$

Beim dualen Vektoren kehren sich also alle Vorzeichen der räumlichen Komponenten um.

Die Lorentz-Transformationen Λ sind alle Transformationen, welche die Minkowski-Metrik invariant lassen. Das bedeutet

$$(x, y) = (\Lambda x, \Lambda y) \quad (1.10)$$

für alle 4-Vektoren x und y . Ausgedrückt in Komponenten bedeutet diese Bedingung

$$\Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

oder komponentenunabhängig

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (1.12)$$

Wir lösen diese Gleichungen für eine Raumdimension, also für 2×2 Matrizen. Die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

führt auf drei algebraische Gleichungen,

$$A^2 - C^2 = D^2 - B^2 = 1 \quad AB = CD, \quad (1.14)$$

die (bis auf Vorzeichen) eine einparametrische Schar an Lösungen zulassen. Eine mögliche Parametrisierung dieser Lösungen ist:

$$A = D = \cosh \phi \quad B = C = \sinh \phi. \quad (1.15)$$

Man bezeichnet ϕ auch manchmal als Rapidität.

Wir können aber auch eine anschaulichere Parametrisierung wählen, die sich aus folgender Überlegung ergibt: Die Weltlinie des räumlichen Ursprungs des (t', x') -Systems, also die Gerade zu $x' = 0$, soll sich für den anderen Beobachter als die Gerade $x = vt$ darstellen. Damit erhält die Geschwindigkeit v erst ihre Bedeutung. Das bedeutet aber, dass

$$x' = \gamma(v)(x - vt) = \gamma(v) \left(x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right) \quad (1.16)$$

sein muss, mit einem beliebigen (v -abhängigen) Faktor $\gamma(v)$. Durch Vergleich mit den obigen Transformationen folgt $A = D = \gamma$ und $B = C = -\gamma \frac{v}{c}$, und aus $A^2 - C^2 = 1$ ergibt sich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.17)$$

Damit erhalten wir für die Lorentz-Transformationen in einer Raumdimension:

$$\Lambda(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Für die weiteren Überlegungen wird meist diese Form der Lorentz-Transformation ausreichen. Man bezeichnet sie auch als „Boost“. Die Matrixdarstellung eines allgemeinen Boosts (für eine beliebige dreidimensionale Geschwindigkeit \vec{v}) erhält man am einfachsten, indem man die Raumkoordinaten in zur Geschwindigkeit \vec{v} parallele und senkrechte Komponenten aufspaltet und berücksichtigt, dass sich die senkrechten Komponenten nicht ändern (vgl. z.B. die englische Wikipedia-Seite „Lorentz transformation“):

$$\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & \mathbb{I} + (\gamma - 1) \vec{\beta} \vec{\beta}^T / \beta^2 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

wobei $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ ist, $\vec{\beta}^T$ der zugehörige transponierte (Zeilen)-Vektor und $\vec{\beta} \vec{\beta}^T$ die 3×3 Matrix mit den Komponenten $\beta_i \beta_j$. \mathbb{I} ist die 3×3 Identitätsmatrix und $\beta^2 = v^2/c^2$.

Diese Matrizen bilden noch keine Gruppe. Die gewöhnlichen dreidimensionalen Drehungen $R \in \text{SO}(3)$ lassen die Minkowski-Metrik ebenfalls invariant. Erst die Boosts zusammen mit den Drehungen bilden eine (sechsparemetrige) Gruppe, die Lorentz-Gruppe $\text{SO}(1,3)$.² Man kann die Gruppe noch um räumliche Spiegelungen (Paritätstransformationen) und die zeitliche Umkehr $t \rightarrow -t$ erweitern. Da der Minkowski-Raum ein affiner Raum ohne ausgezeichneten Raum-Zeit-Ursprung ist, erhält man

²Zur Notation: Die Gruppe $\text{SO}(n, m)$ ist die Gruppe aller reellen linearen Transformationen mit Determinante 1, welche die $(n + m) \times (n + m)$ Matrix $\eta = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ invariant lassen, wobei die ersten n Einträge $+1$ und die letzten m Einträge -1 sind. Für die üblichen speziellen orthogonalen Gruppen ist $m = 0$ und man schreibt einfach $\text{SO}(n)$.

insgesamt als Invarianzgruppe der Speziellen Relativitätstheorie die Poincaré-Gruppe, bestehend aus den Transformationen $\tilde{\Lambda} + \vec{a}$ wobei $\tilde{\Lambda}$ eine Lorentz-Transformation (eventuell plus Paritätstransformation oder Zeitumkehr) ist und \vec{a} ein beliebiger 4-dimensionaler Translationsvektor.

Abschließend soll noch das Geschwindigkeitadditionstheorem in seiner einfachsten Form (parallele Geschwindigkeiten) abgeleitet werden. Dazu betrachten wir einfach das Produkt zweier Lorentz-Boosts, für die gelten soll:

$$\gamma(v_1) \begin{pmatrix} 1 & -v_1/c \\ -v_1/c & 1 \end{pmatrix} \gamma(v_2) \begin{pmatrix} 1 & -v_2/c \\ -v_2/c & 1 \end{pmatrix} = \gamma(v_{\text{ges}}) \begin{pmatrix} 1 & -v_{\text{ges}}/c \\ -v_{\text{ges}}/c & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Durch direktes Nachrechnen (am einfachsten bildet man das Produkt auf der linken Seite und erhält $-v_{\text{ges}}/c$ aus dem Verhältnis eines Nebendiagonalelements mit einem Diagonalelement) findet man:

$$v_{\text{ges}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (1.21)$$

Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten $v_i \ll c$ erhält man das klassische Ergebnis der Newton'schen Mechanik – die Gesamtgeschwindigkeit ist die Summe der Einzelgeschwindigkeiten. v_{ges} kann jedoch nie größer als c werden und setzt man z.B. $v_1 = c$ so erhält man auch $v_{\text{ges}} = c$. Gleichung 1.21 hatten wir schon bei der Herleitung des Fresnel'schen Mitführungsfaktors in Gl. 1.2 verwendet.

1.5 Die Minkowski-Raumzeit

1908 hatte Hermann Minkowski (1864–1909) die 4-dimensionale Raumzeit eingeführt und damit den Formalismus der speziellen Relativitätstheorie wesentlich vereinfacht. Berühmt geworden sind die Anfangsworte zu einem seiner Vorträge, gehalten auf der „80. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Cöln“ am 21. September 1908 (aus [1], S. 123):

Meine Herren! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

Doch worin bestand das eigentlich Neue?

1.5.1 Die Geometrie des Minkowski-Raums

Die Besonderheit der 4-dimensionalen Minkowski-Raumzeit ergibt sich nicht einfach aus der Zusammenfassung des 3-dimensionalen gewöhnlichen Raums mit einer 1-dimensionalen Zeitkoordinate. Dies ist auch in der gewöhnlichen Newton'schen Mechanik möglich. Die Besonderheit ergibt sich aus den Invarianzen dieses Raumes bzw. der Art von Geometrie, welche durch die Minkowski-Metrik auf ihm definiert wird.

Abgesehen von räumlichen und zeitlichen Translationen ist der Newton'sche Raum invariant unter Galilei-Transformationen: dreidimensionale Rotationen sowie die speziellen Galilei-Transformationen

$$t \longrightarrow t' = t \quad \text{und} \quad \vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t. \quad (1.22)$$

Dass beide Koordinatensysteme über eine affine Transformation zusammenhängen, folgt wiederum aus dem Relativitätsprinzip, das auch in der Newton'schen Mechanik gilt (Geraden in einem Inertialsystem sind Geraden in allen Inertialsystemen). Während die ersten beiden Axiome in unveränderter Form auch in der Newton'schen Mechanik gelten, kann man dort das 3. Axiom ersetzen durch: Zwei Ereignisse haben in allen Inertialsystemen denselben zeitlichen Abstand (daraus folgt $\Delta t = \Delta t'$) und zwei gleichzeitige Ereignisse haben in allen Inertialsystemen denselben räumlichen Abstand (daraus folgt $\Delta \vec{x}^2 = (\Delta \vec{x}')^2$). Damit liegen die Galilei-Transformationen als Invarianzgruppe fest.

Demgegenüber ist die Geometrie des Minkowski-Raums durch die Invarianz von $(ct)^2 - \vec{x}^2$ bestimmt. Genauer bedeutet dies Folgendes: Zwei Ereignisse A und B werden von zwei Inertialsystemen durch die Koordinaten (t_A, \vec{x}_A) bzw. (t_B, \vec{x}_B) sowie (t'_A, \vec{x}'_A) und (t'_B, \vec{x}'_B) beschrieben. Dann gilt

$$c^2(t_A - t_B)^2 - (\vec{x}_A - \vec{x}_B)^2 = c^2(t'_A - t'_B)^2 - (\vec{x}'_A - \vec{x}'_B)^2. \quad (1.23)$$

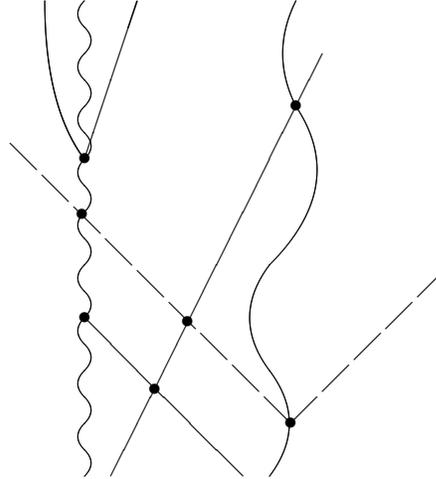
Durch diese Invariante wird zwei Ereignissen ein „Abstand“ zugeschrieben, der nicht vom Koordinatensystem abhängt. Diesen Abstand werden wir später nutzen, um Linien (insbesondere Weltlinien) eine „Länge“ zuzuschreiben und Geometrie zu betreiben. Diese Minkowski-Geometrie ist zunächst etwas ungewohnt, sodass ich einige Aspekte betonen möchte.

1.5.2 Darstellung des Minkowski-Raums

Im Folgenden werden wir sehr oft Gebrauch von geometrischen Konstruktionen machen. Wir stellen dabei die Raumzeit meist vereinfacht durch eine Ebene dar, die einer Raum- und einer Zeitdimension entspricht. Die Punkte dieser Ebene repräsentieren Ereignisse und damit physikalische Tatsachen, die nicht von irgendeinem Koordinatensystem oder einer anderen Wahl der Beschreibung abhängen (vgl. Abb. 1.2). Ob

sich zwei Personen am selben Ort treffen, oder der Zeiger einer bestimmten Uhr auf die 12 springt, oder eine Lampe an- und wieder ausgeknippt wird, oder eine Rakete dicht an einem bestimmten Satelliten vorbeifliegt – das sind Tatsachen, die für alle Beobachter gleichermaßen existent sind.

Abbildung 1.2: Die Raumzeit ist die Menge aller Ereignisse. Klassische Weltlinien sind kontinuierliche Folgen von Ereignissen (nicht zu verwechseln mit den „Weltlinien“ in Feynman-Graphen, hierbei handelt es sich um Repräsentationen von Propagatoren bzw. Green'schen Funktionen, nicht um reale, „faktische“ Weltlinien).



Sehr oft handelt es sich bei Ereignissen um den Schnittpunkt von Weltlinien, wobei Weltlinien von Objekten bestimmte kontinuierliche Folgen von Ereignissen und somit ebenfalls unabhängig von einem Koordinatensystem sind. Auch wenn der Zeiger einer Uhr auf 12 zeigt, schneiden sich im Prinzip zwei Weltlinien: die Weltlinie der Zeigerspitze und die Weltlinie der Markierung für die 12. Die Weltlinien von Objekten, auf die keine Kräfte wirken, werden in Minkowski-Diagrammen durch Geraden dargestellt. Insbesondere verläuft der räumliche Ursprung eines Inertialsystems entlang einer geraden Weltlinie. (Dies wird bei allgemeinen Raumzeit-Diagrammen und in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht immer der Fall sein.)

1.5.3 Die kausale Struktur

Zu jedem Ereignis können wir den Zukunfts- und den Vergangenheitslichtkegel angeben. Der Zukunftslichtkegel besteht aus allen Ereignissen, die von einem Lichtblitz, der bei dem betreffenden Ereignis ausgesandt wird, überstrichen wird. Dabei stellen wir uns vor, dass sich das Licht von diesem Ereignis aus kugelförmig in alle Richtungen ausbreitet. Die Zeitdauer des Lichtblitzes sei vernachlässigbar kurz. Der Vergangenheitslichtkegel besteht aus allen Lichtstrahlen, die das betreffende Ereignis treffen.

Für alle Ereignisse auf dem Lichtkegel gilt (in jedem Inertialsystem) $(ct)^2 - \vec{x}^2 = 0$ (wobei wir das Ereignis O als Ursprung $(0, 0)$ des Koordinatensystems gewählt haben, ansonsten sind t und \vec{x} entsprechend durch Δt und $\Delta \vec{x}$ zu ersetzen). Zwei Ereignisse, die direkt durch einen Lichtstrahl verbunden werden können, also auf dem Lichtkegel

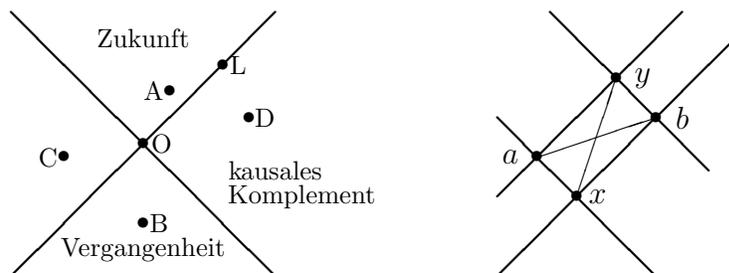


Abbildung 1.3: (links) Der Zukunfts- und Vergangenheitslichtkegel zu einem Ereignis O und sein kausales Komplement. (rechts) Ein „Diamant“ zu zwei Ereignissen x und y besteht aus allen Ereignissen, die sowohl in der Zukunft von x als auch in der Vergangenheit von y liegen. Er definiert zwei raumartige Ereignisse a und b , die „gerade eben noch“ im Diamanten liegen. Bis auf ein Vorzeichen ist der Abstand \overline{xy} gleich dem Abstand \overline{ab} (für $c = 1$); damit lassen sich Raummessungen auf Zeitmessungen reduzieren.

des jeweils anderen Ereignisses liegen, bezeichnet man als *lichtartig*. In Abb. 1.3 sind O und L lichtartig.

Für Ereignisse innerhalb des Zukunfts- oder Vergangenheitslichtkegels gilt $(ct)^2 - \vec{x}^2 > 0$. Solche Ereignispaare bezeichnet man als *zeitartig*. Die Ereignisse A und B sind zeitartig zu O . Ereignisse außerhalb des Lichtkegels (z.B. die Ereignisse C und D) bezeichnet man als relativ zu O *raumartig*. Für solche Ereignisse gilt $(ct)^2 - \vec{x}^2 < 0$.

Für zeit- und lichtartige Ereignispaare kann man eindeutig angeben, welches der beiden Ereignisse in der Zukunft relativ zu dem anderen Ereignis liegt. (Ist $c|t| \geq |\vec{x}|$ und $t > 0$, so gibt es keine Lorentz-Transformation, für die t' negativ wird.) Diese Relation – „ A liegt in der Zukunft von B “, geschrieben als $A > B$ – ist antisymmetrisch (wenn $A > B$, gilt nicht $B > A$). Außerdem ist diese Relation transitiv: Aus $A > B$ und $B > C$ folgt $A > C$. Bei dieser Relation handelt es sich also um eine Teilordnung.

Für raumartige Ereignisse ist eine allgemein gültige zeitliche Ordnung nicht möglich. Man kann immer Bezugssysteme finden, in denen $\Delta t > 0$ und $\Delta t' < 0$ ist, d.h., während in dem einen System C scheinbar später als O liegt, findet es in dem anderen System früher statt. Solche Ereignisse können sich gegenseitig nicht kausal beeinflussen.

Die beiden Lichtkegel (meist spricht man einfach von *dem* Lichtkegel) zu einem Ereignis O unterteilen also die Menge aller Ereignisse in drei Klassen: (1) die Menge der zukünftigen Ereignisse, *die von* O theoretisch kausal beeinflusst werden können, (2) die Menge der Ereignisse in der Vergangenheit, *von denen* O theoretisch kausal

beeinflusst werden kann, (3) sowie die raumartigen Ereignisse, die in *keinem* kausalen Zusammenhang zu O stehen. Die für die Newton'sche Raumzeit noch sinnvolle Relation „gleichzeitig“ gibt es in der Relativitätstheorie nicht mehr in einem absoluten Sinne.

1.5.4 Inertialsysteme

In einem Inertialsystem werden alle kräftefreien Bewegungen (im Sinne der speziellen Relativitätstheorie – wir werden in der allgemeinen Relativitätstheorie auch die Geodäten in gekrümmten Raumzeiten als kräftefreie Bahnkurven ansehen) durch Geraden dargestellt. Damit bewegt sich auch der räumliche Ursprung eines Inertialsystems entlang einer Geraden. Die Koordinate entlang dieser Geraden bezeichnen wir als Zeitkoordinate. Sie wird realisiert durch die Weltline einer idealen Uhr (näherungsweise z.B. durch eine Cs-Uhr), die sich im Ursprung des Systems befindet.

Wenn wir einem Ereignis A in einem solchen Inertialsystem die Koordinaten (t, \vec{x}) zuordnen, ist damit operational Folgendes gemeint: Wir denken uns den gesamten Raum des Inertialsystems mit Uhren ausgepflastert, die alle synchronisiert sind. (Auf die Problematik der Synchronisation von Uhren werden wir in Abschnitt 2.3 näher eingehen, in einer speziellen Form schon im nächsten Abschnitt. An dieser Stelle soll genügen, dass eine solche globale Synchronisation möglich ist und dass sie beispielsweise durch den langsamen Transport von Uhren – alle Uhren wurden in der fernen Vergangenheit im Ursprung auf dieselbe Zeit eingestellt und dann langsam an ihren Platz gebracht – realisiert werden kann.³) Außerdem können wir die räumliche Lage von jeder Uhr in diesem System durch einen Vektor \vec{x} kennzeichnen, dessen Komponenten wir durch Anlegen eines geeichten Längenmaßstabes bestimmen können.⁴ Alle Uhren bewegen sich im Raumzeit-Diagramm auf parallelen Weltlinien und halten untereinander ihren Abstand. Die \vec{x} -Koordinate eines Ereignisses A ist dann gleich der räumlichen Koordinate der Uhr, bei der das Ereignis A stattfindet. Die t -Koordinate des Ereignisses A ist gleich der Zeitanzeige dieser Uhr.

Zwei Ereignisse ereignen sich *in diesem Inertialsystem* gleichzeitig, wenn die Uhren an den jeweiligen Punkten, an denen die Ereignisse stattfinden, dieselbe Zeit anzeigen. Für ein gegebenes Inertialsystem ist es also sinnvoll, von der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse zu sprechen. Allerdings muss betont werden, dass die physikalische Realisation dieser Gleichzeitigkeit nur durch die Synchronisation von Uhren möglich ist, die sich bei den jeweiligen Ereignissen befinden, und eine solche globale Synchronisation ist nur in einem Inertialsystem realisierbar. Insbesondere wird der

³Später werden wir zeigen, dass die so genannte Einstein-Synchronisation, bei der Uhren durch Austausch von Lichtsignalen synchronisiert werden, zu dieser Vorschrift identisch ist.

⁴Auch hier ist der Austausch von Lichtsignalen und die Messung des räumlichen Abstands durch die Messung der Zeit für Hin- plus Rückweg ein praktikableres Verfahren. Das Anlegen eines Längenmaßstabes ist äquivalent und dient hier nur der Veranschaulichung.

Gleichzeitigkeitsbegriff problematisch für allgemeine Bezugssysteme (die keine Inertialsysteme sind, also beispielsweise beschleunigt werden) oder auch in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Abschließend noch eine Anmerkung zur Sprechweise. Sehr oft liest man, dass ein Beobachter ein Ereignis A zu einem bestimmten Zeitpunkt t an einem bestimmten Ort \vec{x} „sieht“ oder „wahrnimmt“. Dieses „sehen“ oder „wahrnehmen“ hat jedoch meist nichts mit einem physiologischen Sehen oder Wahrnehmen zu tun, sondern bedeutet, dass das Ereignis in dem Inertialsystem des Beobachters von einer entsprechenden Uhr (im oben beschriebenen Sinne) zum Zeitpunkt t am Ort \vec{x} registriert wird. Der Beobachter im Ursprung des Systems erfährt möglicherweise erst sehr viel später durch einen Datenaustausch von dem Ereignis und seinen Koordinaten. Für ein tatsächliches Sehen muss erst ein Lichtsignal von dem Ereignis A zu dem Beobachter gelangen. Dieses Sehen findet also im Allgemeinen später statt, außerdem kann es sein, dass unterschiedliche Ereignisse, die in dem Inertialsystem zwar gleichzeitig stattfinden (und damit dieselbe t -Koordinate haben) von dem Beobachter im Ursprung zu unterschiedlichen Zeiten gesehen werden und umgekehrt.

1.6 Geometrische Konstruktionen

In diesem Abschnitt sollen die in Abschnitt 1.4 angedeuteten algebraischen Herleitungen der Lorentz-Transformationen nochmals anhand geometrischer Darstellungen verdeutlicht werden.

1.6.1 Der Raum gleichzeitiger Ereignisse

Wir beginnen mit der geometrischen Konstruktion der Ereignismengen, die nach den Axiomen der speziellen Relativitätstheorie von einem gegebenen Inertialsystem als gleichzeitig eingestuft werden. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum handelt es sich dabei um dreidimensionale affine Unterräume. In einer zweidimensionalen Darstellung handelt es sich um Geraden.

Abbildung 1.4 zeigt zwei zweidimensionale Raumzeit-Diagramme mit den Weltlinien zweier Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen. Die Weltlinie von Beobachter 1 verlaufe entlang der t -Achse (mit der Raumkoordinate $x \equiv 0$), die von Beobachter 2 entlang der t' -Achse (mit $x' \equiv 0$). Beide Beobachter haben bei Ereignis O ihre Uhren auf 0 gesetzt. Außerdem hat es bei Ereignis O einen Lichtblitz gegeben, der sich entlang der Diagonalen ausbreitet. Diese Diagonalen bilden den Zukunftslichtkegel zum Ereignis O . (In Abbildung 1.4 sind auch Teile des Vergangenheitslichtkegels zu O dargestellt.)

Für beide Beobachter soll sich das Licht in ihrem jeweiligen Inertialsystem in

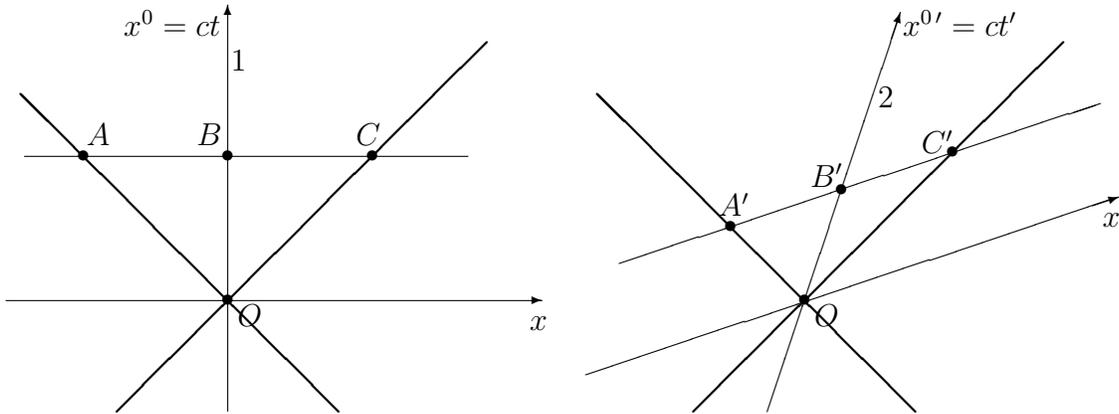


Abbildung 1.4: Die gleichzeitigen Ereignisse für einen ruhenden (links, Weltlinie 1) und einen relativ dazu bewegten Beobachter (rechts, Weltlinie 2) ergeben sich aus der Forderung, dass für beide der Lichtkegel zentriert ist, d.h. die Distanz AB ($A'B'$) muss gleich der Distanz BC ($B'C'$) sein. Diese Bedingung legt in beiden Fällen die Linie ABC (bzw. $A'B'C'$) eindeutig fest. Die Ereignisse auf dazu parallelen Linien (beispielsweise durch den Ursprung) sind für die Beobachter jeweils gleichzeitig.

Vor- und Rückrichtung gleich schnell ausbreiten. Das bedeutet, zu dem Ereignis B (bzw. B') sind auf dem Lichtkegel die Ereignisse A und C (bzw. A' und C') gleichzeitig, da nur für diese Ereignisse der Abstand AB und der Abstand BC (bzw. $A'B'$ und $B'C'$) gleich sind. Offensichtlich sind die Ereignisse A', B', C' für Beobachter 1 nicht gleichzeitig, umgekehrt die Ereignisse A, B, C nicht für Beobachter 2.

1.6.2 Die Einstein-Synchronisation

Auf dem genannten Verfahren beruht auch die Einstein-Synchronisation von Uhren. Da nach Axiom 3 das Licht für jedes Inertialsystem in alle Richtungen dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit hat, können zwei entfernte Beobachter in konstantem Abstand (beide bewegen sich auf parallelen Weltlinien) ihre Uhren dadurch synchronisieren, dass sie ein Lichtsignal austauschen (vgl. Abb. 1.5): Beobachter 1 sendet bei Ereignis A das Signal zu Beobachter 2, der es sofort reflektiert (Ereignis B) und zu Beobachter 1 zurückschickt, der es bei Ereignis C empfängt. Beobachter 1 kann nun davon ausgehen, dass das Licht für Hin- und Rückweg dieselbe Zeit braucht. Bei der Hälfte dieser Zeit sollte die Uhr von Beobachter 1 also dieselbe Zeit angezeigt haben (Ereignis D), wie die Uhr von Beobachter 2 bei Ereignis B .

Das gleiche Verfahren erlaubt auch eine Synchronisation der Uhren in umgekehrter Richtung zwischen Beobachter 1 und 3 und führt auf Ereignis B' , das zu Ereignis D gleichzeitig ist. Man beachte, dass die gleichzeitigen Ereignisse B', D und

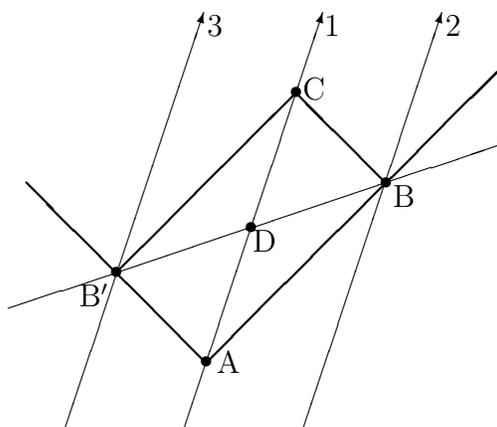


Abbildung 1.5: Die Einstein-Synchronisation. Durch Austausch von Lichtsignalen können die Beobachter 2 und 3 ihre Uhren mit der von Beobachter 1 synchronisieren.

B auf einer Geraden liegen.

1.6.3 Die relativen Skalen

Wir müssen noch die relativen Skalen festlegen. Dazu verlegen wir die beiden Koordinatensysteme in dasselbe Bild (Abb. 1.6). Außerdem stellen wir uns die Abbildung senkrecht zur Papierebene in eine zweite Raumdimension erweitert vor: Den Lichtkegel erhält man durch Rotation um die t -Achse, die Gleichzeitigkeitsebenen von Beobachter 1 durch Ereignis B und von Beobachter 2 durch Ereignis B' stehen senkrecht auf der Papierebene.

Die Ereignisse A und C gehören in $(2 + 1)$ -Raumzeitdimensionen zu einem Kreis mit Zentrum B . Der Radius dieses Kreises ist $AB = BC = OB$. Entsprechend gehören die Ereignisse A' und C' (in unserer euklidischen Geometrie) zu einer Ellipse (der Schnittmenge des Kegels mit einer Ebene), in deren Zentrum sich B' befindet. Die große Halbachse dieser Ellipse ist $A'B' = B'C'$. Nach unserer Forderung, dass sich Licht in alle Richtungen mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet, hat diese große Halbachse in der Minkowski-Geometrie dieselbe Länge wie die kleine Halbachse (senkrecht zu B'). Doch die Mittelpunkte aller Ellipsen, deren große Halbachse in der Zeichenebene liegen und deren kleine Halbachsen dieselbe Länge haben, liegen auf der Hyperbel $t^2 - x^2 = \text{const}$ (dazu schneide man den Kegel einfach mit einer senkrechten Ebene parallel zur Zeichenebene). Also ist in der Zeichnung die Strecke OB' gleich der Strecke OB , wodurch wir auch die Skala festgelegt haben.

Nachdem wir die zeitlichen Skalen zu verschiedenen „geneigten“ Strecken gefunden haben, können wir auch die entsprechenden räumlichen Skalen konstruieren. Wegen der Konstanz der Lichtausbreitung in allen Systemen hatten wir in Abb. 1.6 argumentieren können, dass die zeitliche Distanz OB' gleich der räumlichen Distanz $B'C'$ (jeweils als positive Werte aufgefasst) sein muss. Damit können wir aus Abb. 1.7 auf Abb. 1.8 schließen und feststellen, dass alle zu O raumartigen Ereignisse A_i von O dieselbe

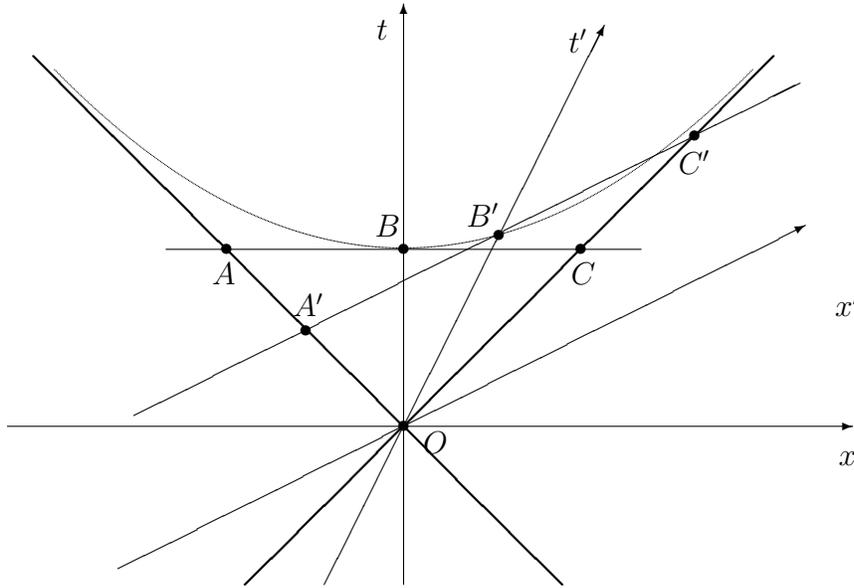


Abbildung 1.6: Für Beobachter 1 sind die Ereignisse A, B, C gleichzeitig, für Beobachter 2 die Ereignisse A', B', C' . Der Einfachheit halber wurde $c = 1$ gesetzt (bzw. t entspricht x^0). Daher ist die Strecke OB gleich AB bzw. BC . Aus demselben Grund ist $OB' = A'B' = B'C'$. Die Strecke OB ist aber auch gleich OB' , da das Licht in der Richtung senkrecht zur Papierebene für diese beiden Ereignisse dieselbe Strecke zurückgelegt hat.

Entfernung haben.

Wir haben oben die relative Skala durch Vergleich mit einer zweiten Raumdimension, relativ zu der sich zwei Inertialsysteme nicht bewegen, abgeleitet. Es gibt noch eine zweite Möglichkeit, die sich auch in zwei Dimensionen anwenden lässt: Wir integrieren das Vektorfeld, das in jedem Punkt durch die Richtung der Gleichzeitigkeit erzeugt wird. Dies führt auf die Bedingung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} \quad \text{oder} \quad t^2 - x^2 = \text{const.} \quad .$$

Alle Ereignisse auf einer solchen Hyperbel haben denselben Abstand vom Ursprung. Insbesondere gilt

$$t_B^2 - x_B^2 = t_D^2,$$

und da $x_B = vt_B$ folgt

$$t_B^2 - v^2 t_B^2 = t_D^2$$

oder

$$t_D = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} t_B.$$

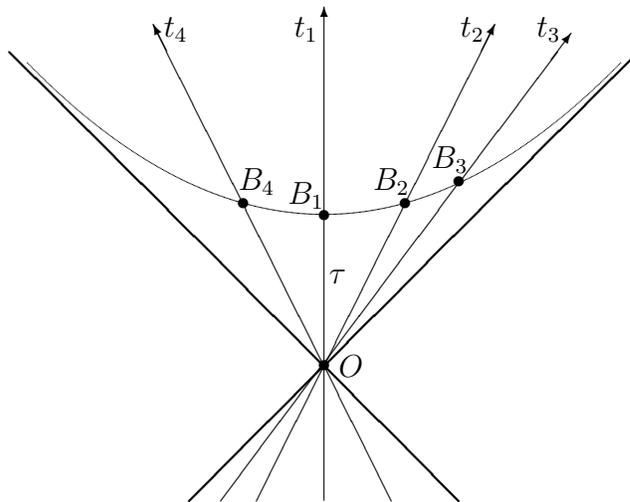


Abbildung 1.7: Für alle inertialen Weltlinien durch das Ereignis O ist bei den Ereignissen B_i auf der Hyperbel dieselbe Zeit vergangen: Alle Uhren entlang dieser Weltlinien, die bei O auf 0 gesetzt wurden, zeigen bei den Ereignissen B_i dieselbe Zeit τ an.

Dieses Verfahren setzt voraus, dass Ereignisse mit einem konstanten Abstand vom Ursprung in gewisser Hinsicht „stetig“ sind, und daß wir infinitesimal annehmen können, dass solche Ereignisse für einen Beobachter, der sich gleichförmig vom Ursprung zu einem dieser Ereignisse bewegt, lokal gleichzeitig sind.

Abbildung 1.8: Alle Ereignisse A_i haben von O denselben invarianten räumlichen Abstand L . Das bedeutet, zu jedem Ereignis A_i gibt es ein Inertialsystem, so dass O und A_i gleichzeitig stattfinden. Die räumliche Differenz in diesem Inertialsystem ist gleich dem invarianten räumlichen Abstand der Ereignisse.

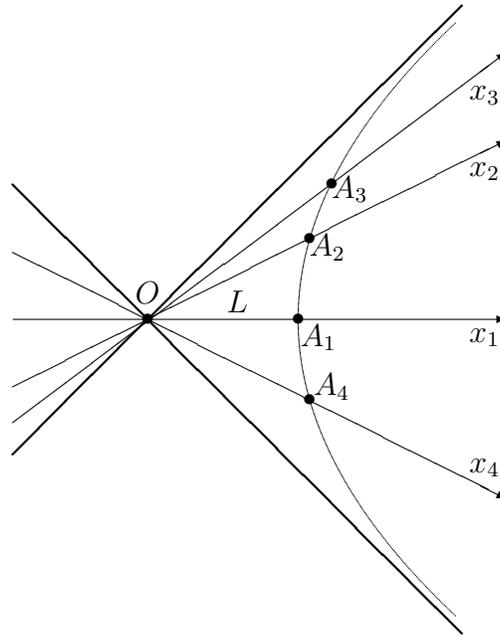


Abbildung 1.9: (links) In zwei Raumdimensionen schneidet die Gleichzeitigkeitsebene zu einem Beobachter 2 den Lichtkegel in einer Ellipse. Die große Halbachse entspricht dem gesuchten Abstand $A'B'$ bzw. $B'C'$, die kleine Halbachse ist senkrecht zur relativen Bewegung und hat daher für Beobachter 1 und 2 dieselbe Länge. Andererseits soll sich für Beobachter 2 das Licht in alle Richtungen gleich schnell ausbreiten, d.h. für Beobachter 2 haben die große und die kleine Halbachse der Ellipse dieselbe Länge. (rechts) Die Punkte mit einem konstanten Abstand von der (x, t) -Ebene schneiden den Lichtkegel in einer Hyperbel, d.h. alle Punkte auf dieser Hyperbel haben von der (x, t) -Ebene denselben Abstand.

Kapitel 2

„Philosophisches“ Zwischenkapitel

Erinnert man sich vor dem Hintergrund der speziellen Relativitätstheorie an das Modell von Lorentz, so wirkt die mechanische Kontraktion physikalischer Systeme und die zeitliche Verzögerung physikalischer Prozesse bei einer Bewegung relativ zum Äther eher befremdlich. Insbesondere der materialunabhängige, universelle Verkürzungsfaktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ erscheint auf den ersten Blick absurd. Man gewinnt den Eindruck, als ob eine entsprechende universelle Wechselwirkung zwischen Materie und Äther, die diesen Verkürzungsfaktor erklärt, nur in einem sehr komplizierten und unnatürlichen Modell beschrieben werden kann. Wir werden sehen, dass dies nicht der Fall ist. Im Gegenteil, die Maxwell-Theorie oder unser heutiges Standardmodell sind ebenfalls in der Lage, diesen Verkürzungsfaktor zu erklären. Der Unterschied zwischen der speziellen Relativitätstheorie und der Lorentz'schen Theorie (Äther, Verkürzungsfaktor, etc.) erweist sich nur als nur eine Frage des Standpunktes.

2.1 Eine Kette gekoppelter Pendel

Wir betrachten zunächst ein einfaches mechanisches Modell, in dem die Längenmaßstäbe eine Lorentz-Kontraktion erfahren, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit v relativ zu dem absolut ruhenden Bezugssystem bewegen. Auch die anderen bekannten Beziehungen aus der speziellen Relativitätstheorie wie beispielsweise die Zeitdilatation werden in diesem Modell wiedergegeben.

Als physikalisches Modell stelle man sich eine Kette harmonisch gekoppelter Pendel in einem konstanten Gravitationsfeld vor. Die Pendel seien mit einem Index i durchnummeriert, wobei wir zunächst i die ganzen Zahlen durchlaufen lassen. Der Freiheitsgrad des i -ten Pendels ist der Winkel φ_i relativ zur herabhängenden Ruhelage. Die Wirkung dieses Modells lautet:

$$S = \frac{1}{2} \int dt \sum_i \left[\left(\frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t} \right)^2 - D [\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)]^2 + 2g \cos \varphi_i(t) \right],$$

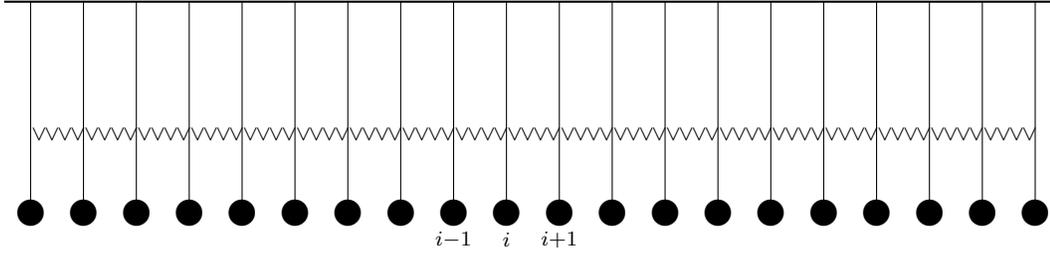


Abbildung 2.1: Eine Kette harmonisch gekoppelter Pendel im Schwerfeld der Erde. Die Pendel können senkrecht zur Darstellungsebene schwingen. Ihr Freiheitsgrad ist der Auslenkungswinkel relativ zur Senkrechten.

und die zugehörige Bewegungsgleichung des i -ten Pendels ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i(t)}{\partial t^2} - D[\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i-1}(t)] + g \sin \varphi_i = 0. \quad (2.1)$$

Suchen wir nach Lösungen, bei denen sich die Winkel benachbarter Pendel nicht wesentlich unterscheiden, so muss $g \ll D$ gelten. In diesem Fall können wir das diskrete Modell durch ein kontinuierliches feldtheoretisches Modell mit der Wirkung

$$S = \frac{1}{2} \int dt dx \left[\left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right)^2 + g \cos \varphi(x, t) \right]$$

und den Feldgleichungen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + g \sin \varphi = 0 \quad (2.2)$$

approximieren. Hier wurde $D = 1$ gesetzt und der kontinuierliche Parameter x , der beispielsweise den Ort der Aufhängung bezeichnet, ersetzt die Nummerierung der Pendel. Die folgenden Überlegungen gehen immer von diesem kontinuierlichen Modell aus. Die Kennzeichnung der Raum-Zeit-Punkte (x, t) bezieht sich jedoch auf eine feste, Newton'sche Hintergrundsraumzeit. Daher ist es auch ganz instruktiv, sich die Kette gekoppelter Pendel vorzustellen, da in diesem Fall der klare – Newton'sche – Charakter von „Raum“ und „Zeit“ deutlicher wird.

Wir wissen, dass die Kontinuumsfeldgleichung (2.2) invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Eine solche Feststellung ist zunächst keine Aussage über die zugrundeliegende Raum-Zeit-Struktur, sondern bezeichnet eine Eigenschaft der Lösungsmenge der Gleichungen: Wenn $\varphi_0(x, t)$ eine Lösung der Gleichung (2.2) ist, dann ist auch

$$\varphi_v(x, t) = \varphi_0(\gamma(v)(x - vt), \gamma(v)(t - vx)) \quad \text{mit} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2.3)$$

eine Lösung dieser Gleichung für beliebiges $-1 < v < 1$. Solange $g \ll 1$, bzw. der Wert für v so eingeschränkt wird, daß auch $g\gamma(v) \ll 1$ (in unserer Normierung ist $c = 1$),

werden die Lösungen der diskretisierten Gleichung (2.1) durch die Lösungen der Kontinuumsleichung angenähert. Im Rahmen dieser Näherung werden die diskretisierten Lösungen daher auch dieselbe Invarianzeigenschaft (2.3) zeigen.

Da wir untersuchen wollen, wie sich Längenmaßstäbe und Uhren verhalten, wenn man sie gegen das Ruhesystem bewegt, müssen wir zunächst intrinsische „Lineale“ und „Uhren“ definieren. Dazu benutzen wir die besonderen Lösungen der Sinus-Gordon-Gleichung: die Soliton-Lösung und die Lösung zu gebundenen Zuständen von zwei Solitonen – die Breather-Lösungen. Die genaue Form der Lösungen spielt für das Folgende keine Rolle, wird aber (um wirklich explizit zu sein) angegeben. Wie wir sehen werden, ist nur die oben erwähnte Invarianz der Lösungsmenge von Bedeutung.

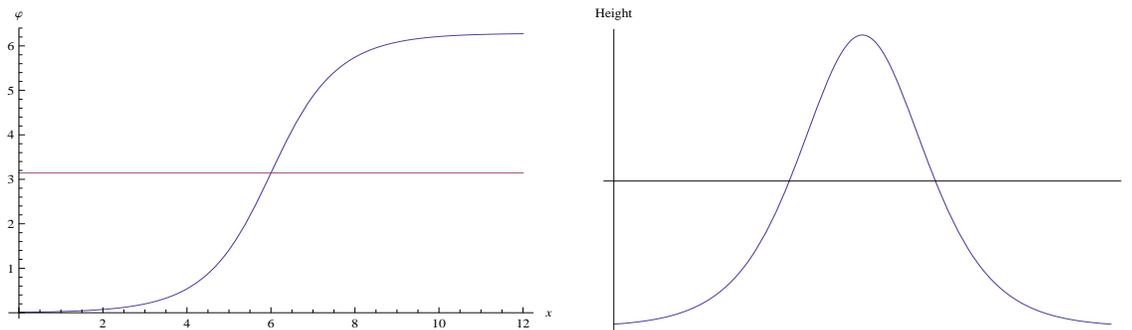


Abbildung 2.2: Die Soliton-Lösung: (oben links) Der Auslenkungswinkel φ als Funktion der Koordinate x entlang der Aufhängung, (oben rechts) die Seitenansicht.

Die Soliton-Lösung entspricht einer Konfiguration, bei der sich die Pendel in der Nähe eines Punktes einmal um ihre Aufhängung herumwinden, sich anderenfalls aber im Wesentlichen in der senkrecht herabhängenden Ruhelage befinden (siehe Abb. 2.2). Diese Lösung ist stabil. Die statische Lösung des Kontinuumsmodells ist durch

$$\varphi_0(x) = 4 \tan^{-1}(\exp \pm \sqrt{g}(x - x_0)) \quad (2.4)$$

gegeben, wobei die Integrationskonstante x_0 die Position des Solitons angibt, d.h. den Punkt, bei dem $\varphi = \pi$. Das + Zeichen in (2.4) entspricht einer Lösung, für die $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \rightarrow 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \rightarrow 2\pi$. Das - Zeichen beschreibt eine sogenannte Anti-Soliton-Lösung mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \rightarrow 2\pi$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \rightarrow 0$. In beiden Fällen nähern sich die Lösungen ihrem asymptotischen Wert für große $|x - x_0|$ exponentiell. Die Reichweite der Lösung entspricht dabei

$$\Delta L = 1/\sqrt{g}. \quad (2.5)$$

Diese Größe ist ein Maß für die halbe Breite des Solitons und soll uns als Längenskala dienen.

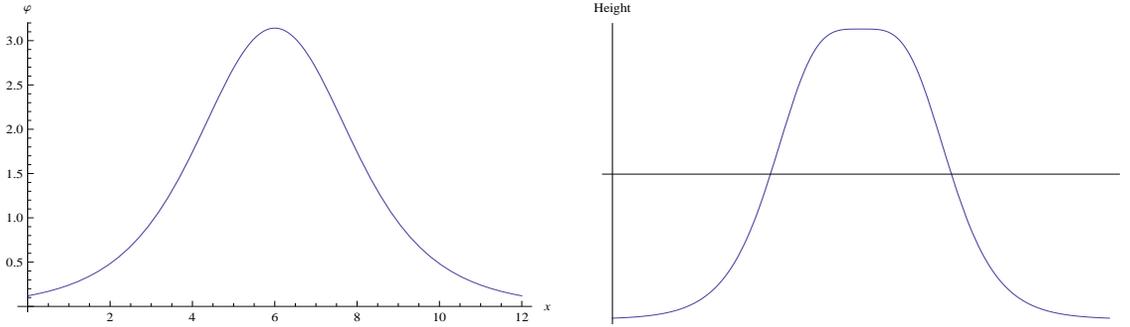


Abbildung 2.3: Die Breather-Lösung: (oben links) Der Auslenkungswinkel φ als Funktion der Koordinate x entlang der Aufhängung im Augenblick maximaler Auslenkung, (oben rechts) die Seitenansicht.

Die Sinus-Gordon Theorie besitzt ebenfalls Lösungen, die gebundenen Zuständen eines Solitons und eines Anti-Solitons entsprechen, die sogenannten Breather-Lösungen (vgl. [16]; Darstellung in Abb. 2.3):

$$\varphi_0(x, t) = -4 \tan^{-1} \left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \frac{\sin \sqrt{g(1-m^2)}(t-t_0)}{\cosh m\sqrt{g}(x-x_0)} \right]. \quad (2.6)$$

Der Parameter m muss der Bedingung $0 < m^2 < 1$ genügen, ist ansonsten aber beliebig. Die Schwingungsperiode ist

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\sqrt{g(1-m^2)}}. \quad (2.7)$$

Diese Lösung ist metastabil. Es handelt sich um einen gebundenen Zustand zwischen einem Teilchen und seinem Antiteilchen, und kleine Störungen lassen dieses System in „Photonen“ zerfallen, d.h. einfache Schwingungen der Pendelkette. Der freie Parameter m hängt mit der Bindungsenergie zusammen und legt sowohl die Amplitude als auch die Periode fest. Zur Festlegung einer Zeitskala muss daher ein spezieller Wert für m gewählt werden. Eine mögliche Wahl wäre, dass φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ variiert, d.h. $m^2 = 1/2$ oder $\Delta T = \sqrt{8\pi^2/g}$. (Dieser Wert für m wurde in Abb. 2.3 gewählt.)

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die so definierten Längen- und Zeitmaßstäbe transformieren, wenn man sie relativ zum „Äther“, d.h. dem durch die Pendel definierten Ruhesystem, bewegt. Wir betrachten zunächst ein Soliton mit einer Geschwindigkeit v . Diese Lösung erhalten wir aus der statischen Lösung nach Gleichung (2.3). Auch die Breite des propagierenden Solitons lässt sich daraus ablesen.

Die statische Lösung $\varphi_0(x)$ habe ihr Zentrum bei $x = 0$. Dann bestimmt die Bedingung

$$\varphi_0(\pm\Delta L) = \pi \pm \alpha$$

einen Wert für α , bei dem wir die Breite von φ_0 messen. Für die propagierende Lösung

$$\varphi_v(x, t) = \varphi_0(\gamma(v)(x - vt)) ,$$

bewegt sich das Zentrum $x_0(t)$ nach der Gleichung $x_0(t) = vt$. Die Breite dieser Lösung ist gleich dem Wert ΔL_v , der der Bedingung

$$\varphi_v(x_0(t) \pm \Delta L_v, t) = \pi \pm \alpha$$

genügt. Dies ist offensichtlich der Fall für

$$\gamma(v) \Delta L_v = \Delta L \quad \text{oder} \quad \Delta L_v = \sqrt{1 - v^2} \Delta L . \quad (2.8)$$

Die Breite der propagierenden Lösung ist daher um einen Faktor $1/\gamma(v)$ kontrahiert. Diese „Lorentz-Kontraktion“ kann von einem außenstehenden Beobachter, der sieht, wie sich die Solitonen entlang der Pendelkette ausbreiten, tatsächlich wahrgenommen werden.

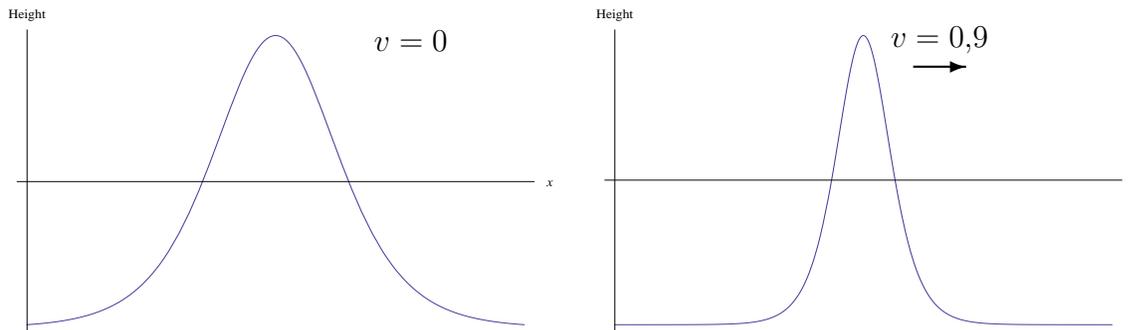


Abbildung 2.4: Die Soliton-Lösung in Bewegung: (links) Die ruhende Soliton-Lösung aus Abb. 2.2, (rechts) die zugehörige transformierte Lösung zu einer Geschwindigkeit $v = 0,9$.

Auch die Dilatation der Schwingungsperiode des gebundenen Zustands lässt sich leicht herleiten. In Ruhe gilt für die Breather-Lösung:

$$\varphi_0^b(x, t) = \varphi_0^b(x, t + \Delta T) .$$

Die zugehörige propagierende Lösung erfüllt

$$\varphi_v^b(x, t) = \varphi_v^b(x + v\Delta T_v, t + \Delta T_v) .$$

Da

$$\varphi_v^b(x, t) = \varphi_0^b(\gamma(v)(x - vt), \gamma(v)(t - vx))$$

erhalten wir

$$\gamma(v)(t + \Delta T_v - v(x + v\Delta T_v)) = \gamma(v)(t - vx) + \gamma(v)(1 - v^2) \Delta T_v$$

und somit:

$$\Delta T = \gamma(v) (1 - v^2) \Delta T_v \quad \text{oder} \quad \Delta T_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \Delta T. \quad (2.9)$$

Die Schwingungsdauer eines sich bewegenden gebundenen Zustands ist also tatsächlich um einen Faktor $\gamma(v)$ im Vergleich zum ruhenden Zustand verlängert.

Solitonen und gebundene Zustände von Solitonen können an einem festen Ende der Kette ohne Energieverlust reflektiert werden. Durch eine solche experimentelle Anordnung kann man das „Zwillingsparadoxon“ aufzeigen (vgl. Abschnitt 3.5): Ein gebundener Zustand, der sich entlang der Kette bewegt und nach einer Reflektion am Ende der Kette zurückkehrt, hat weniger Schwingungen ausgeführt, als ein ruhender gebundener Zustand. Offensichtlich kann dieser Effekt nicht der „Beschleunigung“ am Ende der Kette zugeschrieben werden.

2.2 Von der Ätherhypothese zur Relativitätstheorie

Zunächst hat es vielleicht den Anschein, als ob das oben diskutierte Modell der harmonisch gekoppelten Pendel sehr speziell sei. Hinsichtlich der Existenz von Soliton- und Breather-Lösung mag das richtig sein, nicht aber hinsichtlich der Tatsache, dass dieses Modell den richtigen Verkürzungsfaktor und die richtige Zeitdilatation liefert. Das einzige, was wir zur Herleitung dieser Faktoren benutzt haben, ist die Lorentz-Invarianz der Feldgleichungen. *Jede Lorentz-invariante Feldgleichung hat somit die Eigenschaft, dass ihre Lösungen, die eine Längen- oder Zeitskala definieren, sich genau so transformieren, dass die bewegten Maßstäbe bzw. Uhren mit dem Lorentz'schen Verkürzungs- bzw. Dilatationsfaktor multipliziert werden.*

Insbesondere haben auch die Maxwell-Gleichungen diese Eigenschaft. Genau das hatte Lorentz gezeigt, wobei er allerdings noch die falschen Transformationsgesetze für die Ladungen und Ströme verwendet hatte. Diesen Fehler hat Poincaré korrigiert. Unter der Annahme, dass auf atomarer Ebene die Materie, und damit auch Längenmaßstäbe, durch die elektromagnetische Wechselwirkung zusammengehalten wird, war daher die Lorentz-Kontraktion nicht nur plausibel sondern sogar eine Folgerung aus den Maxwell-Gleichungen.

Vor diesem Hintergrund können wir auch den Übergang von der Lorentz'schen Sichtweise zur Einstein'schen Sichtweise und der speziellen Relativitätstheorie leichter nachvollziehen. Aus der Lorentz-Invarianz der fundamentalen Gleichungen folgen ja nicht nur die Lorentz-Kontraktion und die Zeitdilatation, sondern sämtliche Phänomene, die sich im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie erklären lassen.

Oftmals wird behauptet, der Übergang zur Sichtweise der speziellen Relativitätstheorie bestünde in einer Neuinterpretation von „Raum“ und „Zeit“. Doch über

Raum und Zeit als abstrakte Entitäten können wir eigentlich nichts sagen. In der Physik interessieren wir uns nur für räumliche und zeitliche *Distanzen*, und diese Distanzen messen wir mit physikalischen Instrumenten – Längenmaßstäben und Uhren –, die selbst den physikalischen Gesetzen unterliegen.

Bisher bezog sich das Symbol x auf eine Koordinate im Ruhesystem des Äthers – im obigen Modell war dies das Ruhesystem der Pendelaufhängung. Dies entspricht dem „Lineal“ eines externen Beobachters, der außerhalb unserer Welt steht und alles mit seinen Maßstäben ausmessen kann – wie wir bei den gekoppelten Pendeln. Entsprechend bezog sich auch das Symbol t auf die Uhr eines externen Beobachters. Wir als externe Beobachter können die Längenkontraktion der Solitonen nachweisen, indem wir einfach ein „externes“ Lineal neben das Soliton halten. Ebenso können wir den propagierenden gebundenen Zustand beobachten und die Dilatation in der Schwingungsperiode mit unserer externen Uhr vergleichen. Für uns als externe Beobachter sind Raum (gemessen entlang der Pendelkette) und Zeit absolut. $c = 1$ (die Geschwindigkeit von Wellen bzw. kleinen Störungen entlang der Kette) ist für uns keine obere Grenzgeschwindigkeit, und wenn wir uns entlang der Kette bewegen, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung entlang der Kette (das entspricht der Ausbreitung des Lichts) in unserem System für die Vorwärts- und Rückwärtsrichtung verschieden: Das Ruhesystem der Pendelkette ist ein ausgezeichnetes System.

Stellen wir uns nun jedoch (1+1)-dimensionale Wesen vor, die in dieser „Soliton-Welt“ leben. Ihnen stehen nur die Solitonen bzw. andere Lösungen ihrer „universellen Bewegungsgleichungen“ als Längen- und Zeitmaßstäbe zur Verfügung. Sie werden daher die Breite eines Solitons und die Schwingungsdauer der Breather-Lösung als Längen- und Zeitmaßstab zur Beschreibung der physikalischen Phänomene benutzen. Doch wenn sie ein bewegtes Soliton mit der Breite eines anderen bewegten Solitons vergleichen, „messen“ sie keine Verkürzung, entsprechend messen sie auch mit bewegten Breather-Lösungen keine Veränderungen in der Zeitskala eines entsprechend bewegten Systems. Erst wenn sie die Breite oder Zeitskalen von bewegten Systemen mit denen von anders bewegten oder ruhenden Systemen vergleichen, messen sie Unterschiede.

Der Übergang zur Minkowski-Welt erfolgt gerade dadurch, dass die externen Längen- und Zeitmaßstäbe durch interne Längen- und Zeitmaßstäbe, die denselben physikalischen Gesetzen unterliegen, ersetzt werden. Es ist der Übergang von einer externen zu einer internen Perspektive. Die zugrundeliegende diskrete Struktur und damit das ausgezeichnete Ruhesystem (der „Äther“) zeigen sich erst, wenn v so groß wird, dass die Breite der Solitonen mit der Größenordnung des Pendelabstands (bzw. der Gitterstruktur) vergleichbar wird. Ist die fundamentale Theorie eine Kontinuums-theorie, so tritt der „Äther“ für einen internen Beobachter überhaupt nicht in Erscheinung.

Wenn wir von der Lorentz-Invarianz bzw. allgemeiner Poincaré-Invarianz der Raum-Zeit sprechen, sollten wir eigentlich zwei Schritte bzw. Aspekte unterscheiden. Wir haben oben die Invarianzeigenschaft der Bewegungsgleichungen als eine Eigenschaft der Lösungsmenge dieser Gleichungen interpretiert: Mit jeder Lösung $\varphi(x)$ ist auch $\varphi^{(\Lambda,a)}(x) = \varphi(\Lambda x - a)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung. Gibt es nun ausgezeichnete Lösungen, die Längenmaßstäbe oder Uhren definieren, so bedeutet diese Invarianz, dass bewegte Längenmaßstäbe kürzer, bewegte Uhren langsamer erscheinen. Dies gilt zunächst bezüglich der festen „Hintergrunds-Raum-Zeit“. Diesen Schritt hatte auch Lorentz erkannt. Der wesentliche zweite Schritt aber blieb Einstein vorbehalten. Er erkannte nämlich, dass die Poincaré-Invarianz einer Gleichung auch bedeutet, dass bezüglich der intrinsischen Maßstäbe das Relativitätsprinzip gilt und damit kein Inertialsystem mehr ausgezeichnet ist.

Statt die Lorentz-Invarianz der Gleichungen als Eigenschaft der Lösungsmenge anzusehen, was beispielsweise auch für die diskretisierte Pendelkette einfach zu interpretieren war, können wir die Lorentz-Invarianz auch als eine Freiheit der Koordinatenwahl auffassen. Wenn wir nämlich die Raum- und Zeitkoordinaten einer Lorentz-Transformation unterwerfen, für eine Raumdimension somit die Ersetzung

$$x \rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad t \rightarrow t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (2.10)$$

vornehmen, dann bleiben die Feldgleichungen unverändert. Ordnen wir nun die Koordinaten (x, t) bzw. (x', t') jeweils Beobachtern zu, deren Weltlinie durch $x = 0$ bzw. $x' = 0$ und deren „gleichzeitige Ereignisse“ durch die Bedingungen $t = \text{const.}$ bzw. $t' = \text{const.}$ definiert sind, dann bedeutet die Invarianz der Feldgleichungen, dass beide Beobachter dieselbe Physik sehen, d.h., es gilt das Relativitätsprinzip.

Die Lorentz-Invarianz der Bewegungsgleichungen können wir offensichtlich physikalisch auf zwei vollkommen unterschiedliche Weisen interpretieren. Einmal als Eigenschaft der Lösungsmenge, die es uns erlaubt, aus bestimmten Lösungen andere zu gewinnen. Diese Interpretation bezieht alles auf einen festen Satz von Koordinaten (x, t) (vgl. (2.3)), der als das Koordinatensystem eines ausgezeichneten Ruhesystems interpretiert werden kann. Bezüglich dieser Koordinaten beobachten wir die Lorentz-Kontraktion und die Zeitdilatation.

Die andere Interpretation impliziert das Relativitätsprinzip. Wenn sich zwei Beobachter relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit v bewegen, können sie unterschiedliche Koordinatensysteme verwenden, in denen sie sich jeweils im Ursprung (und damit in Ruhe) befinden. Jeder verwendet zur Angabe von räumlichen und zeitlichen Distanzen Werte, die mit Instrumenten in seinem System gemessen wurden. Die von den beiden Beobachtern verwendeten Koordinaten hängen über die Gleichungen (2.10) miteinander zusammen. In diesem Fall erfahren beide Beobachter dieselbe Physik. In dieser Interpretation gibt es kein ausgezeichnetes Ruhesystem –

der Äther ist verschwunden. Der Preis ist eine neue Vorstellung von Gleichzeitigkeit. Dieser letzte Schritt zeichnete Einstein vor Lorentz und Poincaré aus.

2.3 Die Synchronisation von Uhren

Einer der seltsamsten und umstrittensten Aspekte der speziellen Relativitätstheorie ist ihr Konzept von Gleichzeitigkeit. Dabei wird oft vergessen, dass es sich bei der Behauptung, zwei Ereignisse seien gleichzeitig, nicht um eine „faktische“ Aussagen handelt, sondern eher um eine Konvention. Ob zwei Ereignisse (für ein gegebenes Inertialsystem) gleichzeitig stattfinden oder nicht, können wir experimentell nur entscheiden, wenn wir eine Vorschrift angegeben haben, was wir unter „gleichzeitig“ verstehen wollen. Diese Vorschrift wird letztendlich darin bestehen, dass wir zwei Ereignisse als gleichzeitig ansehen, wenn die Uhren am jeweiligen Ort dieser Ereignisse dieselbe Zeit anzeigen, womit wir das Problem auf die Synchronisation von Uhren an verschiedenen Orten (aber im selben Inertialsystem) reduzieren haben. Die einzige Einschränkung ist, dass zwei gleichzeitige Ereignisse A und B *nicht* in einer kausalen Abhängigkeit stehen sollten. Grundsätzlich können wir eine beliebige raumartige Hyperfläche als gleichzeitig *definieren*.

Die folgenden Überlegungen gelten für den flachen Minkowski-Raum. Wir konzentrieren uns ausschließlich auf den Aspekt der Synchronisation von Uhren für ein gegebenes Inertialsystem. Eine ausführlichere Darstellung dieser Problematik findet man bei Mittelstaedt [21] sowie in den beiden Abhandlungen *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre* [26] und *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre* [27] von Hans Reichenbach (Hans Friedrich Herbert Günther Reichenbach, *geb. 26.9.1891 in Hamburg; gest. 9.4.1953 in Los Angeles*).

2.3.1 Synchronisation durch Lichtsignale

Zunächst ist es recht hilfreich, sich bei der operationalen Definition von Gleichzeitigkeit auf ein allgemeines Verfahren zu beschränken, das allerdings noch keine Einschränkung an die Möglichkeiten darstellt. Wir wollen Uhren durch Austausch von Lichtsignalen synchronisieren. Beobachter A sendet zum Zeitpunkt t_1 ein Lichtsignal aus. Dieses wird von Beobachter B reflektiert und erreicht Beobachter A zum Zeitpunkt t_2 . Bezeichnen wir den Zeitpunkt des Ereignisses der Reflektion des Lichtstrahls bei Beobachter B mit t , so möchte Beobachter A nun definieren, welches Ereignis auf seiner Weltlinie zu dem Moment der Reflektion des Lichtstrahls bei Beobachter B gleichzeitig war, d.h. dem Zeitpunkt t entspricht. Die einzige Einschränkung liefert dabei die Forderung der Kausalität: $t_1 < t < t_2$. Beobachter A definiert nun:

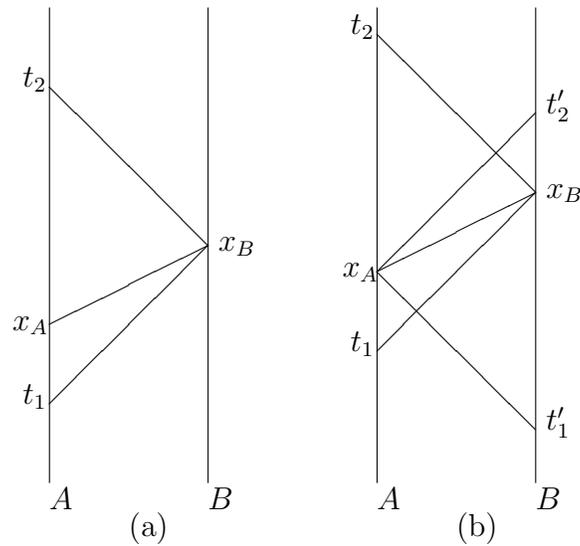
$$t = t_1 + \epsilon(A, B)(t_2 - t_1)$$

mit

$$0 < \epsilon(A, B) < 1 .$$

(Der Einfachheit halber soll das Synchronisierungsverfahren nicht von der Zeit abhängen, d.h. $\epsilon(A, B)$ hängt nicht zusätzlich noch von t bzw. t_1 ab.)

Abbildung 2.5: Synchronisation von Uhren durch Lichtstrahlen. Die senkrechten Linien entsprechen den Weltlinien der Beobachter A und B , die zueinander einen konstanten Abstand halten. (a) Zum Zeitpunkt t_1 sendet A ein Lichtsignal aus, das von B im Ereignis x_B reflektiert wird und bei t_2 wieder Beobachter A erreicht. Durch Vorgabe von ϵ_A konstruiert A das Ereignis x_A , das zu x_B gleichzeitig ist. (b) Soll die Gleichzeitigkeit der Ereignisse x_A und x_B auch für Beobachter B gelten, so muss er sein Verfahren zur Bestimmung der Gleichzeitigkeit (ausgedrückt durch ϵ_B) so wählen, dass $\epsilon_B = 1 - \epsilon_A$.



Zunächst kann man sich leicht überzeugen, dass durch geeignete Wahl von ϵ tatsächlich je zwei raumartige Ereignisse x_A und x_B auf der Weltlinie von A und B als gleichzeitig definiert werden können (vgl. Abb. 2.5). Dieses Verfahren bildet daher keine Einschränkung der Allgemeinheit. Damit die Hyperfläche der zu x_A gleichzeitigen Ereignisse eine raumartige Hyperfläche ist, müssen die Richtungsableitungen der Funktion $\epsilon(A, B)$ (aufgefasst als eine Funktion von B) noch durch eine Konstante (bei unserer Definition der Lichtgeschwindigkeit ist diese Konstante 1) beschränkt sein. Durch geeignete Forderungen an die Funktion ϵ erhält man verschiedene Synchronisationsverfahren.

2.3.2 Die Einstein-Synchronisation

Eine sehr allgemeine Forderung an die Gleichzeitigkeit von Ereignissen ist die Symmetrieforderung: Wenn für einen Beobachter A das Ereignis x_B auf der Weltlinie eines Beobachters B gleichzeitig zu dem Ereignis x_A auf seiner Weltlinie ist, dann soll umgekehrt auch für den Beobachter B das Ereignis x_A gleichzeitig zu x_B sein. Anhand der Abbildung 2.5(b) kann man sich leicht überzeugen, dass diese Forderung gleichbe-

deutend mit der Bedingung

$$\epsilon(A, B) = 1 - \epsilon(B, A)$$

ist.

Eine weitere allgemeine Forderung ergibt sich aus der Homogenität des Raumes. Wir verlangen, dass sich die Funktion $\epsilon(A, B)$ nicht ändert, wenn wir die beiden Beobachter A und B um *denselben* (räumlichen) Vektor verschieben. Symbolisch ausgedrückt:

$$\epsilon(A + \vec{a}, B + \vec{a}) = \epsilon(A, B) .$$

Dies bedeutet, dass $\epsilon(A, B)$ nur noch von der räumlichen Richtung abhängen kann, unter der der Beobachter B von A aus gesehen wird. Innerhalb einer Halbebene, die die Weltlinie von A als Rand hat, ist ϵ konstant. Auch diese Forderung verlangen wir allgemein.

Nun kommen wir zu einer speziellen Forderung, die sich aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ergibt. Da die Lichtgeschwindigkeit für jeden Beobachter und für jede Richtung dieselbe sein soll, können wir zusätzlich noch Isotropie unserer Gleichzeitigkeitsdefinition verlangen. ϵ soll also auch nicht mehr von der räumlichen Richtung abhängen, unter der B von A aus gesehen wird. In diesem Fall gilt

$$\epsilon(A, B) = \text{const} .$$

Zusammen mit der ersten Forderung der Symmetrie folgt sofort:

$$\epsilon = \frac{1}{2} .$$

Die aus diesem Wert für ϵ folgende Synchronisation von Uhren bezeichnet man als Einstein-Synchronisation.

Das zweite Axiom der speziellen Relativitätstheorie - die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit - führt uns somit schon zur Festlegung der Gleichzeitigkeitsvorschrift. Das erste Axiom - das Relativitätsprinzip - geht indirekt in diese Festlegung ein, da wir die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und somit die Isotropie der Synchronisationsvorschrift für jedes Inertialsystem verlangt haben.

2.3.3 Synchronisation mit der Ätherhypothese

Wir haben aus der Lorentz-Invarianz der universellen Bewegungsgleichungen geschlossen, dass die spezielle Relativitätstheorie in der Formulierung von Einstein äquivalent zur Lorentz-Theorie ist, d.h. zu einer Theorie mit Ätherhypothese und Lorentz-Kontraktion der Längenskalen. Es sollte daher nicht überraschen, wenn es eine Synchronisationsvorschrift gibt, die auf die Lorentz-Theorie führt.

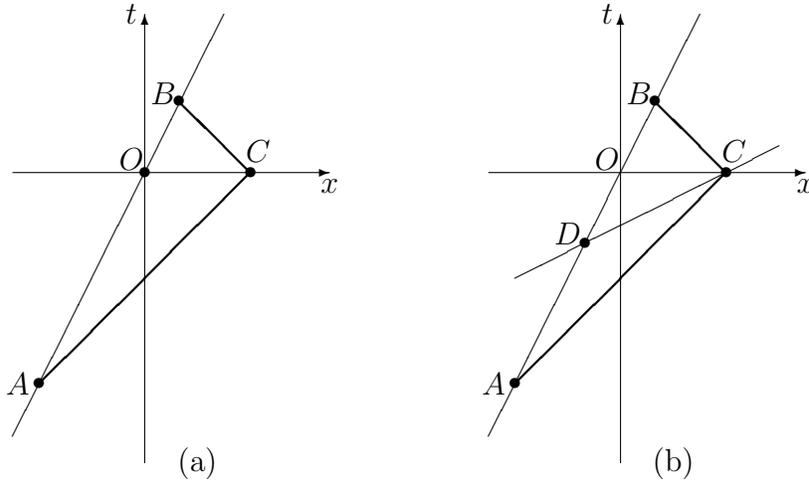


Abbildung 2.6: Äther- und Einstein-Synchronisation. In Teil (a) rekonstruiert der Beobachter auf der Weltlinie AB das Ereignis O als gleichzeitig zum Ereignis C . Seine Synchronisationsvorschrift hängt von der Geschwindigkeit v relativ zu dem ausgezeichneten Ruhesystem ab. Dabei gilt für das Verhältnis $(AO)/(AB) = (1 + v)/2$. In Abbildung (b) wird nach der Einstein-Synchronisation aus denselben Lichtsignalen das Ereignis D als zu C gleichzeitig rekonstruiert.

Auch mit Ätherhypothese verlangen wir von der Gleichzeitigkeit von Ereignissen Symmetrie und Homogenität des Raumes. Was wir jedoch nicht mehr verlangen können, ist die allgemein gültige Isotropie der Synchronisationsvorschrift. Für ein System, das sich relativ zum Äther mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, wird die Synchronisationsvorschrift von der Richtung relativ zu \vec{v} abhängen. Allgemein wird also nun gelten:

$$\epsilon(A, B) = \epsilon(\vec{v}; A, B) .$$

Lediglich für das ausgezeichnete Inertialsystem, das dem Ruhesystem des Äthers entspricht, ist die Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen dieselbe und somit das Synchronisationsverfahren symmetrisch:

$$\epsilon(\vec{v} = 0; A, B) = \frac{1}{2} .$$

Bewegt sich das Inertialsystem der Beobachter A und B relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit \vec{v} , so gilt (vgl. Abb. 2.6)

$$\epsilon(\vec{v}; A, B) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\vec{v}|}{c} \cos \alpha \right) ,$$

wobei α der Relativwinkel zwischen der Richtung von \vec{v} und der Halbebene ist, die durch die Weltlinie von A begrenzt wird und die Weltlinie von B enthält.

Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass Gleichzeitigkeit nun ein absoluter Begriff wird. Sind zwei Ereignisse x_A und x_B für einen Beobachter A gleichzeitig, so sind sie es auch für alle anderen Beobachter, unabhängig von deren Bewegungszustand.

Der Nachteil dieses Verfahrens ist jedoch, dass wir das Ruhesystem des Äthers nicht kennen. Wir müssen also willkürlich ein System auszeichnen, das wir als Ruhesystem definieren, beispielsweise das System des Schwerpunkts der in unserem Universum beobachtbaren Massen oder das Ruhesystem relativ zur Hintergrundstrahlung. (Es ist nicht selbstverständlich, dass diese beiden Systeme identisch sind.) Wegen der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Synchronisationsverfahrens gilt das Relativitätsprinzip nicht mehr. Die Lichtgeschwindigkeit ist nur im Ruhesystem des Äthers richtungsunabhängig konstant.

Das Relativitätsprinzip gilt jedoch in einer anderen Form: Wir können jedes beliebige Inertialsystem als Ruhesystem definieren und die Synchronisation der Uhren auf dieses System beziehen. Die physikalischen Gesetze bleiben dieselben. Hier liegt der physikalisch unbefriedigende Aspekt dieses Synchronisierungsverfahrens. Wir brechen die Symmetrie, die sich im Relativitätsprinzip ausdrückt, *per Hand*, indem wir ein Inertialsystem auszeichnen. Umgekehrt trägt die Einstein-Synchronisation dem Relativitätsprinzip Rechnung. Kein Inertialsystem wird durch dieses Verfahren ausgezeichnet. Der Preis ist allerdings die Relativität der Gleichzeitigkeit.

Unter bestimmten Umständen ist es jedoch sinnvoll, eine Synchronisation zu wählen, die der Lorentz'schen Sichtweise näher ist als der Einstein'schen. Beispielsweise könnte man die Lorentz'sche Sichtweise so interpretieren, dass irgendwo in der Mitte unseres Universums eine riesige Uhr steht, und das, was diese Uhr anzeigt, ist die „wahre“ Zeit. Alle anderen Systeme müssen ihre Zeit auf diese wahre Zeit umrechnen. Dieses Verfahren wird in abgewandelter Form beispielsweise bei der Zeitsynchronisation des GPS-Satellitensystems verwendet. Die „riesige Uhr“ steht in der GPS-Zentrale in Colorado. Die Uhren der Satelliten sind so geschaltet, dass ihre Zeit gleich der „Masterzeit“ ist. Insbesondere ist ihr Gang im Vergleich zu einer „richtigen“ Uhr etwas gedrosselt, um den Einfluss der schwächeren Gravitation sowie der Bewegung auszugleichen.

Die Einstein-Synchronisation wie auch die „Äthersynchronisation“ sind Spezialfälle einer Klasse von Synchronisationsvorschriften, bei denen die Konstanz der sogenannten „Zwei-Wege-Lichtgeschwindigkeit“ gefordert wird. Dabei handelt es sich um die Geschwindigkeit c , die man einem Lichtstrahl zuordnet, der eine Strecke in beide Richtungen - vor und zurück - durchläuft. Ist c^+ die Geschwindigkeit für eine Richtung und c^- die Geschwindigkeit für die Rückrichtung, so ist

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^+} + \frac{1}{c^-} \right) .$$

Während jedoch zur Messung von c^+ bzw. c^- die Uhren an verschiedenen Raumpunk-

ten synchronisiert sein müssen, kann man c an einem Punkt auswerten, d.h. c hängt nicht von der Synchronisationsvorschrift ab. Im Michelson-Morley-Versuch beispielsweise wird die Lichtgeschwindigkeit ja gar nicht für verschiedenen Raumrichtungen verglichen, sondern nur die Zwei-Wege-Lichtgeschwindigkeit. Nur von dieser wird gezeigt, daß sie isotrop ist. Die Einstein'sche Forderung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit geht also über das Ergebnis des Michelson-Morley-Versuchs hinaus.

2.3.4 Synchronisation durch langsamen Uhrentransport

Abschließend soll noch gezeigt werden, dass die Synchronisation durch langsamen Uhrentransport zu demselben Ergebnis wie die Einstein-Synchronisation führt. Das bedeutet, wenn man zwei Uhren am selben Ort synchronisiert und dann die eine der beiden Uhren langsam zu einem anderen Ort bringt, dann ist die so erreichte Synchronisation eine Einstein-Synchronisation.

Zunächst sollten wir etwas genauer definieren, was „Synchronisation durch langsamen Uhrentransport“ bedeutet. Wir stellen uns dazu zwei Beobachter vor, die einen konstanten Abstand L halten und sich im selben Inertialsystem befinden. Zu einem Zeitpunkt $t_0 = 0$ werden bei Beobachter 1 zwei Uhren synchronisiert. Anschließend wird eine der beiden Uhren mit der Geschwindigkeit v zu Beobachter 2 gebracht. Sie benötigt dazu für Beobachter 1 die Zeit $t = L/v$, das ist also die Zeit, die Beobachter 1 dem Ereignis „Uhr ist bei Beobachter 2“ zuschreiben wird. Die Anzeige auf der Uhr ist allerdings etwas kürzer, nämlich

$$t_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t. \quad (2.11)$$

Wir können nicht einfach argumentieren, dass für $v/c \ll 1$ die rechte Seite gegen t geht, denn wenn v sehr klein ist, wird t sehr groß, und damit würde zwar t_1/t gegen 1 gehen, aber t_1 und t könnten sich möglicherweise selbst im Limes $v \rightarrow 0$ noch um einen konstanten Term unterscheiden. Es gilt aber

$$t_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + O((v/c)^4)\right) \frac{L}{v} \approx \frac{L}{v} - \frac{L v}{c^2} + \dots = t - \frac{L v}{c^2} + \dots \quad (2.12)$$

Da L und c Konstanten sind (L/c ist die Zeit, die das Licht braucht, die Strecke L zu durchqueren), wird der Korrekturterm für sehr kleine Geschwindigkeiten beliebig klein. Allerdings ist die Korrektur von der Ordnung v/c und nicht, wie man zunächst nach Gleichung 2.11 erwarten könnte, von der Ordnung $(v/c)^2$.

Kapitel 3

SRT – Anwendungen

In diesem Kapitel sollen erste Anwendungen bzw. Schlussfolgerungen aus der Lorentz-Invarianz der Minkowski-Raumzeit beschrieben werden. Dazu zählen neben der Zeitdilatation, der Lorentz-Kontraktion, dem relativistischen Doppler-Effekt (longitudinal und transversal) auch einige Scheinparadoxa wie beispielsweise das so genannte Zwillings-Paradoxon.

Anschließend deuten wir an, wie sich der Lagrange-Formalismus auf die Relativitätstheorie verallgemeinern lässt und was der zum Ortsvektor kanonisch konjugierte Impuls ist. In diesem Zusammenhang definieren wir auch den Begriff der Eigenzeit. Den Abschluss bildet ein von Einstein erdachtes Gedankenexperiment, das eine elegante Herleitung der bekannten Beziehung $E = mc^2$ erlaubt.

3.1 Zeitdilatation

Wir behandeln zunächst das Phänomen der Zeitdilatation. Schon bei der Pendelkette hatten wir gesehen, dass aus der Lorentz-Invarianz der Feldgleichungen folgt, dass eine relativ zum Äther bewegte Breather-Lösung langsamer schwingt bzw. eine größere Schwingungsperiode hat. Doch es gilt ja das Relativitätsprinzip und das bedeutet, dass ein Beobachter in dem bewegten System umgekehrt ebenfalls den Eindruck hat, dass die Uhren in dem ruhenden System langsamer gehen. Wir wollen nun untersuchen, was genau damit gemeint ist und weshalb dieses Phänomen tatsächlich auftritt.

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme mit den jeweiligen Koordinaten (x, t) und (x', t') (vgl. Abb. 3.1). Bei dem Ereignis O treffen sich die beiden Beobachter im Ursprung ihrer jeweiligen Systeme und setzen ihre Uhren jeweils auf $t_0 = 0$. Wir betrachten nun die Situation zunächst aus der Perspektive des Inertialsystems von Beobachter 1. Für diesen Beobachter zeigt die Uhr bei Ereignis A auf die Zeit t . In seinem Inertialsystem ist das Ereignis B' gleichzeitig zu A , hat also ebenfalls die Koordinate t . Bei diesem Ereignis B' scheidet die Weltlinie von Beobachter 2 die

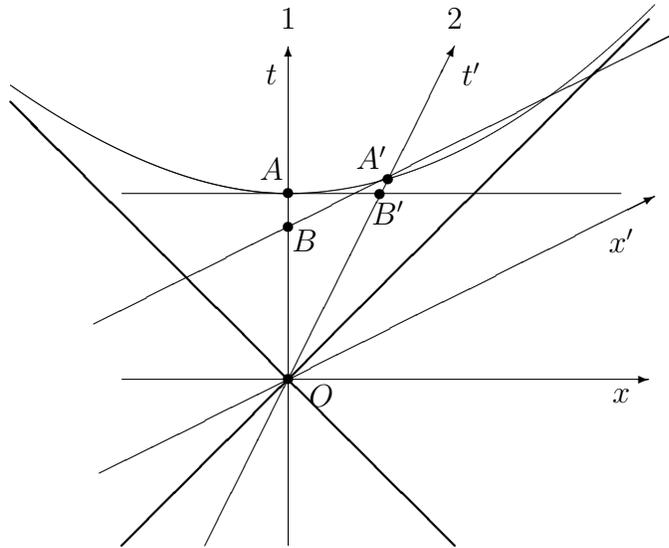


Abbildung 3.1: Für den ruhenden Beobachter 1 scheint eine bewegte Uhr langsamer zu gehen (B' liegt vor A'). Denselben Eindruck hat umgekehrt auch der Beobachter 2 (B liegt vor A).

„Gleichzeitigkeitslinie“ von Beobachter 1 zur Zeitkoordinate t . Wir wissen jedoch, dass für Beobachter 2 erst im Ereignis A' dieselbe Zeit vergangen ist wie für Beobachter 1 zum Ereignis A . Das Ereignis A' ist aber später als B' . Das bedeutet, dass die Uhr von Beobachter 2 bei Ereignis B' noch nicht so viele Zeittakte anzeigt, wie zum Zeitpunkt A' (nämlich t) und damit die Uhr von Beobachter 1 zum Zeitpunkt t . Beobachter 1 hat also den Eindruck, die Uhr von Beobachter 2 gehe langsamer.

Ich betone hier nochmals, dass Beobachter 1 die Uhr von Beobachter 2 nicht „sieht“ (außer vielleicht im Augenblick, wo sich beide Beobachter treffen, also bei Ereignis O). Für den Vergleich der Uhren wählt er für sein Inertialsystem zwei gleichzeitige Ereignisse (z.B. A und B') und die Zeit auf der Uhr von Beobachter 2 wird von einem anderen Beobachter (dessen Weltlinie parallel zu der von 1 ist aber durch das Ereignis B' verläuft, dessen Uhr aber mit der von 1 synchronisiert wurde) abgelesen. Der Uhrenvergleich erfolgt in Inertialsystem 1 zu vollkommen anderen Ereignissen als in Inertialsystem 2 und der Grund dafür liegt in der unterschiedlichen Zuordnung von Gleichzeitigkeit für Ereignisse.

3.2 Lorentz-Kontraktion

Ähnlich wie im letzten Abschnitt die Zeitdilatation untersuchen wir nun das Phänomen der Lorentz-Kontraktion aus der Sichtweise der verschiedenen Inertialsysteme. Die Länge, beispielsweise eines Lineals, wird dabei als der räumliche Abstand von Anfangs- und Endpunkt des Lineals bestimmt, wobei die Augenblicke der Messung in den jeweiligen Inertialsystemen gleichzeitig sein sollen.

Wir betrachten zunächst einen Beobachter 1 in dessen Inertialsystem das Li-

neal ruht (Abb.3.2 (links)) . Die von dem Lineal überstrichene Weltfläche ist in der Abbildung grau unterlegt. Wichtig sind für uns die Weltlinien der beiden Endpunkte des Lineals. Zu einem bestimmten Zeitpunkt in Inertialsystem 1 (beispielsweise $t = 0$) befinden sich die beiden Endpunkte bei den Ereignissen O und A . Der räumliche Abstand $l = OA$ dieser Ereignisse für Beobachter 1 definiert die Länge des Lineals. Im Inertialsystem von Beobachter 2 sind aber die Ereignisse O (linkes Ende des Lineals) und B (rechtes Ende) gleichzeitig, in seinem System ist die Länge also durch $l' = OB$ gegeben. Diese Länge ist aber kürzer als l , da das Ereignis A' , das für Inertialsystem 2 von O denselben räumlichen Abstand hat wie A für Inertialsystem 1, außerhalb des Lineals liegt.

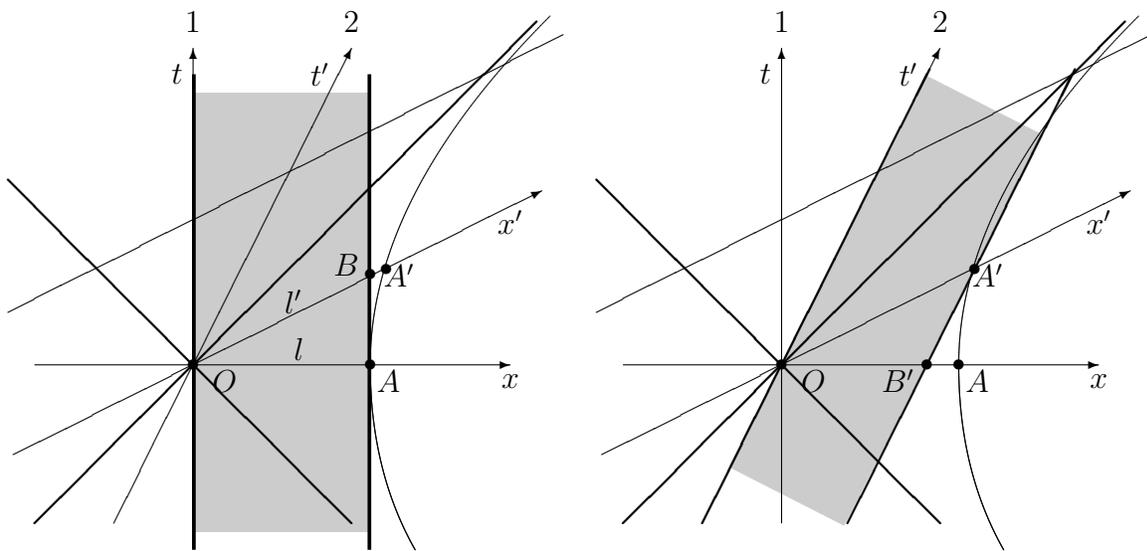


Abbildung 3.2: Das von einem Lineal überstrichene Raumzeitgebiet (grau unterlegt) erscheint in den verschiedenen Inertialsystemen unterschiedlich breit. (links) Für den bewegten Beobachter 2 scheint das in Inertialsystem 1 ruhende Lineal kürzer. (rechts) Umgekehrt erscheint ein bewegtes Lineal für den ruhenden Beobachter kürzer als für einen Beobachter, der sich mit dem Lineal bewegt.

Wir betrachten nun die umgekehrte Situation: Das Lineal ist in System 2 in Ruhe, seine Anfangs- und Endpunkte bewegen sich also in System 1 mit einer bestimmten Geschwindigkeit (Abb. 3.2(rechts)). In System 2 wird die Länge des Lineals beispielsweise bei den gleichzeitigen Ereignissen O und A' bestimmt, und der zugehörige räumliche Abstand ist $l = OA'$. In Inertialsystem 1 wird der Abstand bei den gleichzeitigen Ereignissen O und B' gemessen, und deren Abstand ist offensichtlich kleiner als l .

In beiden Fällen finden wir somit, dass die Länge des Lineals, gemessen von einem bewegten System aus, immer kleiner ist als seine Länge in seinem eigenen Ruhesystem.

3.3 Doppler-Effekte

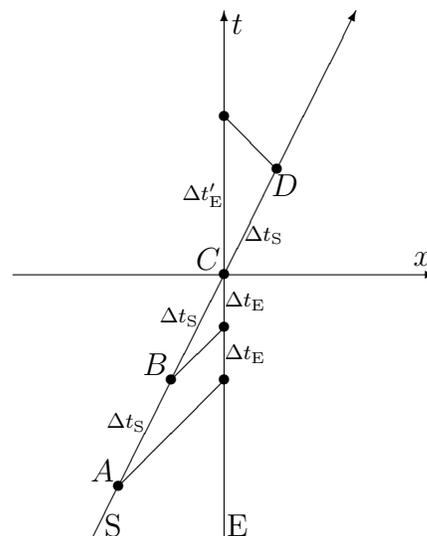
Der Doppler-Effekt ist schon aus der nicht-relativistischen Mechanik bekannt: Ein Martinshorn klingt höher, wenn das Auto auf uns zukommt und tiefer, wenn es sich von uns entfernt. Durch die Bewegung des Autos werden die Wellenberge in Fahrtrichtung gestaucht – treffen daher in kürzeren Zeitabständen beim Empfänger ein und klingen höher – und entgegen der Fahrtrichtung gestreckt – sie treffen in größeren Zeitabständen beim Empfänger ein und klingen daher tiefer. In der klassischen Mechanik gibt es nur einen *longitudinalen* Doppler-Effekt, d.h. dieser Effekt tritt nur auf, wenn sich der radiale Abstand eines Senders relativ zu einem Empfänger ändert.

In der Relativitätstheorie kommen wegen der Zeitdilatationen bzw. der Lorentz-Kontraktionen in relativ zueinander bewegten Systemen noch weitere Einflüsse hinzu, insbesondere gibt es nun auch den so genannten *transversalen* Doppler-Effekt.

3.3.1 Der Doppler-Effekt in der klassischen Mechanik

Abbildung 3.3 zeigt eine nicht-relativistische Raumzeit, d.h., die Gleichzeitigkeitslinien sind für alle Beobachter parallel zur x -Achse und die zeitlichen Abstände zwischen zwei Ereignissen entsprechen den Projektionen auf die t -Achse. Beobachter E (der „Empfänger“) sei in Ruhe (bei Schallwellen bedeutet dies im Ruhesystem des Schallträgers), Beobachter S (der „Sender“) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf E zu, trifft ihn bei Ereignis C und bewegt sich ab dann von E weg. In gleichen Zeitabständen Δt_S sendet Beobachter S bei den Ereignissen A , B , C und D Signale an E. Solange sich der Abstand zwischen dem Sender S und dem Empfänger E mit konstanter Rate verkürzt, empfängt E die Signale in gleichen Zeitabständen Δt_E ; bewegt sich S von E weg, sind die Zeitabstände $\Delta t'_E$.

Abbildung 3.3: Doppler-Effekt in der nicht-relativistischen Mechanik. Die Gleichzeitigkeitslinien sind alle parallel zur x -Achse. In gleichen Zeitabständen Δt_S (bei den Ereignissen A , B , C , D) sendet Beobachter S Signale an Beobachter E. Solange sich S auf E zubewegt, empfängt E die Signale im Abstand Δt_E , bewegt sich S von E weg, ist der zeitliche Abstand zwischen dem Empfang zweier Signale $\Delta t'_E$. Offensichtlich ist Δt_E kürzer als Δt_S , aber $\Delta t'_E$ länger als Δt_S .



Δt_E ist kürzer als Δt_S und zwar um die Zeitdauer, die das Signal braucht, um eine Strecke zurückzulegen, die Beobachter S in der Zeit Δt_S zurücklegt. Um diese Strecke bewegt sich S in der Zeit Δt_S auf E zu, und um diese Strecke ist der Weg für ein Signal kürzer als beim letzten Signal. Die Strecke ist $\Delta l = v\Delta t_S$, die Zeit, die das Signal für diese Strecke benötigt, ist $\Delta T = \Delta l/c$, also folgt:

$$\Delta t_E = \Delta t_S - \frac{v}{c}\Delta t_S = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t_S. \quad (3.1)$$

Also ist die Frequenz ν_E , mit der E Signale empfängt, um den Faktor $(1 - \frac{v}{c})^{-1}$ größer als die Frequenz ν_S , mit der S die Signale abschickt:

$$\nu_E = \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \nu_S. \quad (3.2)$$

Entsprechend ist die zugehörige Wellenlänge kürzer:

$$\lambda_E = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \lambda_S. \quad (3.3)$$

Wenn sich S von E entfernt, nimmt der Abstand zwischen den beiden Beobachtern zu und das spätere Signal braucht die Zeit ΔT länger als das vorhergehende, um von S zu E zu gelangen:

$$\Delta t'_E = \Delta t_S + \frac{v}{c}\Delta t_S = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \Delta t_S. \quad (3.4)$$

3.3.2 Der longitudinale relativistische Doppler-Effekt

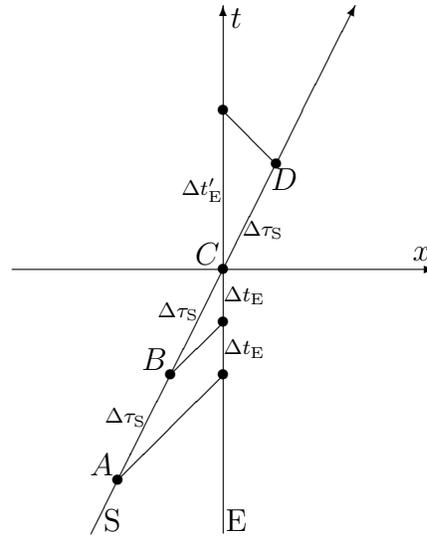
Wie zuvor emittiert ein Sender S in regelmäßigen Zeitabständen $\Delta\tau_S$ Signale (vgl. Abb. 3.4). Diese Zeitabstände $\Delta\tau_S$ beziehen sich nun auf die Eigenzeit des Beobachters. Handelt es sich z.B. dabei um Licht einer bestimmten Frequenz ν_S , so bezieht sich diese Frequenz natürlich auf die Eigenzeit in dem System des Senders. Zwei Ereignisse im zeitlichen Abstand $\Delta\tau_S$ für den Sender haben jedoch im Inertialsystem E des Empfängers eine Zeitdifferenz Δt_S , die um einen Faktor γ größer ist als die Eigenzeit (der „ruhende“ Beobachter sieht die Zeit in einem relativ zu ihm bewegten System langsamer verstreichen):

$$\Delta t_S = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta\tau_S. \quad (3.5)$$

Abgesehen von diesem Unterschied bleibt die Argumentation dieselbe: In dem System E bewegt sich der Sender im Zeitraum Δt_S um die Strecke $v\Delta t_S$ und das Lichtsignal benötigt daher bei zwei aufeinanderfolgenden Signalen für das zweite Signal die Zeit $\Delta T = (\frac{v}{c})\Delta t_S$ weniger. Insgesamt ergibt sich damit folgende Beziehung:

$$\Delta t_E = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t_S = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta\tau_S = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \Delta\tau_S. \quad (3.6)$$

Abbildung 3.4: Longitudinaler Doppler-Effekt in der relativistischen Mechanik. Die Eigenzeiten $\Delta\tau_S$ im System des Senders sind nun um einen Faktor $1/\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ kleiner als der zeitliche Abstand Δt_S derselben Ereignisse im System von Beobachter E. Man beachte, dass die Beziehung der Ereignisse identisch ist, wie im nicht-relativistischen Fall. Geändert hat sich lediglich die Beziehung zwischen der Eigenzeit $\Delta\tau$ und der entsprechenden Zeit im System des Signalempfängers.



Die Vorzeichen für v drehen sich entsprechend um, wenn sich der Sender vom Empfänger entfernt.

Bewegt sich der Sender auf den Empfänger zu und handelt es sich bei dem ausgetauschten Signal um Licht (was wir beim relativistischen Effekt angenommen haben), so erscheint das Licht für den Empfänger mit einer höheren Frequenz als für den Sender, daher spricht man auch von einer *Blauverschiebung*. Entfernt sich der Sender vom Empfänger kommt es entsprechend zu einer *Rotverschiebung*.

3.3.3 Der transversale Doppler-Effekt

In der nicht-relativistischen Mechanik gibt es keinen transversalen Doppler-Effekt, da sich der Abstand zwischen Sender und Empfänger nicht ändert und die Zeitdifferenzen für beide Beobachter gleich sind. In der relativistischen Mechanik bleibt bei einer transversalen Bewegung (d.h. der Sender bewegt sich in einem gewissen Abstand senkrecht zum Abstandsvektor) der Abstand ebenfalls konstant, es bleibt aber noch der Faktor der Zeitdilatation. Dieser bewirkt, dass es nun auch zwischen Sender (S) und Empfänger (E) eine Frequenzverschiebung des Lichts gibt:

$$\Delta\nu_S = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta\nu_S. \quad (3.7)$$

3.4 „Einparken“

Die Längenkontraktion und die Zeitdilatation geben Anlass zu einer Vielfalt an Scheinparadoxa, die mit der speziellen Relativitätstheorie assoziiert werden. In fast allen Fällen erkennt man die Ursache der scheinbaren Widersprüche, wenn man sich vor Augen hält, dass relativ zueinander bewegte Beobachter unterschiedliche Ereignismengen

als gleichzeitig empfinden.

Das folgende Beispiel bezieht sich auf die Lorentz-Kontraktion und wird in verschiedenen Varianten in der Literatur behandelt. Wir formulieren es hier als ein Problem des Einparkens.

Gegeben sei eine Garage der Länge L und ein Auto der Länge $l > L$. Offensichtlich passt das Auto nicht in die Garage, d.h., wenn die Frontstoßstange die Garagenhinterwand berührt, lässt sich das Garagentor nicht schließen. Wenn das Auto aber mit einer genügend großen Geschwindigkeit in die Garage fährt, ist seine Länge kürzer als die Länge der Garage und man sollte das Tor schließen können. Andererseits könnte man sich aber auch in das Inertialsystem des Fahrers versetzen, in dem das Auto in Ruhe ist und sich die Garage mit großer Geschwindigkeit auf das Auto zubewegt. Nun ist die Garage verkürzt, die Situation ist noch ungünstiger und das Tor sollte sich erst Recht nicht schließen lassen. Ob aber ein Garagentor geschlossen werden kann oder nicht ist eine physikalische Tatsache und kann nicht vom Inertialsystem eines Beobachters abhängen.

Was passiert im Ruhesystem der Garage, wenn das Auto mit hoher Geschwindigkeit hereinfährt? Tatsächlich ist das Auto im Augenblick der Einfahrt kürzer und passt in die Garage – das Garagentor kann geschlossen werden. Doch nun wird das Auto abgebremst und dehnt sich aus, dabei stößt es vorne und hinten gegen die Garagenwand bzw. das Garagentor und wird physikalisch gestaucht.

Wie erfährt der Autofahrer dieselbe Situation? Für ihn ist die Garage wesentlich kürzer als das Auto. Wenn er mit seiner Frontstange gegen die Garagenwand fährt, ist der hintere Teil des Wagens noch weit außerhalb der Garage. Doch wenn der Wagen bezüglich des Systems der Garage vorne und hinten gleichzeitig abgebremst wird, wird er im Ruhesystem des Autofahrers von vorne abgebremst. D.h., der Wagen fährt vorne gegen die Garagenwand und wird dadurch gestaucht, während der hintere Teil des Wagens sich weiter nach vorne bewegt und schließlich ebenfalls ganz in der Garage ist, sodass das Tor geschlossen werden kann. Erst dann erreicht die Stauchung des Wagens auch den hinteren Teil.

In beiden Fällen fährt der Wagen in die Garage und das Tor kann geschlossen werden, aber der Wagen wurde durch das Abbremsen bzw. die Garagenwände derart gestaucht, dass er nicht mehr seine ursprüngliche Länge hat.

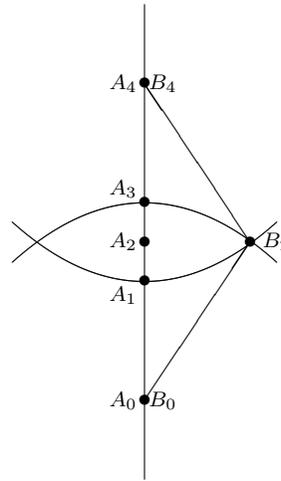
Eine wichtige Erkenntnis können wir aus diesem Beispiel festhalten: Es gibt keinen idealen starren Körper! Darunter würde man einen Körper verstehen, der jede Beeinflussung (z.B. Verschiebung) an seinem einen Ende instantan auf den gesamten Körper überträgt. Aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht kann sich auch in einem Körper kein Signal mit einer größeren Geschwindigkeit ausbreiten. Ein Stoß auf der einen Seite führt notwendigerweise zu einer Stoßwelle, die sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit durch den Körper ausbreitet und daher

jede Einwirkung an einem Ende erst verzögert überträgt.

3.5 Das Zwillingsparadoxon

Das zweite Paradoxon, das hier behandelt werden soll, ist das so genannte Zwillingsparadoxon. Gemeint ist damit das Folgende: Wenn sich zwei Zwillinge (die nach unserer Vorstellung immer dasselbe Alter haben) treffen, und einer von beiden auf der Erde verbleibt während der andere mit großer Geschwindigkeit in den Weltraum hinausfliegt und nach vielen Jahren zurückkommt, dann haben die beiden nicht mehr dasselbe biologische Alter. Der auf der Erde verbliebene Zwilling ist älter als derjenige, der durch den Weltraum gereist ist.

Abbildung 3.5: Zum Zwillingsparadoxon: Die Weltlinie von Zwilling 1 verläuft entlang der Ereignisse $A_0 = B_0$, A_1 , A_2 , A_3 , $A_4 = B_4$, die von Zwilling 2 entlang B_0 , B_2 , B_4 . Die Weltlinie von Zwilling 1 ist länger als die von Zwilling 2, d.h., Zwilling 1 ist bei der Wiedervereinigung in Ereignis $A_4 = B_4$ älter als sein Bruder. Bei B_2 hat Zwilling 2 dasselbe Alter wie Zwilling 1 bei A_1 . Insgesamt ist Zwilling 1 um die Zeitspanne zwischen A_1 und A_3 älter.



Betrachten wir dazu die Weltlinien der beiden Zwillinge. Bis Ereignis $A_0 = B_0$ haben beide dieselbe Weltlinie. Dann kommt es zur Trennung. Während Zwilling 1 seinen bisherigen Bewegungszustand beibehält (und die Ereignisse A_1 , A_2 , A_3 durchläuft), bewegt sich Zwilling 2 sehr rasch zu Ereignis B_2 , dort bremst er ab und beschleunigt in die umgekehrte Richtung, fliegt also wieder auf seinen Bruder zu. Bei $A_4 = B_4$ treffen sich die beiden Zwillinge wieder.

Die Zeitdauern lassen sich leicht berechnen: Die Zeitdauer für Zwilling 1 von A_0 bis A_1 ist genauso lang wie die für Zwilling 2 von A_0 bis B_2 . Entsprechend ist die Zeitdauer A_3A_4 dieselbe wie die von Ereignis B_2 bis B_4 für Zwilling 2. Insgesamt hat die Weltlinie von Zwilling 2 von Ereignis B_0 bis B_4 also dieselbe Länge wie die Summe der beiden Abschnitte A_0A_1 und A_3A_4 für Zwilling 1. Die Zwischenzeit – von A_1 bis A_3 – ist die Zeitdauer, um die Zwilling 1 älter ist.

Man könnte auf die Idee kommen, dass das unterschiedliche Alter der beiden Zwillinge darauf zurückzuführen ist, dass Zwilling 2 mehrfach beschleunigt wurde,

insbesondere auch bei Ereignis B_2 . Um zu verdeutlichen, dass dieses Argument nicht richtig ist, betrachten wir Abb. 3.6. Die Weltlinien der drei Drillinge (der erste bleibt in Ruhe, der zweite macht eine kurze Reise über Ereignis C_2 , der dritte macht die große Reise über B_2) sind unterschiedlich lang. Drilling 1 ist am meisten gealtert, Drilling 2 etwas weniger und Drilling 3 noch weniger. Insbesondere haben Drilling 2 und Drilling 3 dieselben Beschleunigungsphasen erlebt, sind aber trotzdem bei $A_4 = B_4$ unterschiedlich alt. Es handelt sich um einen Effekt der auf der Geometrie der Minkowski-Raumzeit beruht und nicht auf unterschiedlichen Beschleunigungsphasen.

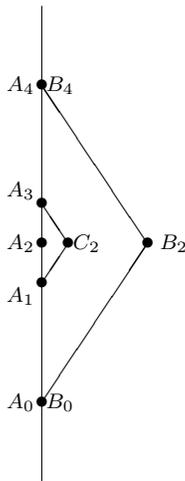


Abbildung 3.6: Erweiterung des Zwillingsparadoxons für Drillinge. Die drei Weltlinien – $(A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4)$ für Drilling 1, $(A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow C_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4)$ für Drilling 2 und $(B_0 \rightarrow B_2 \rightarrow B_4)$ für Drilling 3 – sind unterschiedlich lang. Insbesondere ist die Weltlinie von Drilling 3 kürzer als die von Drilling 2, obwohl beide dieselben Beschleunigungsphasen erlebt haben.

3.6 Die Eigenzeit

Wie wir gesehen haben, können ganz allgemein Uhren, die entlang unterschiedlicher Weltlinien transportiert wurden, unterschiedliche Zeitdauern anzeigen, selbst wenn die Weltlinien zwischen denselben Ereignissen verlaufen. Im letzten Abschnitt hat es sich um stückweise gerade Weltlinien gehandelt, bei denen wir zur Bestimmen der Zeitdauer die Anteile der einzelnen Teilstücke addiert haben. Dies können wir für stetige Weltlinien verallgemeinern.

Für zwei zeitartige Ereignisse B und A (B zeitlich nach A), mit den Differenzkoordinaten $\Delta t = t_B - t_A$ und $\Delta \vec{x} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$ in einem beliebigen Inertialsystem, definieren wir die *Eigenzeit* τ_{AB} durch

$$\tau_{AB}^2 = (\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta \vec{x})^2. \quad (3.8)$$

τ_{AB} ist die Zeitdifferenz zwischen den beiden Ereignissen, die von einer Uhr angezeigt wird, die mit konstanter Geschwindigkeit (also in einem Inertialsystem) von Ereignis A zu Ereignis B transportiert wird. In dem Inertialsystem dieser Uhr finden beide

Ereignisse im räumlichen Koordinatenursprung statt. Für zwei Ereignisse ist τ eine Invariante und es spielt keine Rolle, in welchem Inertialsystem τ nach Gl. 3.8 berechnet wird.

Handelt es sich um infinitesimal benachbarte Ereignisse, deren Raum- und Zeitkoordinaten sich in einem beliebigen Inertialsystem um $d\vec{x}$ und dt unterscheiden, erhalten wir

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (3.9)$$

als die Eigenzeit zwischen den beiden Ereignissen. Wir können nun einer beliebigen Weltlinie γ (die natürlich an jedem ihrer Punkte eine zeitartige Tangente haben muss) zwischen zwei Ereignissen A und B eine Eigenzeit zuordnen:

$$\tau(\gamma) = \int_{t_B;\gamma}^{t_A} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt. \quad (3.10)$$

Diese Zeit wird von einer Uhr angezeigt, die entlang der Weltlinie γ von A nach B transportiert wird. Wie schon erwähnt spielt es dabei keine Rolle, in welchem Inertialsystem die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ gemessen und das Integral ausgewertet wird. Die Eigenzeit zwischen zwei Ereignissen entlang eines Weges γ ist am größten, wenn es sich bei γ um eine gerade Verbindungslinie handelt. Wir werden später in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr von Geraden sprechen können, wohl aber von geodätischen Verbindungswegen. Diese zeichnen sich durch eine maximale Eigenzeit aus.

3.7 Der kanonische Formalismus

In der klassischen, Newton'schen Mechanik hat sich der Lagrange-Formalismus als sehr nützlich erwiesen. Auch in der speziellen Relativitätstheorie lassen sich eine Lagrange-Funktion und eine zugehörige Wirkung angeben, aus der nicht nur die Bewegungsgleichungen sondern auch die kanonische konjugierten Variablen folgen.

Die Wirkung ordnet jeder Trajektorie $t \mapsto \vec{x}(t)$ eine Zahl zu. Ein großer Vorteil des Lagrange-Formalismus ist, dass diese Zahl nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt. Daher soll diese Zahl auch für die relativistische Wirkung eine Invariante sein. Statt diese Invariante abzuleiten, geben wir die Lagrange-Funktion und ihre Wirkung einfach an und zeigen, dass sie im klassischen Grenzfall mit den bekannten Größen übereinstimmen, aber relativistisch invariant sind. (Durch diese beiden Forderungen sind die Größen im Allgemeinen bereits festgelegt.)

Als Lagrange-Funktion eines freien Teilchens definieren wir für ein beliebiges

Inertialsystem mit Koordinaten (t, \vec{x}) (und der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}, \quad (3.11)$$

und die zugehörige Wirkung ist

$$S = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} dt. \quad (3.12)$$

Ausgedrückt durch die Eigenzeit entlang einer Bahnkurve ergibt sich für die Wirkung:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau. \quad (3.13)$$

Zu integrieren ist jeweils entlang der Bahnkurve. Aus der letzteren Darstellung wird die Invarianz der Wirkung offensichtlich.

Entwickeln wir in einem festen Inertialsystem die Quadratwurzel, so erhalten wir für die Lagrange-Funktion in führender Ordnung:

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2} + \dots \right) \approx -mc^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}(t)^2, \quad (3.14)$$

also bis auf den konstanten Term $-mc^2$ (der, wie wir gleich sehen werden, der Ruheenergie eines Teilchens entspricht) die klassische Wirkung.

Die zu \vec{x} kanonisch konjugierte Variable \vec{p} ist definiert als

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial v_i(t)} = \frac{mv_i(t)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}(t) = \frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}. \quad (3.15)$$

Entsprechend ist die Energie (die eine Erhaltungsgröße ist, da L nicht explizit von der Zeit abhängt) definiert als:

$$E = \vec{v} \cdot \vec{p} - L(\vec{v}), \quad (3.16)$$

woraus wir erhalten:

$$E = \frac{m\vec{v}(t)^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}. \quad (3.17)$$

In einem kanonischen Formalismus sollte die Energie allerdings als Funktion von Ort und kanonisch konjugiertem Impuls aufgefasst werden. Wir lösen daher Gl. 3.15 nach \vec{v}^2 auf und erhalten schließlich:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}. \quad (3.18)$$

3.8 Die Äquivalenz von Masse und Energie

Eine weitere Folgerung aus der speziellen Relativitätstheorie ist nicht nur besonders bekannt geworden sondern auch von fundamentaler Bedeutung, nämlich die Äquivalenz von Masse und Energie.

Allgemein schreibt man die Formel

$$E = mc^2 \quad (3.19)$$

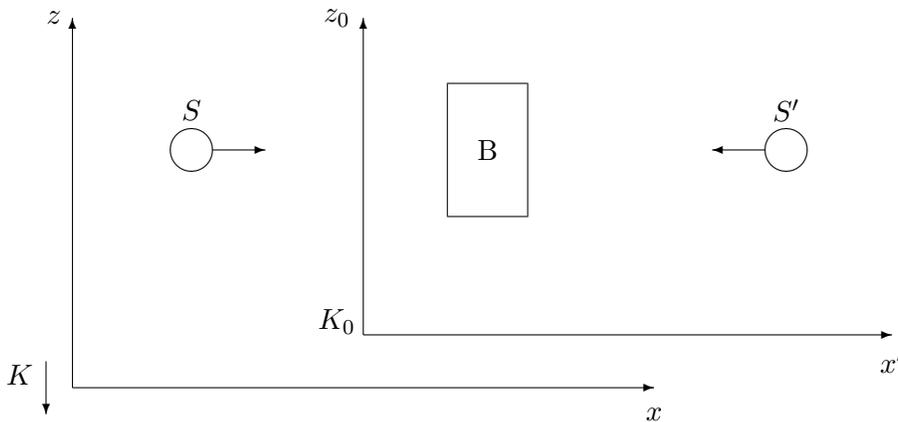
Einstein zu, der sie 1905 in der Arbeit *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* ([8]) für den Sonderfall eines strahlenden Körpers hergeleitet und ihre allgemeine Richtigkeit vermutet hatte. Abgesehen davon, daß die Herleitung dieser Formel als falsch gilt (siehe [31]; Farbtafel XXIV, Zitat aus Jammer), findet man Überlegungen über eine Trägheit von Energie auch schon bei Poincaré 1900.

Die folgende „Elementare Ableitung der Äquivalenz von Masse und Energie“ stammt ebenfalls von Einstein aus dem Jahre 1946, und ist in seinem Buch *Aus meinen späten Jahren* ([9], S. 121) entnommen.

Die vorstehende Ableitung des Äquivalenzgesetzes, die bisher nicht publiziert ist, hat zwei Vorteile. Sie bedient sich zwar des speziellen Relativitätsprinzips, setzt aber die technisch-formalen Hilfsmittel der Theorie nicht voraus, sondern bedient sich nur dreier vorbekannter Gesetzmäßigkeiten:

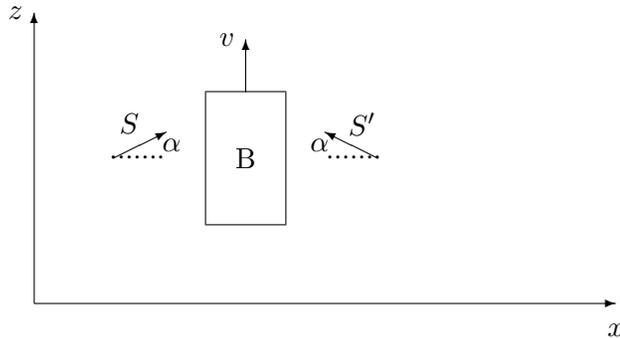
1. des Satzes von der Erhaltung des Impulses,
2. des Ausdrucks für den Strahlungsdruck beziehungsweise für den Impuls eines in bestimmter Richtung sich ausbreitenden Strahlungs-Komplexes,
3. der wohlbekannte Ausdruck für die Aberration des Lichts (Einfluß der Bewegung der Erde auf den scheinbaren Ort der Fixsterne (Bradley)).

Wir fassen nun folgendes System ins Auge. Bezüglich eines Koordinatensystems K_0 anhand



schwebe der Körper B frei im Raum. Zwei Strahlungskomplexe S, S', je von der Energie $\frac{E}{2}$ breiten sich längs der positiven bzw. negativen x_0 -Richtung aus und werden dann von B absorbiert. Bei der Absorption wächst die Energie von B um E . Der Körper B bleibt bei diesem Prozess aus Symmetrie-Gründen in Ruhe.

Nun betrachten wir diesen selben Prozess von einem System K aus, welches sich gegenüber K_0 mit der konstanten Geschwindigkeit v in der negativen z_0 -Richtung bewegt. In bezug auf K ist dann die Beschreibung des Vorganges folgende



Der Körper B bewegt sich in der positiven z -Richtung mit der Geschwindigkeit v . Die beiden Lichtkomplexe haben in bezug auf K eine Fortpflanzungsrichtung, welche einen Winkel α mit der x -Achse bildet. Das Aberrationsgesetz besagt, dass in erster Näherung $\alpha = \frac{v}{c}$ ist, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Aus der Betrachtung in bezug auf K_0 wissen wir, dass die Geschwindigkeit v von B durch die Absorption von S und S' keine Änderung erfährt.

Nun wenden wir auf den Prozess in bezug auf K das Gesetz von der Erhaltung des Impulses in bezug auf die Richtung z des betrachteten Gesamtsystems an.

I. *Vor der Absorption* sei M die Masse von B ; Mv ist dann der Ausdruck des Impulses von B (gemäß der klassischen Mechanik). Jeder der Strahlungskomplexe hat die Energie $\frac{E}{2}$ und deshalb gemäß einer wohlbekanntten Folgerung aus Maxwells Theorie den Impuls

$$\frac{E}{2c}.$$

Dies ist streng genommen zunächst der Impuls von S in bezug auf K_0 . Wenn aber v klein ist gegen c , so muss der Impuls in bezug auf K bis auf die Größe von zweiter Ordnung $\frac{v^2}{c^2}$ gegen 1) dieselbe sein. Von diesem Impuls fällt in die z -Richtung die Komponente $\frac{E}{2c} \sin \alpha$, sind aber genügend genau (bis auf Größen höherer Ordnung) $\frac{E}{2c} \alpha$ oder $\frac{E}{2} \cdot \frac{v}{c^2}$. S und S' zusammen haben also in der z -Richtung den Impuls $E \frac{v}{c^2}$. Der Gesamtimpuls des Systems vor der Absorption ist also

$$Mv + \frac{E}{c^2} v.$$

II. *Nach der Absorption* sei M' die Masse von B . Wir antizipieren hier die Möglichkeit, dass die Masse bei der Aufnahme der Energie E eine Zunahme erfahren könnte (dies ist nötig, damit das Endresultat unserer Überlegungen widerspruchsfrei sei). Der Impuls des Systems

nach der Absorption ist dann

$$M'v .$$

Nun setzen wir den Satz von der Erhaltung des Impulses als richtig voraus und wenden ihn in bezug auf die z -Richtung an. Dies ergibt die Gleichung

$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v$$

oder

$$M' - M = \frac{E}{c^2} .$$

Diese Gleichung drückt den Satz der Äquivalenz von Energie und Masse aus. Der Energiezuwachs E ist mit dem Massenzuwachs $\frac{E}{c^2}$ verbunden. Da die Energie ihrer üblichen Definition gemäß eine additive Konstante freilässt, so können wir nach der Wahl der letzteren stattdessen auch kürzer schreiben

$$E = Mc^2 .$$

Kapitel 4

SRT – Beschleunigte Systeme

Das Äquivalenzprinzip besagt im Wesentlichen, dass wir in einem lokalen Bezugssystem nicht zwischen einer konstanten Beschleunigung und einem konstanten Gravitationsfeld unterscheiden können. Wir werden dieses Prinzip in den nächsten Kapiteln ausgiebig nutzen, um den Einfluss von Gravitationsfeldern zu untersuchen und damit ersten Schritte zur Allgemeinen Relativitätstheorie zu gehen.

In diesem Kapitel geht es konkret um einen konstant beschleunigten Beobachter in der speziellen Relativitätstheorie. Viele der Effekte lassen sich dann über das Äquivalenzprinzip auf die allgemeine Relativitätstheorie übertragen.

4.1 Die konstante Beschleunigung

Schon allein die Frage, was genau unter einer konstanten Beschleunigung zu verstehen ist, bedarf in der speziellen Relativitätstheorie einer eingehenderen Analyse. Wir können an einem ausgedehnten Körper nicht einfach eine Kraft angreifen lassen, da kein Körper wirklich starr ist (dies würde, wie wir in Abschnitt 3.4 gesehen haben, der speziellen Relativitätstheorie widersprechen) und sich die Wirkung jeder angreifenden Kraft erst über eine Stoßwelle auf den Körper ausdehnt. Der Einfachheit halber betrachten wir daher zunächst nur einen idealisierten Massepunkt, der konstant beschleunigt werden soll. Doch auch hier ist das Konzept einer konstanten Beschleunigung nicht trivial.

Einerseits befindet sich der beschleunigte Gegenstand zu jedem Zeitpunkt in einem anderen Inertialsystem, andererseits hängt die naheliegende Antwort – eine konstante Beschleunigung bedeutet einen pro Zeiteinheit konstanten Geschwindigkeitszuwachs – vom Bezugssystem ab. Eine invariante Definition des Konzepts einer konstanten Beschleunigung, die wir auch in diesem Kapitel verwenden werden, ist folgende: *Im jeweiligen momentanen Inertialsystem des beschleunigten Massepunktes ist die Beschleunigung konstant.* Damit ist gemeint, dass es in jedem Augenblick ein

Inertialsystem gibt, das dieselbe Geschwindigkeit wie der beschleunigte Beobachter hat (natürlich ändert sich dieses Inertialsystem ständig). Von diesem „momentanen Inertialsystem“ aus betrachtet, erfährt der beschleunigte Beobachter eine konstante Beschleunigung.

In diesem Abschnitt betrachten die Bewegung eines konstant beschleunigten Massepunktes von einem Inertialsystem aus, in dem der Massepunkt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ruht. Zunächst leiten wir die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit – gemessen in diesem Inertialsystem – her, anschließend lösen wir diese Gleichung und bestimmen die Bahnkurve $x(t)$ für diesen Massepunkt.

4.1.1 Herleitung der Differentialgleichung für die Geschwindigkeit

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit im Inertialsystem des zu Beginn ruhenden Teilchens lautet:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2} \right)^{3/2}. \quad (4.1)$$

Diese Gleichung werden wir im nächsten Abschnitt lösen, doch zunächst wollen wir sie auf zwei verschiedene Weisen ableiten.

In dem Ruhesystem des Massepunktes zu einem bestimmten Zeitpunkt (t im Inertialsystem des anfänglichen Ruhezustands, τ im Bezugssystem des beschleunigten Massepunktes) soll eine Kraft wirken, die ihn in der infinitesimalen Eigenzeit $d\tau$ immer auf dieselbe infinitesimale Geschwindigkeit dv beschleunigt:

$$dv = g d\tau, \quad (4.2)$$

wobei g ein Maß für die konstante Beschleunigung ist.

Im anfänglichen Ruhesystem, d.h. bezüglich der Zeit t , nimmt die Geschwindigkeit also zu einem Zeitpunkt t um

$$dv = g \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (4.3)$$

zu.

Hat für den ruhenden Beobachter das beschleunigte System zum Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t)$, so hat es zum Zeitpunkt $t + dt$ nach dem Geschwindigkeitsadditionstheorem (vgl. Gl. 1.21) die Geschwindigkeit:

$$v(t + dt) = \frac{v(t) + dv}{1 + \frac{v(t)dv}{c^2}} \approx v(t) + \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2} \right) dv + \dots \quad (4.4)$$

$$= v(t) + g \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2} \right)^{3/2} dt + \dots \quad (4.5)$$

Daraus erhalten wir unmittelbar Gl. 4.1.

Die zweite Herleitung der Differentialgleichung geht von der allgemeinen Beziehung für das Transformationsgesetz der Beschleunigung zwischen zwei Bezugssystemen aus. Wenn die Beschleunigung in dieselbe Richtung wie die Transformation erfolgt, gilt:

$$a' = \gamma^3 a. \quad (4.6)$$

Mit $a' = g$ und $a = \frac{dv}{dt}$ folgt obige Differentialgleichung.

4.1.2 Bestimmung der Bahnkurve

Wir können die Differentialgleichung 4.1 beispielsweise durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = g dt. \quad (4.7)$$

Da

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (4.8)$$

und wir für $t_0 = 0$ die Anfangsbedingung $v = 0$ gesetzt haben, erhalten wir

$$\frac{v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = gt. \quad (4.9)$$

Diese Gleichung können wir nach $v(t)$ auflösen und finden:

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}}}. \quad (4.10)$$

Für $t \ll c/g$ nimmt $v(t)$ offensichtlich linear mit t zu, wie es in der nicht-relativistischen Mechanik für die konstante Beschleunigung gelten muss, für $t \gg c/g$ nähert sich $v(t)$ der Lichtgeschwindigkeit c als der Grenzggeschwindigkeit.¹

Wir können diese Gleichung nochmals integrieren und erhalten die Trajektorie $x(t)$:

$$x(t) = \int_0^t \frac{gt'}{\sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}}} dt' = \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}} \Big|_0^t \quad (4.11)$$

$$= \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (4.12)$$

¹Für die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ entspricht die Zeitskala $c/g \approx 354$ Tage bzw. fast einem Jahr. Ab dieser zeitlichen Größenordnung lohnt sich eine Weltraumreise mit konstanter Beschleunigung.

Im nächsten Abschnitt werden wir die Lösungen für $v(t)$ und $x(t)$ etwas genauer untersuchen. Zum Abschluss dieses Abschnitts möchte ich noch eine kurze Anmerkung zu der relativistischen Bewegungsgleichung machen:

Multiplizieren wir Gleichung 4.9 auf beiden Seiten mit der Konstanten m (der Ruhemasse des Teilchens) und bilden die Ableitung nach t , so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} \right) = mg, \quad (4.13)$$

was wir mit dem relativistischen Impuls

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.14)$$

auch in der Form

$$\frac{dp}{dt} = mg = F \quad (4.15)$$

schreiben können. Dies ist die relativistische Bewegungsgleichung (auch für eine allgemeine Kraft F) und aus ihr hätten wir die Bewegungsgleichung für die konstante Beschleunigung durch Umkehrung der obigen Schritte sofort ableiten können. Es mag allerdings zunächst überraschen, dass auf der linken Seite der Gleichung die Ableitung nach t und nicht nach der Eigenzeit τ im beschleunigten System steht. Es sieht daher zunächst so aus, als ob diese Gleichung nicht invariant sei. Doch die relativistische Kraft ist eigentlich nicht F sondern γF und die invariante Gleichung lautet

$$\frac{dp}{d\tau} = \gamma F. \quad (4.16)$$

Da

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dp}{dt} \gamma, \quad (4.17)$$

hebt sich der γ -Faktor auf beiden Seiten weg.

4.1.3 Erste Analyse der konstant beschleunigten Bewegung

Wir untersuchen zunächst die Trajektorie aus der Sichtweise des ruhenden Beobachters (im Ruhesystem der Ausgangslage des beschleunigten Systems). Anschließend betrachten wir die Situation aus der Sichtweise eines Beobachters in dem konstant beschleunigten System (beispielsweise einer konstant beschleunigten Rakete).

Die Trajektorie der konstanten relativistischen Beschleunigung im Inertialsystem der anfänglichen Ruhelage beschreibt einen Hyperbelast (siehe Abb. 4.1). Dies sieht man leicht, wenn man Gl. 4.12 in folgende Form bringt:

$$\left(x(t) + \frac{c^2}{g} \right)^2 - \frac{(gt)^2}{c^2} = 1. \quad (4.18)$$

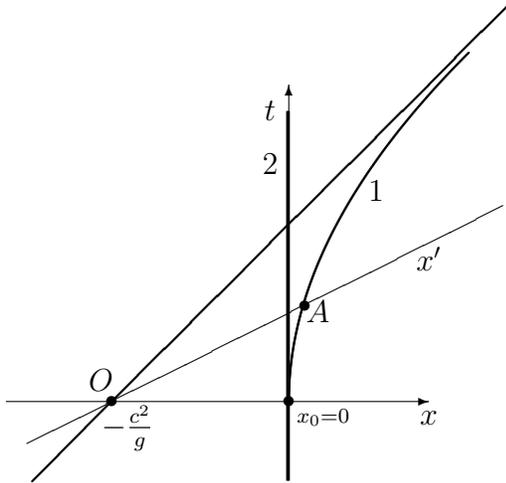


Abbildung 4.1: Die konstante Beschleunigung. Die Trajektorie eines konstant beschleunigten Massepunktes (1) beschreibt im Inertialsystem eines ruhenden Beobachters (2) eine Hyperbel. Bei dem Ereignis O mit den Koordinaten $x = -\frac{c^2}{g}$ und $t_0 = 0$ schneiden sich alle Gleichzeitigkeitlinien der Trajektorie einschließlich der Weltlinie des Lichtstrahls, dem sich die Trajektorie asymptotisch nähert.

Für kleine Werte von t (genauer $t \ll \frac{c}{g}$) beschreibt die Trajektorie die zu erwartende Parabel der Newton'schen Mechanik. Dazu entwickeln wir die Lösung nach kleinen Werten von $(tg)/c$:

$$x(t) \approx \frac{c^2}{g} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{g^2 t^2}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{g^4 t^4}{c^4} + \dots - 1 \right) = \frac{1}{2} g t^2 + \dots \quad (4.19)$$

Für sehr große Werte von t nähert sich die Trajektorie immer mehr dem Lichtstrahl $x(t) = ct$. Dieses Verhalten zeigt sich auch in der Geschwindigkeit (Gl. 4.10), die für kleine Werte von t linear zunimmt, $v(t) \approx gt + \dots$, und sich für große Werte von t der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Interessant ist, dass sich alle Gleichzeitigkeitlinien zu der Trajektorie in einem Ereignis O bei $t = 0$ und $x = -\frac{c^2}{g}$ schneiden (in Abb. 4.1 ist die Gleichzeitigkeitlinie zum Ereignis A angegeben). Dies ist gleichzeitig das Ereignis, bei dem ein ausgesandter Lichtstrahl die Asymptote der Hyperbel bildet. Der Abstand, gemessen in einem augenblicklichen Inertialsystem, zwischen einem Punkt auf der Hyperbelbahn (z.B. dem Ereignis A) und diesem Ereignis O bleibt konstant.

Wir betrachten nun dieselbe Situation, allerdings aus der Sichtweise eines Beobachters in dem konstant beschleunigten System (man denke beispielsweise an eine Rakete, die konstant beschleunigt wird). Zunächst müssen wir die Zeit t in die Eigenzeit τ des beschleunigten Beobachters umrechnen. Dazu verwenden wir die allgemeine Beziehung

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (4.20)$$

und nutzen nun aus, dass

$$\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}}} \quad (4.21)$$

Diese Beziehung folgt unmittelbar aus den beiden Gleichungen 4.9 und 4.10. Wir erhalten somit

$$\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}}} dt' = \frac{c}{g} \sinh^{-1} \frac{gt}{c} \quad (4.22)$$

oder, aufgelöst nach t :

$$t = \frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c} . \quad (4.23)$$

Zwischen der verstrichenen Zeit t eines Beobachters im anfänglichen Ruhesystem (beispielsweise auf der Erde) und der Zeit τ für einen Beobachter in dem konstant beschleunigten System besteht also für große Zeiten eine exponentielle Beziehung. Für die (relativ zum Bezugssystem der Erde) zurückgelegte Strecke als Funktion der Eigenzeit einer Person in dem beschleunigten System erhalten wir

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left(\cosh \frac{g\tau}{c} - 1 \right) . \quad (4.24)$$

Diese Beziehung scheint zunächst den Möglichkeiten eines bemannten Raumflugs sehr entgegen zu kommen: Für die Reise zum rund 2 Millionen Lichtjahre entfernten Andromeda-Nebel (der nächsten großen Galaxie außerhalb der Milchstraße) würden bei einer konstanten Beschleunigung von $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (der Erdbeschleunigung) für einen Astronauten in seinem Bezugssystem nur rund 28 Jahre vergehen.²

Dies widerspricht nicht der Relativitätstheorie: Die 2 Millionen Lichtjahre erfahren für den Beobachter in der Rakete eine (Lorentz-)Kontraktion auf weniger als 28 Lichtjahre. Das bedeutet aber, dieser Beobachter „sieht“ den Andromeda-Nebel mit Überlichtgeschwindigkeit auf sich zukommen.

Einen ähnlich erstaunlichen Effekt sieht der Beobachter auch, wenn er zurückblickt. Das Ereignis O bei $(t = 0, x = -\frac{c^2}{g})$ bleibt für immer auf seiner Gleichzeitigkeitslinie. Es wird zu einem Augenblick, der nie vergeht. Auch der Abstand zwischen ihm und diesem Ereignis bleibt in seinem Bezugssystem immer konstant. Allerdings sollte ich nochmals betonen, dass sich diese Effekte auf ein augenblickliches globales Inertialsystem beziehen, und dies lässt sich für einen beschleunigten Beobachter nicht operational realisieren.

In Abschnitt 4.3 kommen wir nochmals auf den konstant beschleunigten Beobachter zu sprechen und beschreiben dort, was der Beobachter wirklich „sieht“.

²Auf der Internetseite von John Baez „The Relativistic Rocket“ math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/rocket.html findet man eine sehr schöne Beschreibung der seltsamen Effekte einer konstant beschleunigten relativistischen Rakete.

4.2 Zwei konstant beschleunigte Systeme

Die bekannte Schriftensammlung „Speakable and unspeakable in quantum mechanics“ von John Bell ([4], Kapitel 9) enthält auch einen Artikel, der nichts mit Quantentheorie zu tun hat. Er trägt den Titel „How to teach special relativity“, und hier plädiert Bell dafür, Studierende der Physik auch mit der „alten“ Version der speziellen Relativitätstheorie vertraut zu machen, wie sie von Larmor, Lorentz und Poincaré vertreten wurde und wie ich sie in Kapitel 2 angedeutet habe. Er beschreibt dort eine einfache Situation aus der speziellen Relativitätstheorie, die seiner Ansicht nach in der „alten“ Sichtweise leichter nachvollzogen werden kann als in der Form, in der die Relativitätstheorie heute meist gelehrt wird.

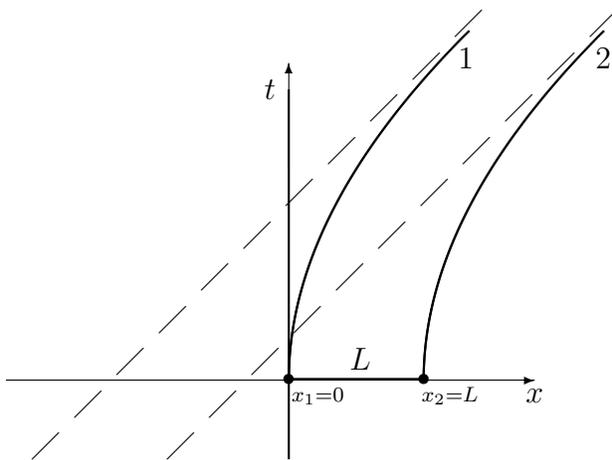


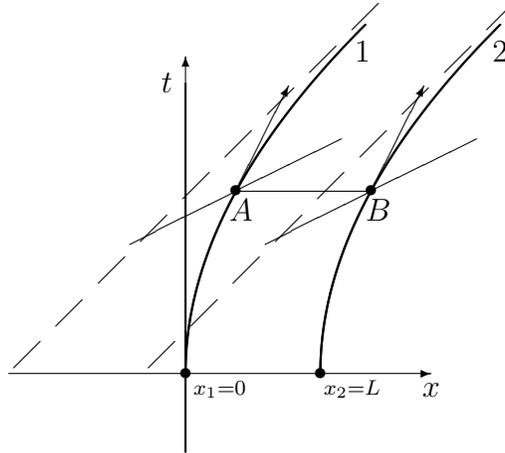
Abbildung 4.2: Zwei Raketen (1 und 2) erfahren dieselbe konstante Beschleunigung. Sie seien durch ein Seil miteinander verbunden, dessen Länge gerade dem anfänglichen Abstand L der Raketen entspricht. Wird das Seil reißen oder nicht?

Zwei gleichartige Raketen befinden sich zunächst in Ruhe und haben einen Abstand L (in diesem Ruhesystem haben sie die Koordinaten $x_1 = 0$ und $x_2 = L$). Sie seien durch ein Seil der Länge L miteinander verbunden. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ erfahren beide Raketen dieselbe konstante Beschleunigung g in Richtung ihres Abstandsvektors (also die x -Richtung). Ihre Weltlinien sind somit Hyperbeln, deren Abstand im anfänglichen Ruhesystem (mit den Koordinaten (t, x)) konstant bleibt (vgl. Abb. 4.2).

Bell stellt nun die Frage, ob das Seil zwischen den beiden Raketen irgendwann reißt. Ein solches Ereignis ist eine physikalische Tatsache und hängt daher nicht vom Bezugssystem ab. Anscheinend hat er diese Frage in den 70er Jahren mehreren Physikern am CERN gestellt und sehr unterschiedliche Antworten erhalten (viele scheinen behauptet zu haben, das Seil reiße nicht). Tatsächlich reißt das Seil. Wir betrachten nun diese Situation aus allen drei Bezugssystemen – dem Inertialsystem, in dem die Raketen anfänglich in Ruhe sind, sowie den beiden Bezugssystemen der Raketen.

Wir beginnen unsere Betrachtungen im ruhenden Inertialsystem mit den Ko-

Abbildung 4.3: Die beiden Ereignisse A und B sind im ruhenden Inertialsystem gleichzeitig. Auch die Eigenzeiten der beiden Raketen sind bei diesen Ereignissen gleich. Der räumliche Abstand der Ereignisse ist L .



ordinaten (t, x) . Zwei in diesem System gleichzeitige Positionen der Raketen (z.B. A und B) haben immer noch den räumlichen Abstand L (vgl. Abb. 4.3). Trotzdem bewegt sich das Seil mit einer bestimmten Geschwindigkeit relativ zu dem Ruhesystem (angedeutet durch die Vektorpfeile in Abb. 4.3). Damit sind die Ereignisse A und B für das Seil auch nicht gleichzeitig (auch die Gleichzeitigkeitslinien zu den beiden Ereignissen sind in der Abbildung angedeutet). Da sich das Seil bewegt, kommt es zu einer Lorentz-Kontraktion und das Seil wird reißen.

Bell bemerkt, dass damals viele Physiker in der Lorentz-Kontraktion nur eine scheinbare Verkürzung von Abständen sahen, weil man eine Länge aus verschiedenen Systemen mit unterschiedlichen Gleichzeitigkeitsvorstellungen ausmisst. Doch das Reißen des Seils ist eine Tatsache, kein „Scheineffekt“. Hier, so argumentiert er, gibt die Lorentz’sche Vorstellung einer tatsächlichen Verkürzung ein besseres Bild: Die Reichweite der elektromagnetischen Kräfte, die das Seil zusammenhalten, wird (ähnlich wie die Solitonen bei unserer linearen, gekoppelten Kette) kürzer, doch die Atome müssen, da sie zwischen den Raketen eingespannt sind, ihren Abstand behalten. Irgendwann wird die Reichweite der Kräfte so klein, dass die Atome nicht mehr zusammengehalten werden können und das Seil reißt.

Wir betrachten nun die Situation aus dem Bezugssystem von Rakete 1, also der hinteren Rakete bezüglich der Beschleunigungsrichtung (Abb. 4.4 (links)). Zu einem beliebigen Ereignis A auf der Weltlinie dieser Rakete kann der Beobachter in der Rakete seine augenblickliche Gleichzeitigkeitslinie konstruieren (das sind alle Ereignisse zu Vektoren, die bezüglich der Minkowski-Metrik senkrecht auf dem augenblicklichen 4-Vektor der Geschwindigkeit bzw. der augenblicklichen Tangente an die Weltlinie stehen). Danach ist Ereignis B auf der Weltlinie von Rakete 2 gleichzeitig zu Ereignis A (für Rakete 1). Doch bei B bewegt sich Rakete 2 bereits wesentlich schneller als Rakete 1 bei A . Das bedeutet, für Rakete 1 nimmt der Abstand zu Rakete 2 ständig zu. Somit wird das Seil auch irgendwann reißen.

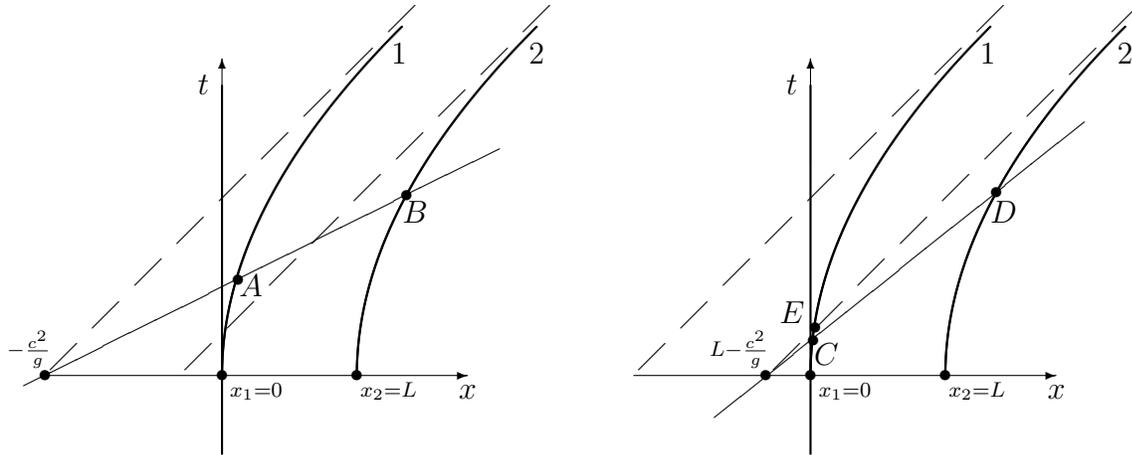


Abbildung 4.4: Die Gleichzeitigkeitslinien für die beiden Raketen. (Links) Ereignis A befindet sich auf der Weltlinie von Rakete 1. In dem augenblicklichen Inertialsystem ist Ereignis B auf der Weltline von Rakete 2 gleichzeitig zu A . Doch bei B hat Rakete 2 bereits eine größere Geschwindigkeit als Rakete 1 bei Ereignis A , sodass der Abstand von Rakete 2 aus Sicht von Rakete 1 zunimmt. (Rechts) D ist ein Ereignis auf der Weltlinie von Rakete 2 und in dem augenblicklichen Inertialsystem ist Ereignis C auf der Weltlinie von Rakete 1 gleichzeitig zu D . Doch nicht nur ist die Geschwindigkeit von Rakete 1 bei C sehr viel langsamer als die von Rakete 2 bei D , sodass der Abstand zwischen den beiden Raketen aus der Sicht von Rakete 2 zunimmt, sondern Rakete 2 sieht Rakete 1 auch nie zu dem Ereignis E gelangen. Für Rakete 2 endet die Weltlinie von Rakete 1 an diesem Punkt.

Abschließend betrachten wir dieselbe Situation noch aus dem Bezugssystem von Rakete 2 (Abb. 4.4 (rechts)). D sei ein beliebiges Ereignis auf dieser Weltlinie, und ähnlich wie zuvor konstruiert der Beobachter in dieser Rakete die Gleichzeitigkeitslinie zu diesem Ereignis. Er findet, dass in diesem augenblicklichen Inertialsystem Ereignis C auf der Weltlinie von Rakete 1 gleichzeitig zu D ist. Doch bei C bewegt sich Rakete 1 wesentlich langsamer als Rakete 2 bei D , daher nimmt auch in seinem Bezugssystem der Abstand zu Rakete 1 zu und das Seil wird reißen.

Wir beobachten hier aber noch etwas Weiteres: Alle Gleichzeitigkeitslinien zur Weltlinie von Rakete 2 liegen (bei x -Koordinaten größer als $L - \frac{c^2}{g}$) unterhalb des Lichtstrahls, der zur Asymptote der Bahnkurve von 2 wird. Das bedeutet, für Rakete 2 wird Rakete 1 niemals weiter als bis zu dem Ereignis E auf diesem Lichtstrahl gelangen, Rakete 1 wird dieses Ereignis *aus der Sichtweise von Rakete 2* noch nicht einmal erreichen.

Im nächsten Abschnitt gehen wir auf diesen letztgenannten Punkt nochmals ein. Jedenfalls sind sich alle drei Beobachter darin einig, dass das Seil nach den physi-

kalischen Gesetzen in ihrem Bezugssystem reißen muss. Man sollte aber in jedem Fall berücksichtigen, dass die Konstruktion einer „augenblicklichen Gleichzeitigkeitsfläche“ bei beschleunigten Weltlinien rein mathematische ist und sich physikalisch nicht realisieren lässt. Bei einem „ewigen“ Inertialsystem ist eine solche Konstruktion zumindest im Prinzip operational möglich.

4.3 Das Rindler-Universum

Wir haben gesehen, wie sich im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie bereits einige sehr interessante Effekte in der Physik eines konstant beschleunigten Beobachters untersuchen lassen. Dabei haben wir allerdings von globalen Gleichzeitigkeitslinien Gebrauch gemacht, die für einen Beobachter entlang einer Weltlinie nicht unbedingt von Relevanz sind. Beispielsweise kann bei beschleunigten Systemen die Folge solcher Gleichzeitigkeitslinien, selbst wenn sie entlang der Weltlinie in kausaler Reihenfolge konstruiert werden, Ereignisse in großem Abstand (hier definiert $d = \frac{c^2}{g}$ die Skala) in kausal rückläufiger Reihenfolge überstreichen (man betrachte beispielsweise Ereignisse, die in Abb. 4.1 links von Ereignis O liegen). Aus diesem Grunde verwendet man auch in der allgemeinen Relativitätstheorie solche globalen Gleichzeitigkeitslinien – in $2 + 1$ Raumzeit-Dimensionen sind es natürlich Flächen und in $3 + 1$ Raumzeit-Dimensionen Volumina – nur selten.

In diesem Abschnitt soll nochmals der konstant beschleunigte Beobachter betrachtet werden, allerdings mit den Methoden, die wir später bei verallgemeinerten Geometrien in der allgemeinen Relativitätstheorie verwenden werden: (1) durch Angabe der kausalen Beziehungen und (2) durch die Untersuchung von Signalen, die zwischen Beobachtern auf verschiedenen Weltlinien ausgetauscht werden können. Die Raumzeit eines solchen konstant beschleunigten Beobachters bezeichnet man auch als Rindler-Universum. Aufgrund des Äquivalenzprinzips lassen sich viele der beobachteten Effekte qualitativ (und in manchen Einzelheiten sogar quantitativ) auf einen Beobachter in der Nähe eines schwarzen Loches übertragen. Von besonderer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang das Konzept eines „Horizonts“.

4.3.1 Kausale Beziehungen

Wie wir in Abschnitt 4.1.2 gezeigt haben, lässt sich im Raumzeit-Diagramm eines inertialen Beobachters B die Weltlinie eines konstant beschleunigten Beobachters A als Hyperbel darstellen. In diesem Abschnitt betrachten wir sogar eine Weltlinie zu einem System, das seit „ewigen Zeiten“ einer konstanten Beschleunigung unterlag und auch für ewige Zeiten dieser Beschleunigung unterliegen wird (vgl. Abb. 4.5). Das System kommt also aus dem Unendlichen auf den inertialen Beobachter B zu und

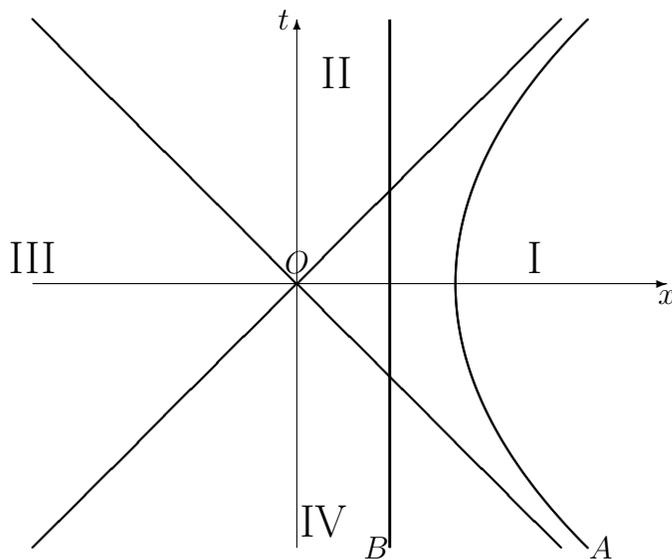


Abbildung 4.5: Rindler-Universum. Dargestellt sind die Weltlinien eines konstant beschleunigten Beobachters A und eines inertialen Beobachters B . Die Hyperbelbahn von Beobachter A definiert die angegebenen Lichtstrahlen sowie das Ereignis O . Die Quadranten I–IV stehen jeweils in einer besonderen kausalen Beziehung zu Beobachter A .

wird dabei konstant abgebremst bis es schließlich für einen Augenblick relativ zu dem inertialen Beobachter in Ruhe ist und sich nun mit derselben Beschleunigung wieder von dem inertialen Beobachter entfernt.

Der Minkowski-Raum des inertialen Beobachters B lässt sich durch die kausale Relationen der Ereignisse zu dem beschleunigten Beobachter A in vier Klassen einteilen:

- I Dieser Bereich enthält alle Ereignisse, die irgendwann einmal in der kausalen Zukunft des Beobachters A lagen und gleichzeitig irgendwann einmal in der kausalen Vergangenheit von A sein werden. Jedes der Ereignisse konnte von A einmal beeinflusst werden und kann umgekehrt einmal einen Einfluss auf A haben. Dieser Bereich entspricht also im üblichen Sinne der kausalen Raumzeit für Beobachter A .
- II Dieser Bereich enthält alle Ereignisse, die in der kausalen Zukunft von Ereignissen auf der Weltlinie von A liegen, aber nicht in der kausalen Vergangenheit irgendeines Ereignisses auf der Weltlinie von A . Der Beobachter A kann diesen Bereich also nicht „einsehen“ bzw. er kann von den Ereignissen in diesem Bereich nie kausal beeinflusst werden, er kann aber umgekehrt die Ereignisse in diesem Bereich kausal beeinflussen.
- III Die Ereignisse in diesem Bereich haben keinen kausalen Zusammenhang – weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit – zu irgendeinem Ereignis auf der Weltlinie von Beobachter A .

IV Alle Ereignisse in diesem Bereich liegen irgendwann einmal in der kausalen Vergangenheit von A , waren aber niemals in seiner kausalen Zukunft. A kann von diesen Ereignissen also kausal beeinflusst werden, hat aber umgekehrt keinen Einfluss auf sie.

Hinsichtlich der Kausalbeziehungen ist für den beschleunigten Beobachter A die Ereignismenge in Bereich I so, wie für einen inertialen Beobachter die Ereignismenge der Minkowski-Raum-Zeit: Zu jedem Ereignis gibt es auf seiner Weltlinie einen Zeitpunkt in der Vergangenheit, *vor* dem dieses Ereignis in seiner kausalen Zukunft lag, es kann also durch diesen Beobachter beeinflusst werden. Ebenso gibt es zu jedem Ereignis einen Zeitpunkt, *ab* dem der Beobachter in der kausalen Zukunft des Ereignisses liegt, d.h. dieses Ereignis wahrnehmen bzw. von ihm Kenntnis erlangen kann.

Alle anderen Bereiche haben für einen inertialen Beobachter in einer Minkowski-Raum-Zeit kein Gegenstück. Die Ereignisse in den Bereichen III und IV liegen beispielsweise niemals in der kausalen Zukunft von A . Der beschleunigte Beobachter hat somit auch keine Möglichkeit, diese Ereignisse jemals zu beeinflussen. Allerdings kann er die Ereignisse aus Bereich IV wahrnehmen bzw. kausal von ihnen beeinflusst werden, da er sich irgendwann in der kausalen Zukunft von diesen Ereignissen befinden wird. Der Bereich III gehört zu einem Teil des Universums, der mit A überhaupt keine kausale Verbindung hat, weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit. In gewisser Hinsicht existiert dieser Bereich für den beschleunigten Beobachter A gar nicht.

4.3.2 Was „sehen“ die Beobachter voneinander?

Wir überlegen uns zunächst, was der inertielle Beobachter B von dem beschleunigten Beobachter A „sieht“. In Abbildung 4.6 sind beide Weltlinien dargestellt, zusätzlich sind in gleichmäßigen Eigenzeitabständen von A Ereignisse markiert, bei denen A ein Lichtsignal zu Beobachter B aussendet.

Solange B sich in Bereich IV befindet, hat er keinerlei Kenntnisse von A . Erst beim Überschreiten der Grenze zwischen Bereich IV zu Bereich I „erfährt“ Beobachter B von A . Das geschieht allerdings gleich sehr heftig: Innerhalb einer beliebig kurzen Zeit nimmt Beobachter B eine unendliche Zeitspanne in der Vergangenheit von Beobachter A wahr.

Hinsichtlich seiner Wahrnehmung sieht Beobachter B den beschleunigten Beobachter A in einer beliebig kurzen Zeit eine unendliche Strecke auf ihn zukommen. Diese scheinbare Wahrnehmung widerspricht natürlich nicht der Aussage, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit darstellt. Da Beobachter B in beliebig kurzer Zeit eine unendliche Vergangenheit von A wahrnimmt, sind die eintreffenden Lichtwellen auch unendlich blau-verschoben. In gewisser Hinsicht ist dieses Ereignis für Beobachter B wie eine Singularität.

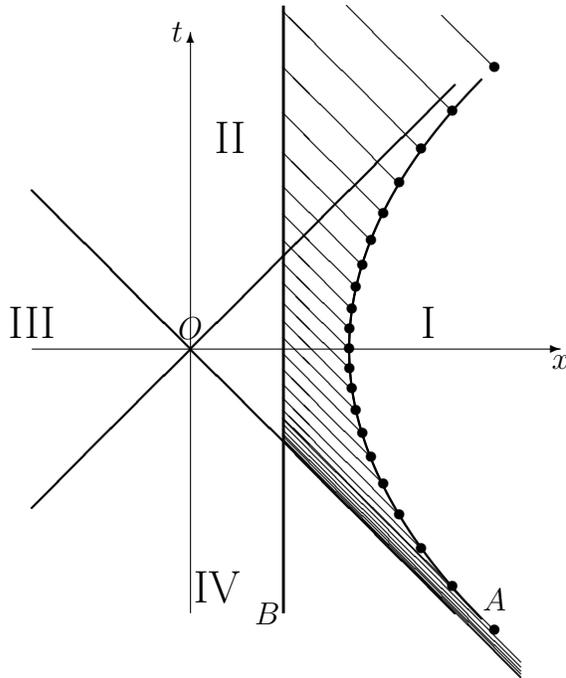


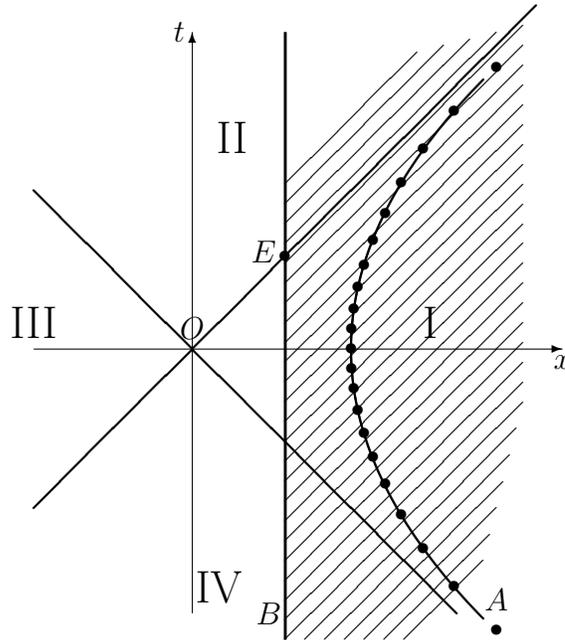
Abbildung 4.6: Was sieht der inertielle Beobachter B von dem beschleunigten Beobachter A ? In regelmäßigen Eigenzeitabständen (Ereignisse auf der Weltlinie von A , gekennzeichnet durch „•“) sendet der beschleunigte Beobachter Signale aus. B empfängt diese Signale in seinem System in unterschiedlichen Zeitabständen.

Solange sich der inertielle Beobachter B im Bereich I befindet, kann er mit dem beschleunigten Beobachter A Information austauschen. Für Beobachter B ändert sich auch nicht viel, wenn er in den Bereich II tritt. Für ihn hat die Grenze zwischen Bereich I und II keinerlei Bedeutung und er hat an dieser Grenze auch keine besondere Wahrnehmung. Er kann den beschleunigten Beobachter A bis in eine beliebige Zukunft weiter beobachten. Allerdings werden die Zeitabstände zwischen Signalen, die A in gleichen Eigenzeitabständen aussendet, für B immer größer. Der inertielle Beobachter B sieht also den beschleunigten Beobachter A immer stärker rot-verschoben. Diese Rotverschiebung entspricht im Wesentlichen dem Doppler-Effekt eines sich zunehmend rasch entfernenden Senders.

Nun untersuchen wir, was der beschleunigte Beobachter A von dem inertialen Beobachter B sieht. In Abb. 4.7 sind wieder die beiden Weltlinien dargestellt, diesmal sendet aber B in regelmäßigen Abständen Lichtsignale aus. Auf der Weltlinie von A sind in äquidistanten Eigenzeitabständen Ereignispunkte eingetragen – der Eigenzeitabstand entspricht dem zeitlichen Abstand, mit dem B die Lichtsignale abschickt.

In beliebig ferner Vergangenheit kann A den Beobachter B schon wahrnehmen, allerdings treffen die Lichtsignale bezüglich seiner Eigenzeit sehr viel rascher bei ihm ein, sodass er Beobachter B blau-verschoben wahrnimmt, wiederum wie bei einem Doppler-Effekt. Je weiter man in die Vergangenheit von A zurückgeht, umso blauverschobener sieht A den inertialen Beobachter B . Sobald B auch in den Bereich I eingedrungen ist, können A und B Signale austauschen und sich gegenseitig verständigen.

Abbildung 4.7: Was sieht der beschleunigte Beobachter A von dem inertialen Beobachter B ? Nun sendet B in regelmäßigen Eigenzeitabständen Signale aus, die A empfängt. Wegen der unterschiedlichen relativen Geschwindigkeit sowie zusätzlich den unterschiedlichen Skalen für die Eigenzeiten von A relativ zu B (Ereignisse in gleichen Eigenzeitabständen wurden auf der Weltlinie von A wieder gekennzeichnet) empfängt auch A die Signale in unterschiedlichen Zeitabständen.



Wenn die beiden Weltlinien von A und B für einen Augenblick parallel sind, sieht A die Signale von B mit derselben Frequenz, wie B sie aussendet. Ab dann empfängt A die Signale seltener, d.h. A sieht B rotverschoben.

Offenbar kann A keinerlei Signale mehr aus dem Bereich II empfangen. Das bedeutet, kein Signal, das B nach dem Ereignis E verschickt, wird A jemals erreichen. Für A endet die Weltlinie von B an dem Ereignis E . Der Lichtstrahl, der die Bereiche I und II trennt, ist für Beobachter A ein Horizont, hinter den er nicht blicken kann. Man bezeichnet diesen Horizont auch als *Ereignishorizont*.

Der Beobachter A sieht den Beobachter B aber nicht einfach hinter dem Horizont verschwinden. Im Gegenteil: Er kann für alle Zukunft den Beobachter B wahrnehmen, wie er sich immer mehr dem Horizont bzw. dem Ereignis E nähert. Die Abstände, mit denen A aber von B die in gleichen Zeitabständen ausgesandten Signale erhält, werden immer größer. A nimmt die Zeit im B -System immer langsamer wahr. Damit ist eine Rotverschiebung der Strahlung verbunden. B verschwindet also nicht hinter dem Horizont, sondern B verschwindet an der Oberfläche des Horizonts im langwelligen Bereich des Spektrums.

Die Grenzen zwischen den Bereichen I und IV einerseits und den Bereichen I und II andererseits verhalten sich also in gewisser Hinsicht symmetrisch: A kann die Ereignisse in Bereich IV wahrnehmen, nicht aber die Ereignisse in Bereich II. Umgekehrt hat B keine Kenntnis von A , solange er sich in Bereich IV befindet, er nimmt das Schicksal von A aber durchaus wahr, wenn er sich in Bereich II befindet.

Der Bereich III gehört zu einem Teil des Universums, der mit A überhaupt keine

kausale Verbindung hat, weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit. In gewisser Hinsicht existiert dieser Bereich für den beschleunigten Beobachter A gar nicht. Trotzdem ist dieser Bereich für den inertialen Beobachter B ein ganz normaler Teil seines Universums. Da andererseits B von diesem Bereich auch erst erfährt, nachdem er den Horizont zwischen I und II durchschritten hat, kann er A keine Mitteilung davon machen.

Kapitel 5

Die ART – Philosophische Vorbemerkungen

Bei der speziellen Relativitätstheorie kann man noch darüber streiten, welchen Beitrag Einstein zu ihrer Entwicklung wirklich geleistet hat und ob sie nicht vielleicht auch ohne ihn kurz vor ihrer Entdeckung stand. Die wichtigen Formeln waren alle bekannt und insbesondere Poincaré hatte auch schon wesentliche Fortschritte hinsichtlich der Interpretation dieser Formeln erzielt. Selbst die transformierte Zeit war als „lokale Hilfsgröße“ schon aufgetaucht und in Gebrauch.

Bei der allgemeinen Relativitätstheorie ist aber unbestritten, dass ihre grundlegenden Ideen das Werk von Einstein alleine sind. Es gab zwar hinsichtlich der Formulierung der korrekten Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie für lange Zeit einen Prioritätsstreit mit Hilbert (vgl. [31], S. 418/19 und 424), der allerdings in weiten Zügen mittlerweile zugunsten von Einstein entschieden ist.

5.1 Die Motivationen für die allgemeine Relativitätstheorie

Einstein (*geb. 14.3.1879 in Ulm; gest. 18.4.1955 in Princeton (New Jersey)*) hatte sicherlich eine besondere Fähigkeit zu spüren, wann er etwas nicht genau verstanden hatte, wo die Ursachen dafür lagen, und wie er das Problem mit einfachen Überlegungen und Gedankenexperimenten angehen konnte. Welche Überlegungen genau Einstein zur allgemeinen Relativitätstheorie geführt haben, ist schwer nachzuvollziehen. Die folgenden, eng zusammenhängenden Argumente gehörten sicherlich dazu.

5.1.1 Das Äquivalenzprinzip

Eine erste, vereinfachte Form des Äquivalenzprinzips lautet

- Schwere und träge Masse sind gleich.

Hier definieren wir die träge Masse m_t über das zweite Newton'sche Gesetz bei *bekannter* Kraft F :

$$m_t = \frac{F}{a}.$$

Die schwere Masse steht im Gravitationsgesetz. Zwischen zwei Körpern mit den schweren Massen m_g und m'_g im Abstand r wirkt die Kraft:

$$F = G \frac{m_g m'_g}{r^2}.$$

Hierbei ist G die Newton'sche Konstante. Insbesondere erfährt ein Körper (nahe der Erdoberfläche) im Gravitationsfeld der Erde mit der Erdbeschleunigung g die Schwerkraft

$$F = m_g g.$$

Experimentell überprüfbar ist nur die Aussage, dass träge und schwere Masse zueinander proportional sind. Ihre Gleichheit ist eine Frage der Konvention. Üblicherweise wählt man die Newton'sche Konstante bzw. die Erdbeschleunigung so, dass der Proportionalitätsfaktor zwischen träger und schwerer Masse eins wird. Diese Gleichheit wurde mittlerweile mit einer Genauigkeit von rund 10^{-13} überprüft (vgl. z.B. [29]). Derzeit sind Experimente geplant (beispielsweise mit dem Kleinsatelliten „Microscope“ oder das STEP – Satellite Test of the Equivalence Principle – Experiment, mit denen Genauigkeiten von 10^{-15} bis 10^{-18} angestrebt werden).

Die obige Formulierung des Äquivalenzprinzips ist in mehrfacher Hinsicht vereinfacht. In erster Linie liegt das daran, dass wir die träge wie auch die schwere Masse durch nicht-relativistische Gleichungen definiert haben. In einer veralteten Sprechweise (wie sie Einstein noch verwandte) könnte man sagen, dass wir das Äquivalenzprinzip für „ponderable Materie“ definiert haben. Es ist damit noch nicht eindeutig geklärt, inwiefern auch für andere Energieformen das Äquivalenzprinzip gilt.

Experimentell zeigt sich, dass eine allgemeinere Formulierung des Äquivalenzprinzips gilt, die sich weniger auf die Massen als auf die Kräfte bezieht:

- Gravitationskräfte sind äquivalent zu Beschleunigungskräften.

In der Formulierung von Einstein ([10]) heißt es sogar: „Trägheit und Schwere sind wesensgleich.“ Doch was bedeutet hier „äquivalent“ oder „wesensgleich“?

Üblicherweise drückt man diese Äquivalenz folgendermaßen aus: Die Wirkung eines konstanten Gravitationsfeldes lässt sich durch den Übergang zu einem beschleunigten Bezugssystem eliminieren. Für ein nicht homogenes Gravitationsfeld muss man

5.1. DIE MOTIVATIONEN FÜR DIE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE⁷⁷

sich auf ein *lokales Bezugssystem* beschränken. Die Abmessungen eines solchen lokalen Bezugssystems (das schließt auch die Zeitdauer für Experimente ein) müssen klein genug sein, dass bei vorgegebener Messgenauigkeit keine Effekte der Inhomogenität des Feldes nachgewiesen werden können. Sie hängen somit sowohl vom Inhomogenitätsgrad des Feldes als auch von dem zulässigen Messfehler ab. Ein lokales Bezugssystem ist daher nur approximativ realisierbar, ähnlich wie die „nicht-relativistische Mechanik“ oder die „klassische Mechanik“ (im Sinne von Nicht-Quantenmechanik).

Die „Äquivalenz“ zwischen einem Gravitationsfeld und einer Beschleunigung lässt sich folgendermaßen präzisieren:

- In einem lokalen Bezugssystem lässt sich der Einfluss einer Gravitationskraft nicht von der Wirkung einer Beschleunigung unterscheiden.

Der Begriff des lokalen Bezugssystems ist somit auch auf Beschleunigungskräfte zu übertragen. Eine Rotation des Bezugssystems um eine Achse durch das System ist beispielsweise nicht erlaubt, ebensowenig kann die Wirkung des Gravitationsfeldes von einem Gegenstand *innerhalb* eines Bezugssystems durch Beschleunigungskräfte beschrieben werden.

Für einfache Fälle der nicht-relativistischen Mechanik ist diese zweite Form des Äquivalenzprinzips leicht aus der ersten Formulierung (der Gleichheit von träger und schwerer Masse) herzuleiten. Für kompliziertere Fälle, beispielsweise der relativistischen Mechanik oder der Elektrodynamik, muss die Wirkung der Gravitation bzw. der Beschleunigung zunächst genau bekannt sein, um das Äquivalenzprinzip überprüfen zu können. Insofern ist die eigentliche Aussage des Äquivalenzprinzips, wie sie der allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegt, eher ein Postulat:

- In einem lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie.

Durch kein Experiment soll somit die Wirkung der Gravitation in einem lokalen Bezugssystem von der Wirkung einer Beschleunigung unterschieden werden können.

Trotz dieser scheinbar klaren Formulierung des Äquivalenzprinzips gibt es noch weitreichende Feinheiten und Unterteilungen. Insbesondere auf die Unterscheidung zwischen dem sogenannten „starken“ und „schwachen“ Äquivalenzprinzip soll hier nicht eingegangen werden (vgl. beispielsweise [20]).

5.1.2 Das Mach'sche Prinzip

Im Rahmen der Newton'schen Mechanik wie auch der speziellen Relativitätstheorie gibt es keine Erklärung für das Äquivalenzprinzip. Es erhebt sich hier allerdings die Frage, was man als Erklärung bezeichnen kann.

Ernst Mach hat in seiner *Mechanik* das Newton'sche Konzept des absoluten Raums angegriffen, weil es sich seiner Meinung nach dabei um eine unbeobachtbaren Entität handelt. Auch Newtons Argumente, dass sich die Wirkung des absoluten Raums durch die Trägheitskräfte bemerkbar macht, wenn Körper relativ zum absoluten Raum beschleunigt werden, hat er nicht gelten lassen. Zu dem berühmten „Eimerexperiment“ von Newton – die Wasseroberfläche in einem Eimer ist gewölbt, wenn sich das Wasser relativ zum absoluten Raum bewegt, wobei die Bewegung relativ zu den Eimerwänden keine Bedeutung hat – bemerkt er, dass man schließlich nicht wüsste, ob sich das Wasser wirklich relativ zum absoluten Raum bewegt oder nur relativ zum Fixsternhimmel. Das entscheidende Experiment – den Eimer in Ruhe lassen und den Fixsternhimmel relativ dazu in Rotation zu versetzen; wobei nach Newton das Wasser nicht gewölbt sein sollte – könne man schließlich nicht durchführen.

Mach war der Ansicht, dass das Gravitationsgesetz in seiner bekannten Form nicht vollständig sei, sondern dass ein weiterer Beitrag zu berücksichtigen sei, der sich allerdings nur bei einer beschleunigten Bewegung relativ zu einer großen Massenansammlung (z.B. der Menge aller stellaren Objekte) bemerkbar machen würde. In diesem Fall wäre Trägheit eine besondere Form der Gravitation, das heißt, die Trägheit eines Körpers würde durch dieselbe Wechselwirkung verursacht wie sein Gewicht. Ein solches Gesetz wäre eine Erklärung für das Äquivalenzprinzip.

Einstein hat lange Zeit geglaubt, dass die allgemeine Relativitätstheorie in diesem Sinne eine Erklärung für das Äquivalenzprinzip liefert. So schreibt er in einem Brief an Mach vom 25. Juni 1913:

Hochgeehrter Herr Kollege!

Dieser Tage haben Sie wohl meine neue Arbeit über Relativität und Gravitation erhalten, die nach unendlicher Mühe und quälendem Zweifel nun endlich fertig geworden ist. Nächstes Jahr bei der Sonnenfinsternis soll sich zeigen, ob die Lichtstrahlen an der Sonne gekrümmt werden, ob mit anderen Worten die zugrunde gelegte fundamentale Annahme von der Äquivalenz von Beschleunigung des Bezugssystems einerseits und Schwerfeld andererseits wirklich zutrifft.

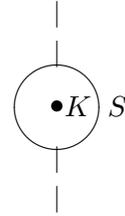
Wenn ja, so erfahren ihre genialen Untersuchungen über die Grundlagen der Mechanik – Planck's ungerechtfertigter Kritik zum Trotz – eine glänzende Bestätigung. Denn es ergibt sich mit Notwendigkeit, dass die *Trägheit* in einer Art *Wechselwirkung* der Körper ihren Ursprung hat, ganz im Sinne ihrer Überlegungen zum Newtonschen Eimer-Versuch.

Eine erste Konsequenz in diesem Sinne finden Sie oben auf Seite 6 der Arbeit. Es hat sich ferner folgendes ergeben:

5.1. DIE MOTIVATIONEN FÜR DIE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE 79

1) Beschleunigt man eine träge Kugelschale S , so erfährt nach der Theorie ein von ihr eingeschlossener Körper eine beschleunigende Kraft.

2) Rotiert die Schale S um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse (relativ zum System der Fixsterne („Restsystem“)), so entsteht im Innern der Schale ein Coriolis-Feld, d.h. die Ebene des Foucault-Pendels wird (mit einer allerdings praktisch unmessbar kleinen Geschwindigkeit) mitgenommen.



Es ist mir eine große Freude, Ihnen dies mitteilen zu können, zumal jene Kritik Plancks mir schon immer höchst ungerechtfertigt erschienen war.

Mit größter Hochachtung grüßt Sie herzlich

Ihr ergebener A. Einstein

Das in diesem Brief angesprochene Experiment zur Bestimmung der Lichtablenkung an der Sonne wurde 1914 wegen des Ausbruchs des ersten Weltkrieges nicht durchgeführt – zum Glück, wie manche meinen. Die allgemeine Relativitätstheorie lag nämlich in ihrer endgültigen Form noch nicht vor, und Einstein hat zur Berechnung des Ablenkungswinkels nur das Äquivalenzprinzip benutzt, ohne die inhomogene Krümmung des Raumes in der Nähe der Sonne korrekt zu berücksichtigen. Der Wert war in diesem Fall um einen Faktor 2 zu klein ([11]). Einstein korrigierte diesen Fehler bevor das Experiment dann 1919 wirklich durchgeführt wurde und seine Vorhersagen bestätigte.

Es zeigte sich später, dass die angesprochenen Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie die Trägheitskräfte nicht erklären können. Zwei umeinander rotierende Kugeln, die durch einen Faden zusammengehalten werden, werden auch in der ART durch Kräfte nach außen getrieben, die sich nicht als Wechselwirkung verstehen lassen. Es erhebt sich somit die Frage, inwieweit die allgemeine Relativitätstheorie wirklich eine Erklärung für das Äquivalenzprinzip liefert, wie es oft behauptet wird.

Dass diese Frage alles andere als trivial zu beantworten ist, hat beispielsweise eine Konferenz zu dem Thema „Mach’s Principle – From Newton’s Bucket to Quantum Gravity“ gezeigt, die vom 26–30 Juli 1993 in Tübingen stattfand (die Proceedings sind als Buch erschienen [2]). Mehrere Sessions und Diskussionsrunden waren auf dieser Konferenz dem Thema gewidmet, inwieweit die allgemeine Relativitätstheorie das Mach’sche Prinzip realisiert.

Abschließend möchte ich noch kurz darauf eingehen, woher der Begriff „Mach’sches Prinzip“ eigentlich stammt und was genau er bedeuten soll. Geprägt wurde dieser Begriff 1918 von Einstein [10]. In diesem kurzen Artikel mit dem Titel „Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie“ will Einstein auf einige Kritikpunkte antworten, die gegen die allgemeine Relativitätstheorie vorgebracht wurden. Er schreibt:

Die Theorie, wie sie mir heute vorschwebt, beruht auf drei Hauptgesichtspunkten, die allerdings keineswegs voneinander unabhängig sind. Sie seien im folgenden kurz angeführt

und charakterisiert und hierauf im nachfolgenden von einigen Seiten beleuchtet:

a) *Relativitätsprinzip*: Die Naturgesetze sind nur Aussagen über zeiträumliche Ko-
inzidenzen; sie finden deshalb ihren einzig natürlichen Ausdruck in allgemein kovarianten
Gleichungen.

b) *Äquivalenzprinzip*: Trägheit und Schwere sind wesensgleich. Hieraus und aus den
Ergebnissen der speziellen Relativitätstheorie folgt notwendig, dass der symmetrische „Fun-
damentaltensor“ ($g_{\mu\nu}$) die metrischen Eigenschaften des Raumes, das Trägheitsverhalten der
Körper in ihm, sowie die Gravitationswirkungen bestimmt. Den durch den Fundamentaltensor
beschriebenen Raumzustand wollen wir als „ G -Feld“ bezeichnen.

c) *Machsches Prinzip*: Das G -Feld ist *restlos* durch die Massen der Körper bestimmt.
Da Masse und Energie nach den Ergebnissen der speziellen Relativitätstheorie das Gleiche
sind und die Energie formal durch den symmetrischen Energietensor ($T_{\mu\nu}$) beschrieben wird,
so besagt dies, dass das G -Feld durch den Energietensor der Materie bedingt und bestimmt
sei.

An den Begriff „Machsches Prinzip“ hat Einstein eine Fußnote angeschlossen:

Bisher habe ich die Prinzipie a) und c) nicht auseinandergelassen, was aber verwirrend
wirkte. Den Namen „Machsches Prinzip“ habe ich deshalb gewählt, weil dieses Prinzip eine
Verallgemeinerung der Machschen Forderung bedeutet, dass die Trägheit auf eine Wechsel-
wirkung der Körper zurückgeführt werden müsse.

Die Einstein'sche Formulierung aller drei Prinzipien bedarf sicherlich einiger
Kommentare. Auf Punkt a) gehen wir im nächsten Abschnitt noch ein. Punkt b)
wurde im vorherigen Abschnitt erläutert und wird vielleicht klarer, wenn man die
vierte (letzte) dort angegebene Formulierung des Äquivalenzprinzips betrachtet. Auf
Punkt c) möchte ich hier kurz eingehen.

Heute verstehen wir unter dem Mach'schen Prinzip meist die Formulierung,
die Einstein in der Fußnote gewählt hat: „Trägheit beruht auf einer Wechselwir-
kung zwischen Körpern.“ Vielleicht hat Einstein zur Zeit des Zitats (1918) noch ge-
glaubt, dass die allgemeine Relativitätstheorie das Mach'sche Prinzip in dieser Form
tatsächlich erfüllt. Schon die Bemerkung unter Punkt b) (der Fundamentaltensor legt
das Trägheitsverhalten der Körper fest) gilt nicht mehr, wenn man neben der Gravi-
tation noch andere Wechselwirkungen berücksichtigt. Ein Beispiel ist das von Newton
beschriebene System zweier umeinander rotierender Kugeln, die durch einen Faden
miteinander verbunden sind. Die Kräfte im Faden, die die beiden Kugeln auf kon-
stantem Abstand halten, sind keine Gravitationskräfte. Es treten selbst im flachen
Minkowski-Raum die bekannten Fliehkräfte als Trägheitskräfte auf.

Das Mach'sche Prinzip in der Einstein'schen Formulierung gilt aber noch aus
einem anderen Grund nicht, den Einstein selber in der erwähnten Arbeit diskutiert: Es
würde verlangen, dass es in einem Universum ohne Materie nur die Minkowski-Metrik
 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ als Lösung gibt. Einstein selber zeigt aber, dass $g_{\mu\nu} = \text{konst}$

(für alle Komponenten verschiedene Konstanten) ebenfalls eine Lösung der Gleichungen darstellt. Daher gibt es zum selben Materiezustand des Universums verschiedene Lösungen für das G -Feld, was nach der Einstein'sche Version des Mach'schen Prinzips verboten wäre.

5.1.3 Das Relativitätsprinzip

Wir haben gesehen, dass sowohl in der Newton'schen Mechanik als auch in der speziellen Relativitätstheorie eine bestimmte Klasse von Bezugssystemen dadurch ausgezeichnet ist, dass in ihnen die Newton'schen Gesetze (bzw. die relativistischen Verallgemeinerungen) gelten, insbesondere das Trägheitsgesetz. Diese Bezugssysteme bezeichnet man als Inertialsysteme. Sie sind durch die Poincaré-Gruppe untereinander verbunden, d.h. je zwei Inertialsysteme lassen sich durch ein Element dieser Gruppe ineinander überführen.

Diese Auszeichnung einer bestimmten Klasse von Systemen als Inertialsysteme empfand Einstein als willkürlich. Die Willkür besteht dabei in zwei Aspekten, die von der allgemeinen Relativitätstheorie unterschiedlich gelöst werden.

Eine Willkür liegt in der Auszeichnung der „Gleichförmigkeit“, d.h. der Wahl bestimmter Skalen sowohl hinsichtlich der Zeit als auch hinsichtlich des Raumes. Physikalisch ist keine Zeit- oder Raumskala ausgezeichnet. Wir wählen die Skalen nach dem Gesichtspunkt der Einfachheit bzw. der Bequemlichkeit, nämlich so, dass die Newton'schen Gesetze für die einfachsten Bewegungsformen – die geradlinig-gleichförmige Bewegung des kräftefreien Körpers oder auch die gleichförmig periodische Bewegung eines Pendels oder Planeten – die einfachste Gestalt annehmen. Physikalisch darf jedoch eine beliebige (nicht notwendigerweise gleichförmige) Reparametrisierung von Raum und Zeit die Gesetze nicht abändern.

Auf diese Eigenschaft bezieht sich Einstein in der obigen (Seite 80) Erläuterung des Relativitätsprinzips: „Die Naturgesetze sind nur Aussagen über zeiträumliche Koinzidenzen; sie finden deshalb ihren einzig natürlichen Ausdruck in allgemein kovarianten Gleichungen.“ Statt „zeiträumliche Koinzidenzen“ würden wir vielleicht heute „(lokale) Ereignisse“ sagen. Wie wir diese Ereignisse parametrisieren darf die Gültigkeit der Naturgesetze natürlich nicht beeinflussen. Daher müssen die Gleichungen allgemein kovariant, d.h. reparametrisierungsinvariant, sein. Dieses Prinzip ist in der allgemeinen Relativitätstheorie erfüllt.

Die zweite Willkür liegt in der Auszeichnung der „Geradlinigkeit“. Geradlinigkeit ist nur für eine flache Raumzeit definiert, im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie also für eine Raumzeit, in der es keine Gravitationsfelder gibt. Die allgemeine Relativitätstheorie erweitert den Begriff des Inertialsystems auch auf nicht-flache Raumzeiten: In einem Gravitationsfeld frei fallende Bezugssysteme sind eben-

falls Inertialsysteme. Geometrisch folgen sie ebenso Geodäten wie die herkömmlichen Inertialsysteme in einer flachen, feldfreien Raumzeit. Hierzu schreibt Einstein ([11], S. 899):

Man kann bei dieser Auffassung ebensowenig von der *absoluten Beschleunigung* des Bezugssystems sprechen, wie man nach der gewöhnlichen Relativitätstheorie von der *absoluten Geschwindigkeit* eines Systems reden kann.

Und als Fußnote fügt er noch an:

Natürlich kann man ein *beliebiges* Schwerfeld nicht durch einen Bewegungszustand des Systems ohne Gravitationsfeld ersetzen, ebensowenig, als man durch eine Relativitätstransformation alle Punkte eines beliebig bewegten Mediums auf Ruhe transformieren kann.

Diese Aussage, dass in einem Gravitationsfeld frei fallende Systeme ebenfalls Inertialsysteme sind, ist von nicht zu unterschätzender praktischer Bedeutung: Die Newton'schen Inertialsysteme bzw. die Inertialsysteme der speziellen Relativitätstheorie sind kaum zu realisierende Idealfälle, da es in unserem Universum kaum Orte ohne Gravitationskräfte gibt. Frei fallende Systeme hingegen lassen sich vergleichsweise leicht verwirklichen.

In einer Hinsicht bleibt jedoch die allgemeine Relativitätstheorie unbefriedigend, und das hängt natürlich wieder mit dem Mach'schen Prinzip zusammen. In einer flachen Raumzeit ohne Gravitationsfelder folgt ein (auch von anderen Kräften unbeeinflusster) Körper einer geraden Linie. Doch was bedeutet „gerade Linie“, wenn es keine Materie im Raum gibt. Die Minkowski-Metrik erlaubt die Definition einer geraden Linie ohne Bezug auf irgendeinen anderen Körper im Universum. Die Kritik Machs an diesem Konzept wird auch von der allgemeinen Relativitätstheorie nicht beantwortet.

5.1.4 Raum und Zeit nehmen nicht an der Dynamik teil

Die Asymmetrie zwischen einerseits der Wirkung von Raum bzw. Raumzeit auf die Materie, wie sie sich in den Trägheitskräften (z.B. der Fliehkraft) offenbart, und andererseits der fehlenden Wirkung von Materie auf den Raum bzw. die Zeit empfand Einstein immer als unbefriedigend.

Im Vorwort zur Neuauflage von Emil Strauss' deutscher Übersetzung von Galilei's *Dialog* vergleicht Einstein das Konzept eines absoluten Raumes mit der aristotelischen Vorstellung eines Weltmittelpunktes ([13], Vorwort, S. XI). Er schreibt zunächst zum Anliegen des Dialogs: „Galileo wendet sich gegen die Einführung dieses ‚Nichts‘ (Weltmittelpunkt), das doch auf die materiellen Dinge einwirken soll; dies findet er ganz unbefriedigend.“ Dann geht er ganz explizit auf die Analogie zur Relativitätstheorie ein:

Ich möchte hier – in Form einer Einschaltung – darauf aufmerksam machen, dass eine weitgehende Analogie besteht zwischen Galileos Ablehnung der Setzung eines Weltmittelpunktes zur Erklärung des Fallens der Körper und der Ablehnung der Setzung des Inertialsystems zur Erklärung des Trägheitsverhaltens der Körper (welche Ablehnung der allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegt). Beiden Setzungen gemeinsam ist nämlich die Einführung eines begrifflichen Dinges mit folgenden Eigenschaften:

1. Es ist nicht als etwas Reales gedacht, von der Art der ponderablen Materie (bzw. des „Feldes“).
2. Es ist maßgebend für das Verhalten der realen Dinge, ist aber umgekehrt keiner Einwirkung durch die realen Dinge unterworfen.

Die Einführung derartiger begrifflichen Elemente ist zwar vom rein logischen Gesichtspunkte nicht schlechthin unzulässig, widerstrebt aber dem wissenschaftlichen Instinkt.

Diese Kritik an der absoluten, an der Dynamik nicht beteiligten Form von Raum und Zeit wird durch die allgemeine Relativitätstheorie überwunden. Die Einstein'schen Feldgleichungen beschreiben den Einfluss der Materie auf das metrische Feld der Raumzeit. Darüberhinaus gibt es sogar nicht-triviale Lösungen der Einstein'schen Gleichungen, selbst wenn der Energie-Impuls-Tensor der Materie verschwindet, z.B. die so genannten Gravitationswellen. Hierbei handelt es sich um wellenförmige Schwankungen des metrischen Feldes um die Lösung der flachen Minkowski-Raumzeit.

5.2 Geometrisierung des Raumes

Die allgemeine Relativitätstheorie verbindet man oft mit der Vorstellung einer „gekrümmten“ Raumzeit. Die Geometrie der Raumzeit denkt man sich dabei meist durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ gegeben, beispielsweise als Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen. Hier gibt es jedoch physikalisch noch einige Interpretationsprobleme. Zunächst ist der metrische Tensor gar nicht experimentell bestimmbar. Beliebige Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit lassen die Geometrie unverändert, ändern aber die Komponenten des metrischen Tensors. Damit erhebt sich die Frage, ob bzw. wie man experimentell zu geometrischen Größen gelangen kann.

Um Geometrie betreiben zu können, müssen wir Abstände ausmessen können. Selbst wenn wir uns die Punkte als identifiziert denken, haben wir noch keine eindeutige Vorschrift, zwei nahe beieinander liegenden Punkten einen Abstand zuzuordnen. Ein Großteil der folgenden Darstellung entstammt der „Philosophie der Raum-Zeit-Lehre“ von Hans Reichenbach [26]. Wir konzentrieren uns zunächst auf die Ausmessung räumlicher Abstände.

Angenommen, gegeben seien zwei Paare von Raumpunkten – (A, B) und (a, b) – und wir wollen den Abstand von (A, B) mit dem Abstand von (a, b) vergleichen. Was

machen wir? Wir tragen den Abstand (A, B) auf einem „Lineal“ ab, transportieren das Lineal zu den Punkten (a, b) und vergleichen die auf dem Lineal abgetragene Strecke mit dem Punktepaar (a, b) . Doch was garantiert uns, dass sich die Länge des Lineals bei dem Transport vom Punktepaar (A, B) zum Punktepaar (a, b) nicht verändert? Dafür gibt es keine Garantie! Wir können nur unter geeigneten Voraussetzungen *definieren*, dass sich dieser Abstand nicht ändert.

Was sind das für Voraussetzungen? Aus der Erfahrung sind wir bereit zu glauben, dass sich das Lineal beim Transport nicht verformt. Wir betrachten das Lineal im Rahmen der üblichen Genauigkeiten als einen „starrten Körper“. Abgesehen von der Unhandlichkeit des Verfahrens würden wir sicherlich nicht zwei auf einer Wasseroberfläche schwimmende Korke zur Abstandsmessung heranziehen. Wir müssen also zunächst definieren, was wir unter einem starren Körper verstehen wollen. Wir wissen, dass sich ein Körper bei Erhitzung im Allgemeinen ausdehnt. Zug- oder Druckkräfte können ebenfalls die Abmessungen eines Körpers verändern. Auch wenn wir ein Material wählen, bei dem die inneren Kräfte die Form gegenüber solchen äußeren Zug- und Druckkräften nahezu unverändert lassen, wissen wir doch aus der speziellen Relativitätstheorie, dass es keinen idealen starren Körper gibt. Die Wirkung eines plötzlichen Stoßes kann sich nur mit maximal Lichtgeschwindigkeit im Körper ausbreiten, d.h. eine gewisse Verformung lässt sich bei keinem Körper vermeiden. Wir können aber definieren, dass wir einen Körper als *starr* bezeichnen, wenn sich seine Form ohne Einwirkung erkennbarer äußerer Kräfte nicht verändert. Ähnlich wie schon beim Trägheitsprinzip sind wir also darauf angewiesen, über das Vorhandensein äußerer Kräfte Aussagen machen zu können.

Dies ist sicherlich nicht immer der Fall. Angenommen, eine Kraft wirkt auf alle Körper gleichermaßen und zwar so, dass sämtliche Abstandsverhältnisse zwischen den Körpern und an den Körpern im Vergleich mit dem kräftefreien Fall unverändert bleiben, dann kann die Wirkung einer solchen Kraft nicht nachgewiesen werden. Reichenbach spricht in diesem Zusammenhang von einer „kongruenzerhaltenden, universellen Kraft“. Dass sich solche Kräfte physikalisch nicht nachweisen lassen, hat Newton schon in seiner *Principia* (Korrolar 6) beschrieben.

Wir müssen also verschiedene Arten von Kräften unterscheiden. Reichenbach führt zunächst die Unterscheidung zwischen einer *universellen* Kraft und einer *differentiellen* Kraft ein. Eine universelle Kraft wird durch folgende zwei Eigenschaften definiert:

1. Sie wirkt auf jede Form von Materie gleichermaßen.
2. Es gibt keine Abschirmung gegen sie.

Die bekannten Kräfte – Zug- und Druckkräfte, elektromagnetische Kräfte, Wärme – sind differentielle Kräfte: Sie wirken auf verschiedene Materialien unterschiedlich.

Außerdem gibt es in den meisten Fällen eine Abschirmung gegen diese Kräfte. Anders ist es mit der Gravitation. Sie wirkt materialunabhängig auf alle Körper gleichermaßen – das ist eine Form des Äquivalenzprinzips – und es gibt keine Abschirmung gegen die Gravitation. Gravitation zählt nach Reichenbach also zu den universellen Kräften.

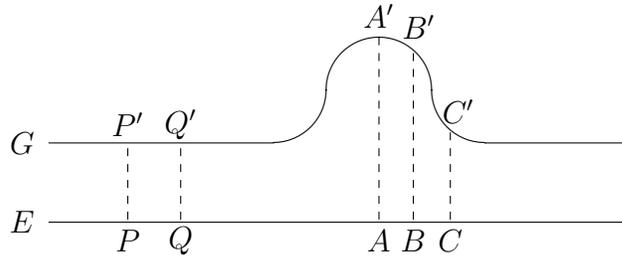
Unter den universellen Kräften bilden die kongruenzerhaltenden Kräfte noch einen Spezialfall. Hierzu zählt beispielsweise ein überall homogenes Gravitationsfeld. Solche Kräfte lassen sich durch keinen beobachtbaren Effekt nachweisen. Im Folgenden sei „keine Kraft“ immer gleichbedeutend mit „keine Kraft oder universelle, kongruenzerhaltende Kraft“. Ein *inhomogenes* Gravitationsfeld entspricht einer universellen, aber *nicht* kongruenzerhaltenden Kraft. Betrachten wir beispielsweise vier Massepunkte. Zwei dieser Massepunkte seien durch eine Feder miteinander verbunden, die anderen beiden Massepunkte seien frei. Im kräftefreien Fall können wir die Anfangsbedingungen so einrichten, dass sich die Abstände zwischen den vier Massepunkten nicht verändern. Das Gleiche gilt auch in einem kongruenzerhaltenden, universellen Kraftfeld. In einem inhomogenen Gravitationsfeld, beispielsweise dem Zentralfeld eines Planeten, werden die Massen relativ zu einander jedoch bewegt: Die beiden freien Massen werden ihren Abstand rascher verringern als die beiden durch eine Feder auf einen bestimmten Abstand gehaltenen Massen. Dieser Effekt lässt sich nachweisen.

Wir wollen nun den Abstand zwischen Raumpunkten durch starre Körper definieren. Dass dies überhaupt sinnvoll ist, hängt von einer wesentlichen Tatsache der Erfahrung ab: Ohne differentielle Kräfte hängt die Länge eines starren Körpers weder vom Transportweg (im Zustandsraum des Körpers, d.h. Drehungen sind mit eingeschlossen) noch von seinem Material ab. Wenn überhaupt, so ist seine Länge nur eine Funktion des Ortes und der Orientierung des starren Körpers. Hier hilft uns aber keine experimentell überprüfbare Beobachtung weiter – die Länge eines starren Körpers an einem Ort mit einer bestimmten Orientierung ist eine sogenannte „Zuordnungsdefinition“ ([26]), die wir frei wählen können.

Eine mögliche Definition ist, die Länge eines starren Körpers ohne differentielle Kräfte als konstant anzunehmen. In diesem Fall kann es sich aber herausstellen, dass wir eine Geometrie finden, die nicht euklidisch ist. Wir können aber auch umgekehrt für den Raum eine euklidische Geometrie *definieren*. Dann werden wir Abweichungen von einer euklidischen Geometrie, wie sie mit einem scheinbar starren Körper festgestellt werden, auf universelle Kräfte zurückführen müssen, die den Körper deformieren.

Das ist auch der Grund, warum wir zwischen differentiellen und universellen Kräften unterscheiden. Der Unterschied zwischen diesen beiden Kraftarten liegt nämlich darin, dass wir die universellen Kräfte durch eine Umdefinition der geometrischen Abstände eliminieren können. Die Wirkung einer universellen Kraft können wir als Eigenschaft des Raumes auffassen, wohingegen die Wirkung differentieller Kräfte ohne Willkür nicht als Eigenschaft des Raumes formuliert werden kann.

Abbildung 5.1: Projektion einer nichteuklidischen Geometrie G auf eine Ebene E .



Das folgende Beispiel (aus Reichenbach [26], §2 – §8) soll das Gesagte verdeutlichen (vgl. Abb. 5.1). Gegeben seien zwei Flächen, eine euklidische Ebene E und eine Fläche G mit einer „Beule“. Auf diesen Flächen leben zweidimensionale Wesen, die ihre Welt intrinsisch ausmessen wollen. Wir stellen uns nun vor, dass jeder Punkt der Fläche G mit der nicht-euklidischen Geometrie auf die Fläche E senkrecht projiziert wird. Außerdem nehmen wir an, dass eine universelle Kraft (eine Art „universelle“ Erwärmung der Fläche) die Längenmaßstäbe der Wesen auf der euklidischen Fläche E so verformt, dass die Abstände von Punkten auf E genau den Abständen entsprechen, die die Wesen auf G mit ihren unverformten Maßstäben den entsprechenden Punkten zuordnen. Die Wesen auf E ordnen also den Punkten A , B und C untereinander dieselben Abstände zu, die auch die Wesen auf G den Punkten A' , B' und C' zuordnen. Würden nicht die Wesen auf der Fläche E dieselbe Geometrie rekonstruieren, die auch die Wesen auf G finden? Gibt es überhaupt einen Unterschied zwischen den beiden Geometrien? Liegt der Unterschied nicht nur in der unterschiedlichen Form der Einbettung der beiden Flächen in einen dreidimensionalen Raum? Diese Einbettung sollte aber mit der intrinsischen Geometrie nichts zu tun haben.

Wir als „außenstehende“ Wesen haben den Eindruck gewonnen, dass es einen Unterschied zwischen der Fläche G und der Fläche E gibt: G entspricht wirklich einer nicht-euklidischen Geometrie, während auf E eben eine Kraft wirkt. Doch was bedeutet hier „wirklich“? Wir haben in der Physik keine Möglichkeit, zwischen einer universellen Kraft und einer nicht-euklidischen Geometrie des Raumes zu unterscheiden. Es bleibt uns überlassen, welche Anschauung wir für denselben physikalischen Sachverhalt benutzen wollen. Reichenbach drückt das dadurch aus, dass er für die Verformungen U eines Längenmaßstabes – idealisierte Beispiele für solche „Geometrie-Messer“ sind in Abb. 5.2 skizziert – an jedem Punkt drei Ursachen verantwortlich macht:

$$U = G + K_u + K_d .$$

Hierbei ist G die Geometrie des Raumes, K_u eine universelle Kraft und K_d eine differentielle Kraft. Die differentielle Kraft können wir durch Vergleich verschiedener Materialien bzw. durch Abschirmung des Maßstabes von dieser Kraft erkennen und entsprechend berücksichtigen. Doch darüberhinaus bemerken wir nur die Wirkung der

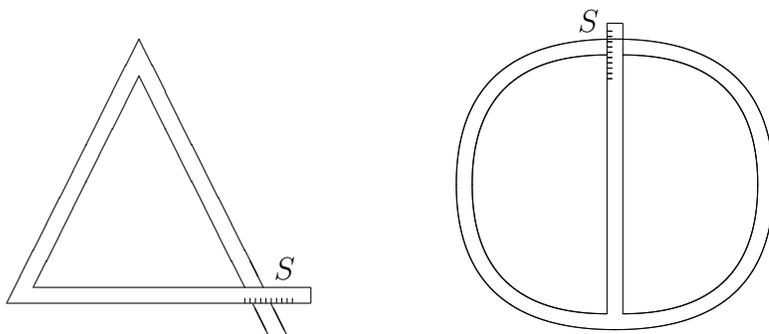


Abbildung 5.2: Zwei Geometrie-Messer. Auf der linken Seite bildet ein starrer Körper ein Dreieck, das am Punkt S offen ist. Auf einer Skala lässt sich dort ablesen, wie sehr das Dreieck von einem euklidischen Dreieck abweicht. Auf der rechten Seite bildet der starre Körper einen Kreis, der noch zusätzlich eine Diagonalverbindung hat. Am Punkt S lässt sich wieder ablesen, wie sehr Umfang und Durchmesser von ihrem euklidischen Verhältnis abweichen.

Summe $G + K_u$. Es bleibt uns überlassen, welchen Teil wir der Geometrie G des Raumes zuschreiben und welchen Teil wir als universelle Kraft K_u interpretieren. Die Einstein'sche Konvention setzt $K_u = 0$; es bleibt also ausschließlich die Geometrie. Jemand anders wird vielleicht die Geometrie G gleich der euklidischen Geometrie E wählen und sämtliche beobachteten Abweichungen davon einer universellen Kraft zuschreiben.

Der Vorteil der Einstein'schen Konvention ist ihre Einfachheit. Warum sollen wir irgendeine Geometrie besonders auszeichnen, die von den am starren Körper gemessenen Maßstabsangaben abweicht? Die euklidische Geometrie ist nur in unserer Anschauung ausgezeichnet, weil wir durch unsere Alltagsvorstellung an sie gewöhnt sind. Mathematisch gibt es keine ausgezeichnete Geometrie.

Auch andere Versuche zur Auszeichnung einer euklidischen Geometrie – beispielsweise die Idee von Dingler und Lorenzen, euklidische Ebenen durch „Aneinanderreiben und Abschabung“ starrer Körper zu erzeugen (siehe beispielsweise [22]) – kann man heute als fehlgeschlagen betrachten.

Abschließend sollte ich noch anmerken, dass die hier angestellten Überlegungen nicht davon abhängen, dass wir starre Körper zur Ausmessung von Abständen verwendet haben. Auch die Zeitmessungen von Lichtstrahlen, die zwischen Ereignissen hin- und herlaufen, erfordern zum Vergleich, dass die Messung der Zeit an verschiedenen Raumpunkten unabhängig von diesen Raumpunkten ist. Außerdem wird vorausgesetzt, dass Licht zwischen zwei Punkten immer den „geodätisch kürzesten“ Weg nimmt, aber damit hat man schon eine Konvention getroffen. Wer garantiert, dass bei

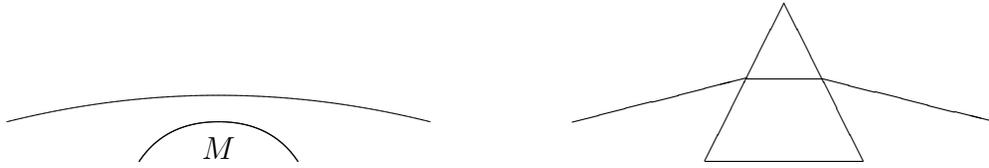


Abbildung 5.3: (Links) Ein Lichtstrahl wird an einer großen Masse – z.B. der Sonne – abgelenkt. (Rechts) Ein Lichtstrahl wird in einem Prisma abgelenkt.

universellen Kräften das Licht nicht von einer Geodäten abgelenkt wird?

5.3 Ein einfaches Beispiel

In der geometrischen Optik kennen wir das Fermat'sche Prinzip: Der von einem Lichtstrahl durchlaufene Weg hat die kürzeste (streng genommen handelt es sich allgemein um eine lokal extremale) optische Weglänge. Die optische Weglänge l_{opt} ergibt sich dabei aus der geometrischen Weglänge l multipliziert mit dem Brechungsindex n des Mediums. Bei einem ortsabhängigen Brechungsindex folgt

$$l_{\text{opt}} = \int_{\gamma} n(x(l)) dl \quad (5.1)$$

Hierbei ist $x(l)$ ein durch die geometrische Weglänge l parametrisierter Weg γ .

Angenommen, es gäbe nur Photonen. Wäre es dann sinnvoll, die optische Dichte $n(x)$ am Ort x als eine geometrische Eigenschaft zu definieren? Da Elektronen und andere Teilchen von einem Glaskristall, Wasser, etc. vollkommen anders abgelenkt werden als Licht, machen wir hier die Einschränkung auf Photonen.

Abbildung 5.3 zeigt zwei ähnliche Situationen: einmal die Ablenkung von Licht an einer Gravitationsquelle wie der Sonne (die wir noch behandeln werden) und einmal die Ablenkung von Licht in einem Prisma. In der ART wird die Lichtablenkung an der Sonne als Beispiel für die nicht-euklidische Geometrie gewertet, d.h. der Lichtstrahl breitet sich entlang einer Lösung der Geodätengleichung aus.

Die Antwort, ob auch im Fall unterschiedlicher optischer Dichten die Geometrie des Raums für die Ablenkung verantwortlich gemacht werden kann, hängt von einer wichtigen Eigenschaft ab: Ob die Ursachen der Ablenkung universell sind. Im Allgemeinen haben lichtdurchlässige Körper wie Glas oder Wasser Wellenlängen abhängige Brechungsindizes. Licht unterschiedlicher Wellenlänge wird also an einem Prisma unterschiedlich stark abgelenkt. Insofern wirkt ein Prisma „differentiell“. Die Gravitation hingegen lenkt das Licht unabhängig von seiner Wellenlänge immer gleich ab.¹

¹Dies gilt, obwohl Licht mit kürzeren Wellenlängen energiereicher ist als Licht mit langen Wel-

lenlängen. Nach dem Äquivalenzprinzip ist diese Tatsache klar: Die Ablenkung von Licht in einem beschleunigten System hat nichts mit seiner Wellenlänge zu tun, sondern lediglich mit dem Grad der Beschleunigung und der Lichtgeschwindigkeit.

Kapitel 6

Differentialgeometrische Grundlagen

In diesem Kapitel behandeln wir die mathematischen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Damit sind insbesondere die differentialgeometrischen Konzepte gemeint, die in die Einstein'schen Feldgleichungen eingehen bzw. zur Formulierung der Theorie benötigt werden. Es geht mir dabei weder um mathematische Vollständigkeit noch um mathematische Strenge. Der Schwerpunkt soll in einer Veranschaulichung der Konzepte bestehen. Wie so oft, ist gerade der Einstieg – das bedeutet die Definition von Mannigfaltigkeiten und ihren Tangentialräumen, insbesondere wenn man keinen Bezug auf eine Einbettung dieser Mannigfaltigkeit nehmen möchte – am schwierigsten.

6.1 Mannigfaltigkeiten

Etwas vereinfacht ist eine Mannigfaltigkeit M ein topologischer Raum (also eine Menge mit einer Topologie, für die wir im Folgenden immer eine gewöhnliche Hausdorff-Topologie nehmen wollen), der lokal (also in offenen Umgebungen von jedem Punkt) isomorph zu offenen Umgebungen im \mathbb{R}^n ist. Eine solche Isomorphie bezeichnet man als *Karte* und die Menge aller Karten als einen *Atlas*. Dies wird im Folgenden etwas genauer behandelt.

Zu einer Mannigfaltigkeit können wir an jedem Punkt ihren Tangentialraum definieren als „Raum der Geschwindigkeiten von parametrisierten Bahnkurven durch diesen Punkt“.

6.1.1 Karten und Atlanten

Die Metapher von Karten in einem Atlas werden wir oft zur Veranschaulichung verwenden, da sie den Sachverhalt sehr gut trifft. Sämtliche geometrischen Eigenschaften

von M werden über diese Karten definiert, und letztendlich werden wir es immer nur mit offenen Umgebungen im \mathbb{R}^n zu tun haben, aus denen wir die geometrischen Eigenschaften von M ablesen können.

Etwas genauer definieren wir eine Karte (U, ϕ) als eine offene Teilmenge U der Mannigfaltigkeit M und eine stetige, injektive Abbildung (also einen lokalen Isomorphismus)

$$\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

Da ϕ injektiv sein soll, gibt es auch eine Umkehrabbildung ϕ^{-1} von dem Bild von ϕ im \mathbb{R}^n zurück in die Mannigfaltigkeit. Wir können also bei einer Karte nahezu beliebig zwischen offenen Umgebungen in M und den zugehörigen offenen Umgebungen im \mathbb{R}^n – den eigentlichen Karten – wechseln.

Eine Menge von Karten $\{U_i, \phi_i\}$ bezeichnen wir als *Atlas*, sofern $\bigcup U_i = M$ und für je zwei Abbildungen $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $U_1 \cap U_2$ nicht leer ist, die Abbildung

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (6.2)$$

eine beliebig oft differenzierbare Abbildung von der offenen Teilmenge $\phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$ in den \mathbb{R}^n ist. Diese Eigenschaft ist sehr intuitiv: In einem Atlas findet man möglicherweise mehrere Karten, auf denen dasselbe Gebiet (Land oder Gegend) dargestellt ist. Diese beiden Darstellungen sollen natürlich „isomorph“ sein und zwar beliebig oft ableitbar. Man bezeichnet solche Abbildungen auch als *Diffeomorphismen*.¹

Über die Karten sind wir also in der Lage, auf der Mannigfaltigkeit so etwas wie Differential- und Integralrechnung zu betreiben. Dies wäre auf einem einfachen topologischen Raum nicht möglich (dort ist nur der Begriff der Stetigkeit definiert). In der Mathematik spricht man daher auch schon mal von einer *differenzierbaren Struktur*, die auf M definiert wurde (es müssen noch bestimmte Konsistenzbedingungen erfüllt sein, auf die ich hier nicht eingehe).

Haben sämtliche Abbildungen $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$, die sich konstruieren lassen, die Eigenschaft, dass ihre Jacobi-Determinante positiv ist (wegen der Bijektivität kann die Jacobi-Determinante an keinem Punkt verschwinden, sodass sie im gesamten Definitionsbereich entweder positiv oder negativ sein muss), dann spricht man auch von einem *orientierungserhaltenden Atlas*. Gibt es einen solchen Atlas, so nennt man die Mannigfaltigkeit M orientierbar. Bekannt ist das Möbius-Band, das in diesem Sinne nicht orientierbar ist.

¹In der Mathematik schränkt man den Grad der Ableitbarkeit manchmal ein und verlangt nur r -mal stetig differenzierbar etc. Umgekehrt kann man noch stärker auch Formen von Analytizität fordern, beispielsweise dass sich die Abbildungen beliebig genau durch ihre Taylor-Reihen annähern lassen. Im Folgenden setzen wir immer alle notwendigen Ableitbarkeitseigenschaften voraus.

6.1.2 Der Tangentialraum

An jedem Punkt p einer Mannigfaltigkeit M können wir den Tangentialraum $T_p M$ definieren. Auch diese Konstruktion ist eigentlich sehr anschaulich: Der Tangentialraum ist der Raum aller Geschwindigkeiten, die Bahnkurven durch den Punkt p haben können.

Ein parametrisierter Weg $\gamma : I \rightarrow M$ ist eine stetige Abbildung von einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in die Mannigfaltigkeit M , oft schreiben wir $t \mapsto \gamma(t) \in M$. Im Folgenden soll das Intervall I den Punkt 0 enthalten und wir betrachten parametrisierte Wege γ , für die $\gamma(0) = p$, die also bei $t = 0$ durch den Punkt p gehen.

Wir würden nun gerne die Ableitung des Weges nach t an der Stelle $t = 0$ als eine Tangente an die Mannigfaltigkeit M im Punkte p definieren, doch wir können auf M nicht ableiten. Daher bedient man sich eines Tricks: Wir betrachten sämtliche beliebig oft ableitbaren² Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei U eine Umgebung von p sein soll; man beachte, dass auch die Kartenabbildungen ϕ , eingeschränkt auf eines ihrer Argumente im Bildraum, solche Funktionen sind). Jeder Weg γ und jede solche Funktion f definiert eine Funktion $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Funktion können wir nach dem Argument t ableiten. Nun definieren wir auf der Menge aller Wege (durch p) eine Äquivalenzrelation: Zwei Wege γ_1 und γ_2 bezeichnen wir als äquivalent, wenn für alle stetigen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_2(t)) \right|_{t=0}. \quad (6.3)$$

Eine solche Äquivalenzklasse definiert einen Tangentialvektor in p und die Menge aller solcher Äquivalenzklassen ist der Tangentialraum $T_p M$ an M im Punkte p .

Das Verfahren erscheint nur auf den ersten Blick unnötig kompliziert. Der Vorteil der skizzierten Vorgehensweise liegt darin, dass die Mannigfaltigkeit M nicht in einen \mathbb{R}^m (mit $m \geq n$) eingebettet sein muss; diesen Fall betrachten wir im nächsten Abschnitt als Beispiel. Die obigen Definitionen (wie auch die weiteren geometrischen Konzepte, insbesondere die Metrik) sind rein intrinsisch. Mathematisch kann man daher von „gekrümmten Räumen“ sprechen, ohne dass es einen (euklidischen) Raum geben muss, *in* dem die Mannigfaltigkeit gekrümmt ist.

Noch ein Wort zur Notation: Das Bild eines Punktes $p \in M$ in einer bestimmten Karte ist $\phi(p)$, die dadurch induzierten *Koordinaten* von p bezeichnen wir aber meist mit x^μ bzw. $x^\mu(p)$. Ein Weg in M wird durch $\gamma(t)$ gekennzeichnet, sein Bild in einer Karte meist kurz durch $x(t)$. Die Ableitung eines solchen Weges, $\frac{dx(t)}{dt}$ ist damit ein Element des Tangentialraums. Allgemeine Elemente des Tangentialraums bezeichne ich

²Streng genommen können wir von Funktionen von einem topologischen Raum M nach \mathbb{R} nur entscheiden, ob sie stetig sind. Ableitbarkeit bezieht sich immer auf die differenzierbare Struktur auf M , die durch die Karten gegeben ist, sie bezieht sich also auf Funktionen $f \circ \phi^{-1}$, die Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} sind.

oftmals mit Großbuchstaben, also X mit Komponenten X^μ oder $X(p)$ mit Komponenten $X(p)^\mu$, da die Kleinbuchstaben schon für die Koordinaten von Punkten verwendet werden.

6.1.3 Eingebettete Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass die Mannigfaltigkeit M eine Untermenge eines euklidischen Raumes ist, beispielsweise eine 2-dimensionale Kugeloberfläche, die als Teilmenge des \mathbb{R}^3 aufgefasst wird und durch die Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (6.4)$$

definiert ist. Die übliche Karte für die Kugeloberfläche führt zur Parametrisierung Winkel ein:

$$x = R \cos \varphi \cos \theta \quad y = R \sin \varphi \cos \theta \quad z = R \sin \theta. \quad (6.5)$$

Ein Vergleich mit einer Weltkarte zeigt, dass $\varphi \in [0, 2\pi)$ dem Längengrad und $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$ dem Breitengrad entspricht.³ Die Karte verliert ihre Gültigkeit am Nord- und Südpol (dort bräuchte man andere Karten), da für $\theta = \pm\pi/2$ die Punkte unabhängig vom Winkel φ bereits festliegen. Anders ausgedrückt, alle Punkte $(\varphi, \pm\pi/2)$ haben als Bild den Nord- bzw. Südpol, damit wäre hier die Beziehung zwischen den Punkten auf der Kugel und den Punkten auf der Karte (würde man die Werte $\theta = \pm\pi/2$ zulassen) nicht mehr bijektiv.

Unsere Kartenabbildung lautet somit

$$\phi : (x, y, z) \rightarrow (\varphi, \theta) \quad (6.6)$$

mit

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (6.7)$$

(Die genauen Definitionsbereiche und „Äste“, die man beim inversen Tangens zu nehmen hat, sind technische Details.)

Da die Kugeloberfläche in den \mathbb{R}^3 eingebettet ist, liegen die Ableitungsvektoren, die man von Bahnkurven auf der Kugeloberfläche erhält, ebenfalls im \mathbb{R}^3 . Man kann auf diese Weise den Tangentialraum an einen Punkt der Kugeloberfläche als affinen Teilraum des \mathbb{R}^3 konstruieren. Das ist allerdings etwas irreführend, denn der Tangentialraum an einem Punkt ist ein Vektorraum (und nicht ein affiner Vektorraum), d.h., der Nullpunkt des Tangentialraums ist im Allgemeinen nicht der Nullpunkt des

³Gewöhnlich definiert man $\theta \in (0, \pi)$, wobei $\theta = 0$ dem Nord- und $\theta = \pi$ dem Südpol entspricht; daher unterscheiden sich die Formeln hier von denen in den üblichen Formelsammlung dadurch, dass $\cos \theta$ durch $\sin \theta$ etc. zu ersetzen ist.

einbettenden \mathbb{R}^3 . Streng genommen handelt es sich um einen anderen Raum: Die Kugeloberfläche mit all ihren Tangentenräumen ist ein 4-dimensionaler Raum und nicht der einbettende 3-dimensionale Raum.

Statt nun sämtliche Bahnkurven durch einen Punkt zu betrachten, kann man einfach die beiden Kurven durch einen Punkt p (parametrisiert durch (φ_p, θ_p)) betrachten, bei denen eine der Koordinaten festgehalten wird, d.h. man betrachtet die beiden Kurven, die den Koordinatenlinien durch p entsprechen. Die Ableitungsvektoren sind dann (bei der Kugeloberfläche):

$$\vec{e}_\varphi = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{x}(\varphi, \theta_p) \right|_{\varphi=\varphi_p} = R(-\sin \varphi_p \cos \theta_p, \cos \varphi_p \cos \theta_p, 0) \quad (6.8)$$

$$\vec{e}_\theta = \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{x}(\varphi_p, \theta) \right|_{\theta=\theta_p} = R(-\cos \varphi_p \sin \theta_p, -\sin \varphi_p \sin \theta_p, \cos \theta). \quad (6.9)$$

Diese beiden speziellen Tangentialvektoren spannen den Tangentialraum am Punkte p auf. Die Ableitung von einem beliebigen Weg durch p am diesem Punkt (also ein beliebiger Tangentialvektor) lässt sich immer als Linearkombination dieser beiden Vektoren schreiben.

Wir können das oben Gesagte nun leicht verallgemeinern. Sei der einbettende Raum \mathbb{R}^m und die Mannigfaltigkeit M durch eine Abbildung

$$\phi^{-1} : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \vec{x}(u_1, \dots, u_n) \quad (6.10)$$

gegeben. Die Koordinaten $\{(u_1, \dots, u_n)\}$ parametrisieren also die Mannigfaltigkeit M als Unterraum des \mathbb{R}^m . An jedem Punkt definieren die Tangentialvektoren

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.11)$$

eine Basis, welche den Tangentialraum aufspannen.

Man beachte, dass diese Basis im Allgemeinen keine normierte oder orthogonale Basis sein muss (siehe Abschnitt 6.2.1).

6.2 Die Metrik

Die fundamentale Struktur der Allgemeinen Relativitätstheorie ist das metrische Feld $g_{\mu\nu}(x)$, wobei x eine beliebige Parametrisierung der Raumzeit darstellt. Ein solches Feld ordnet somit jedem Punkte p der Raumzeit (also jedem Ereignis) – dargestellt durch seine Koordinaten $x = \phi(p)$ – einen Tensor $g_{\mu\nu}$ zu, mit dem wir „Abstände“ bestimmen können. Technisch gesprochen ist $g_{\mu\nu}(x)$ eine (nicht-entartete) symmetrische Bilinearform auf dem Tangentenraum (der natürlich ein Vektorraum ist) am Punkte p . Das bedeutet, $g_{\mu\nu}$ ist auf zwei Vektoren (Tangentialvektoren, also $\frac{dx}{dt}$ bezüglich eines

Weges $x(t)$) anzuwenden, möchte man einen invarianten, also vom Koordinatensystem unabhängigen Ausdruck erhalten.

Es gibt aber auch eine sehr anschauliche Beziehung: Seien p und p' zwei „infinitesimal“ benachbarte Punkte der Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten x^μ und x'^μ . Da die Punkte sehr eng beieinander liegen, unterscheiden sich auch die Koordinaten nur um infinitesimale Ausdrücke dx^μ . Der Abstand ds zwischen p und p' – hier handelt es sich um einen Abstand auf der Mannigfaltigkeit – ist dann gegeben durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.12)$$

bzw.

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (6.13)$$

In diesen Ausdrücken wurde die Einstein'sche Summenkonvention angewandt, d.h. über doppelt auftretende Indizes (einer oben und einer unten) ist zu summieren. Wir werden diese Beziehung in Zukunft häufiger verwenden und auch noch genauer untersuchen. Falls es irritiert, dass die Metrix $g_{\mu\nu}$, die eigentlich auf Vektoren des Tangentialraums angewandt wird, hier auf infinitesimale Koordinatendifferenzen angewandt wird, kann man diese Gleichung für eine beliebige Kurve $x(t)$ durch den Punkt p (bei $t = 0$) und den Punkt p' (bei $t = dt$) auch in der Form

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt \quad (6.14)$$

lesen.

Die Raumzeit hat lokal die Struktur eines Minkowski-Raums, das bedeutet, auch die Metrik hat die Signatur der Minkowski-Metrik: $\text{sgn}(g) = (1, -1, -1, -1)$. Man spricht in der Relativitätstheorie daher auch manchmal von einer Pseudometrik. Bei der angegebenen Wahl der Vorzeichen hat ein raumartiger Vektor (der also außerhalb des zukünftigen bzw. auf die Vergangenheit bezogenen Lichtkegels liegt) eine „negative Norm“, d.h. der Ausdruck in Gl. 6.12 wird negativ. Wollen wir einen sinnvollen räumlichen Abstand erhalten, müssen wir daher bei raumartigen Ereignissen das Negative dieses Ausdrucks wählen:

$$dl = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (6.15)$$

Diese Problematik (dass es sich bei $g_{\mu\nu}$ nicht wirklich um eine Metrik im mathematischen Sinne handelt) spielt zwar in der Relativitätstheorie eine wichtige Rolle – sie definiert insbesondere die kausale Lichtkegelstruktur – ist aber vom differentialgeometrischen Standpunkt zum Glück nicht so einschneidend, und die meisten Konzepte der gewöhnlichen Differentialgeometrie lassen sich auf die „Pseudo-Riemann'sche Geometrie“ übertragen.

Die Metrik erlaubt es, die (Pseudo)-Länge von Wegen anzugeben. Für einen zeitartigen Weg $x^\mu(t)$ ergibt sich beispielsweise als Eigenzeit

$$T = \int d\tau = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt .$$

Geodäten sind stationäre Punkte dieses Funktionals. Ein Einfluss der Minkowski-Struktur der Raumzeit ist, dass es sich bei Geodäten um Wege mit einer *maximalen* Eigenzeit (im Gegensatz zu den Geodäten der gewöhnlichen Geometrie, die eine *minimale* Länge haben) handelt.

In der Relativitätstheorie legt die Metrik auch die kausale Struktur fest (im Augenblick lassen wir globale topologische Eigenschaften mal beiseite): Zu jedem Ereignis p gibt es den Zukunfts- und den Vergangenheitslichtkegel. Diese trennen Ereignisse, die mit p durch physikalische Weltlinien (mit zeitartigen Tangenten, also $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu > 0$) verbunden werden können, von solchen Ereignissen, für die es solche Wege nicht gibt. Zukunfts- und Vergangenheitslichtkegel unterscheiden sich nochmals durch die Vorzeichen der 0-Komponente solcher Wege. Innerhalb des Zukunftslichtkegels befinden sich die Ereignisse, die von p kausal beeinflusst werden können (zu diesen Ereignissen gibt es von p aus Weltlinien mit nicht raumartigen Tangentenvektoren). Umgekehrt liegen innerhalb des Vergangenheitslichtkegels die Ereignisse, die p kausal beeinflussen können. Zu den Ereignissen außerhalb des Lichtkegels gibt es keine kausale Beziehung. Die kausale Struktur zwischen den Ereignissen einer Mannigfaltigkeit legt die Metrik schon weitgehend fest: Die Freiheit besteht lediglich in einem Skalarfeld, das die Metrik lokal mit einem Faktor multipliziert. Allgemein wird in einer Karte der Lichtkegel nun nicht mehr unbedingt durch gerade Linien dargestellt.

6.2.1 Induzierte Metrik bei Einbettungen

Handelt es sich bei der Mannigfaltigkeit M um eine in den \mathbb{R}^m eingebettete Untermannigfaltigkeit (vgl. Abschnitt 6.1.3), die durch eine Parameterdarstellung definiert ist, so bilden die Vektoren \vec{e}_i (Gl. 6.11) eine Basis des Tangentialraums. Wie schon erwähnt, handelt es sich im Allgemeinen nicht um eine Orthonormalbasis. Daher definiert man eine symmetrische Bilinearform

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{x}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_j} . \quad (6.16)$$

Diese Größe ist die durch die Einbettung in den \mathbb{R}^m *induzierte* Metrik im Tangentialraum an jedem Punkt.

Betrachten wir als Beispiel nochmals die Kugel und ihre Parametrisierung durch Längengrad- und Breitengradwinkel (φ, θ) . Wir hatten die zugehörigen Basisvektoren im Tangentialraum (an einem Punkt, parametrisiert durch (φ, θ)) bereits berechnet

(Gl.en 6.8 und 6.9) und erhalten daraus für die Metrik:

$$g_{\varphi\varphi} = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = R^2 \cos^2 \theta \qquad g_{\varphi\theta} = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\theta = 0 \qquad (6.17)$$

$$g_{\theta\varphi} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \qquad g_{\theta\theta} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = R^2 \qquad (6.18)$$

oder

$$g = R^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.19)$$

Statt dessen können wir auch schreiben:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \theta (d\varphi)^2 + R^2 (d\theta)^2. \qquad (6.20)$$

6.2.2 Projektionen und die Metrik von Landkarten

Die Bedeutung der Metrik kann man sich sehr gut anhand einer Landkarte verdeutlichen. Jede Landkarte hat einen Maßstab, der angibt, wie groß der Abstand zwischen zwei Punkten in Wirklichkeit – d.h. auf der Erdoberfläche – ist, wenn der Abstand der zugehörigen Punkte auf der Landkarte bekannt ist. Eine Angabe von 1:30 000 besagt, dass 1 Zentimeter auf der Landkarte in Wirklichkeit 30 000 Zentimetern oder 300 Metern entspricht. In gewisser Hinsicht entspricht die Metrik einem solchen Maßstabsfaktor.

Als Koordinaten wählt man auf der Erdoberfläche meist die Längen- und Breitengrade. In einer Landkarte entsprechen die Längen- und Breitengrade Linien, die oft horizontal und vertikal verlaufen, insbesondere also senkrecht aufeinander stehen. Seien Δx und Δy die „Koordinatenabstände“ zwischen zwei nicht zu weit voneinander entfernten Punkten auf der Landkarte, also die Abstände entlang der Breiten- und Längengrade, dann ist der physikalische (wirkliche) Abstand zwischen den beiden Punkten gleich

$$\Delta s^2 = m^2 \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \qquad (6.21)$$

wobei m der oben genannte Maßstabsfaktor ist. In diesem Fall wäre $g_{\mu\nu} = m^2 \delta_{\mu\nu}$, das heißt, die Metrik ist eine Diagonalmatrix und die Diagonalelemente sind alle gleich und konstant (gleich dem Quadrat des Maßstabsfaktors).

Bei Landkarten, die ein größeres Gebiet darstellen, reicht die Angabe eines festen Maßstabs nicht mehr aus. Die Erdoberfläche ist näherungsweise eine Kugel, die nicht verzerrungsfrei (und, wie wir noch diskutieren werden, auch nicht „singularitätenfrei“) in einer Ebene dargestellt werden kann. Das bedeutet, an unterschiedlichen Punkten der Karte muss ein unterschiedlicher Maßstab angesetzt werden. Bei Karten, bei denen es auf eine genaue Ortsangabe ankommt, beispielsweise bei See- oder Flugkarten, sind daher manchmal Korrekturterme angegeben, denen man entnehmen kann, wie sich der Maßstab verändert, wenn man sich beispielsweise vom Zentrum der Karte entfernt.

Außerdem kann der Maßstab noch von der Richtung abhängen. Bei vielen Weltkarten ist der Maßstab in Nord-Südrichtung nahezu konstant, wohingegen der Maßstab in Ost-West-Richtung gerade in der Nähe der Pole sehr variieren kann. Und wählt man schließlich noch eine Kartendarstellung, bei der die Längen- und Breitengrade nicht senkrecht aufeinander stehen, muss man den allgemeinen Kosinus-Satz anwenden, um aus den Koordinatendifferenzen den tatsächlichen Abstand berechnen zu können, und damit erhält man in der Formel für Δs^2 auch Produktterme der Form $\Delta x \Delta y$.

6.2.3 Koordinatensingularitäten

Koordinatensingularitäten sind singuläre Bereiche einer Karte, die aber keine Singularität der Mannigfaltigkeit sind. Ein singulärer Kartenbereich tritt auf, wenn die Metrik entweder einen Nullmod oder aber einen singulären Mod (also eine Unendlichkeit) hat.

Ein Beispiel haben wir schon bei der Längen- und Breitengradbeschreibung einer Kugel kennengelernt: Die Metrik wird am Nord- und Südpol singulär, da dort einer der beiden Eigenwerte verschwindet. Anschaulich bedeutet dies, dass am Nord- und Südpol ein endlicher Kartenabstand (also endliche dx^μ) zu einem verschwindenden tatsächlichen Abstand ds gehört. Bei den Punkten $\theta = \pm\pi/2$ verschwindet offensichtlich ein Eigenwert der Metrik

$$ds^2 = \cos^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2. \quad (6.22)$$

Selbstverständlich sind diese singulären Stellen der Metrik in Wirklichkeit keine Singularitäten: Der Nord- und Südpol sind ebenso regulär auf der Kugel wie jeder andere Punkt.

Es gibt auch noch „schlimmere“ Koordinatensingularitäten. Betrachten wir dazu als Beispiel eine horizontale Zylinderprojektion der Kugel bzw. die Zylinderkoordinaten einer Kugel. Das bedeutet, jeder Längengrad wird wieder auf eine Gerade zu einem Winkel φ abgebildet, aber statt des Breitengrads verwenden wir nun einfach die z -Koordinate. Wir können also jeden Punkt auf der Kugel durch die Koordinaten φ und z ausdrücken:

$$\vec{x} = (\sqrt{R^2 - z^2} \cos \varphi, \sqrt{R^2 - z^2} \sin \varphi, z). \quad (6.23)$$

Die Tangentialvektoren zu den Koordinatenlinien sind nun

$$\vec{e}_\varphi = \sqrt{R^2 - z^2} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad (6.24)$$

$$\vec{e}_z = \left(-\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \cos \varphi, -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \sin \varphi, 1 \right), \quad (6.25)$$

womit wir für die Metrik erhalten:

$$ds^2 = (R^2 - z^2)d\varphi^2 + \frac{R^2}{R^2 - z^2}dz^2. \quad (6.26)$$

In diesem Fall verschwindet ein Eigenwert der Metrik bei $z = \pm R$ (also am Nord- und Südpol) und der andere Eigenwert wird unendlich. Das Produkt der beiden Eigenwerte bleibt in diesem Fall allerdings konstant. Eine ganz ähnliche Situation werden wir später am Horizont eines Schwarzen Loches wiederfinden.

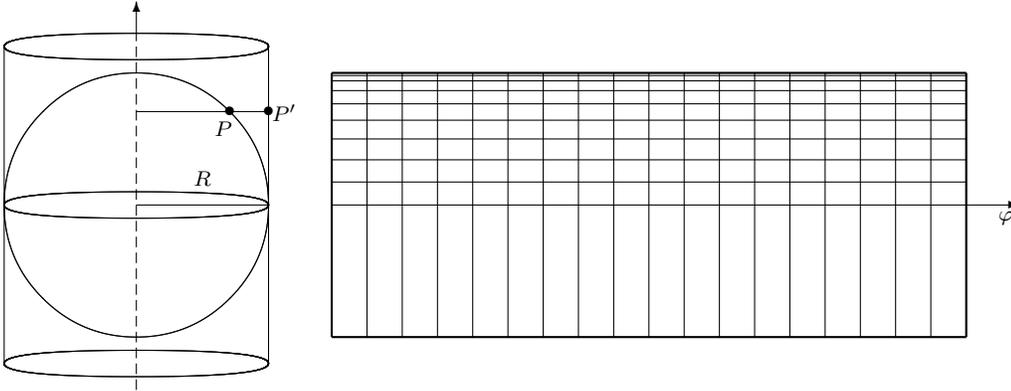


Abbildung 6.1: Spezielle Projektion einer Kugelfläche auf einen Zylinder. (links) Jeder Punkt wird von der z -Achse aus senkrecht in radialer Richtung auf die Zylinderfläche projiziert, z.B. der Punkt P auf den Punkt P' . (rechts) Längen- und Breitengrade in dieser Karte.

Abbildung 6.1 zeigt die angegebene Projektion der Kugelfläche auf eine Ebene sowie die resultierende Karte mit einigen Längen- und Breitengraden. Man erkennt, dass die Längengraden in der Karte parallel sind (also einen konstanten Abstand voneinander haben), wohingegen die Abstände zwischen den „tatsächlichen“ Längengraden auf der Kugelfläche Richtung Nord- oder Südpol immer kleiner werden. Der obere und untere Rand der Karte sind singulär, insofern die gesamte Linie nur einem Punkt entspricht, das horizontale Maß dort somit null wird. Die Breitengrade hingegen haben auf der Kugeloberfläche immer denselben Abstand voneinander, werden in der Karte aber zum Nord- bzw. Südpol hin immer dichter. Das vertikale Maß wird dort beliebig groß.

Selbstverständlich gilt nach wie vor, dass die Kugel am Nord- und Südpol nicht singulär ist, sondern lediglich eine schlechte Karte gewählt wurde. Es gibt natürlich auch Karten, die am Nord- und Südpol singularitätenfrei sind (siehe jeden Weltatlas).

Es gibt natürlich auch tatsächliche Singularitäten bei Mannigfaltigkeiten, beispielsweise im Zentrum eines Schwarzen Loches. Bei solchen Singularitäten wird auch die Metrik bzw. die Karte singulär, allerdings lässt sich diese Singularität nicht durch die Wahl einer anderen Karte beheben. Den Komponenten der Metrik sieht man nicht sofort an, ob es sich um eine Koordinatensingularität oder eine echte Singularität handelt. Dazu muss man geometrische Größen betrachten, die nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, beispielsweise die skalare Krümmung, die wir in

Abschnitt 6.4 kennen lernen werden.

6.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Der nächste Schritt beschreibt, wie man einen Vektor (also ein Element eines Tangentialraums) entlang eines Weges auf der Mannigfaltigkeit parallel verschiebt. Eine solche Parallelverschiebung ist aus zwei Gründen wichtig: (1) Wir werden im nächsten Abschnitt die Krümmung über infinitesimale Parallelverschiebungen entlang geschlossener Wege definieren, und (2) möchten wir die kräftefreie Bewegung definieren als eine Bahnkurve, deren Tangentialvektor (also die Geschwindigkeit) im Sinne einer Parallelverschiebung konstant bleibt.

6.3.1 Die Christoffel-Symbole

In einem flachen euklidischen Raum mit kartesischen Koordinaten können wir einfach sagen, zwei Vektoren sind parallel, wenn sie dieselben Komponenten haben. Bei einer parallelen Verschiebung in eine beliebige Richtung dx^μ ändert der Vektor X^ν also seine Komponenten nicht, oder

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} X^\mu = 0. \quad (6.27)$$

Anders ausgedrückt ändern sich die Komponenten eines Vektors nicht, wenn man ihn in eine Richtung dx^ν verschiebt, d.h.:

$$\delta X^\mu(p) = X^\mu(p + dx^\nu) - X^\mu(p) = 0. \quad (6.28)$$

Die etwas unmathematische Notation $p + dx^\nu$ soll Folgendes andeuten: Der Punkt p habe die Koordinaten $x^\mu(p)$ und der infinitesimal benachbarte Punkt q die Koordinaten $x^\mu(q)$. Die Koordinaten dieser beiden Punkte unterscheiden sich um dx^ν .

Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit werden sich die Komponenten von einem Vektor X^μ verändern, wenn er parallel zu einem Nachbarpunkt verschoben wird. Seien nun p und q zwei infinitesimal benachbarte Punkte, sodass für die Koordinaten gilt: $x^\mu(p) - x^\mu(q) = dx^\mu$. Die Komponenten des Vektorfelds am Punkte p seien $X^\mu(p)$ und die am Punkte q entsprechend $X^\mu(q)$. Wir wollen nun definieren, unter welcher Bedingung die beiden Vektoren, ausgedrückt durch ihre Komponenten, parallel sind. Diese Vorschrift lässt sich durch eine lineare Abbildung angeben, die nicht nur vom Punkte p sondern auch noch von der Richtung abhängt, in welche die parallele Verschiebung erfolgt. Diese Größe hat somit drei Indizes und man bezeichnet sie mit $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(p)$.

Die folgende Gleichung definiert nun eine Parallelverschiebung:

$$\delta X^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X^\nu dx^\lambda. \quad (6.29)$$

Sie bedeutet Folgendes: δX^μ ist die Differenz zwischen der μ -Koordinate des Vektors am Punkte p und der μ -Koordinate des zweiten Vektors am Punkte $q = p + dx^\lambda$, also $\delta X^\mu = X^\mu(p + dx^\lambda) - X^\mu(p)$. Diese Differenz soll eine lineare Funktion der Komponenten von X^μ sein und ebenfalls linear von der Verschiebung dx^λ abhängen. Wenn die obige Bedingung erfüllt ist, bezeichnet man die beiden Vektoren, deren Komponenten sich um δX^μ unterscheiden, als parallel.

Wir müssen uns nun überlegen, welche Bedingungen wir an diese Abbildung, die man auch als *Zusammenhang* bezeichnet, stellen. Bei allgemeinen Vektorräumen ist man hier vollkommen frei, d.h., es kann sich um eine vollkommen beliebige (allerdings umkehrbare) lineare Abbildung handeln. Sind jedoch auf dem Vektorraum zusätzliche Strukturen definiert, sollte die Parallelverschiebung diese Strukturen nach Möglichkeit erhalten. In unserem Fall ist auf der Mannigfaltigkeit eine Metrik definiert und man wird von einer Parallelverschiebung erwarten, dass sie das Skalarprodukt von Vektoren nicht verändert. Einen solchen Zusammenhang bezeichnet man auch als *metrischen Zusammenhang*. Wenn also *zwei* Vektoren X und Y definiert sind, dann soll ihr Skalarprodukt am Punkte p dasselbe sein, wie das Skalarprodukt ihrer Parallelverschiebungen am Punkte q . Das führt auf folgende Bedingung:

$$g_{\mu\nu}(p)X^\mu(p)Y^\nu(p) = g_{\mu\nu}(q)X^\mu(q)Y^\nu(q). \quad (6.30)$$

Diese Gleichung ist zunächst nur für infinitesimal benachbarte Punkte (mit der Verschiebungsrichtung dx^μ) sinnvoll, da im allgemeinen eine Parallelverschiebung von dem Weg abhängt, entlang dem die Vektoren verschoben wurden (siehe auch den Anhang zu Faserbündeln in dem Skript zur QFT).

Wir schreiben nun für die Koordinaten von q : $x^\lambda(q) = x^\lambda(p) + dx^\lambda$ und entwickeln den Ausdruck auf der rechten Seite bis zu linearen Termen in dx^λ . Die führende Ordnung hebt sich natürlich auf der linken und rechten Seite weg.

$$0 = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda X^\mu Y^\nu + g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu X^\alpha dx^\lambda Y^\nu + g_{\mu\nu} X^\mu \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu Y^\alpha dx^\lambda. \quad (6.31)$$

Sämtliche Terme in diesem Ausdruck sind nun als Ausdrücke am Punkt p zu verstehen. In der folgenden Gleichung sind lediglich die Summationsindizes umbenannt und die gleichen Terme ausgeklammert worden:

$$0 = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \right) dx^\lambda X^\mu Y^\nu. \quad (6.32)$$

Da diese Bedingungsgleichung für eine Parallelverschiebung für beliebige Vektorfelder X und Y sowie beliebige Verschiebungsrichtungen dx^λ gelten soll, muss der Ausdruck in der Klammer verschwinden:

$$0 = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha. \quad (6.33)$$

Diese Gleichung ist noch nicht eindeutig nach den Γ -Symbolen, die man auch als *Christoffel-Symbole* bezeichnet, auflösbar. Man fordert für den so genannten Levi-Civita-Zusammenhang noch die *Torsionsfreiheit*, d.h., die Γ -Symbole sollen in den beiden unteren Indizes symmetrisch sein. Anschaulich bedeutet dies, dass die Ableitung der μ -Komponente eines Vektorfeldes in ν -Richtung gleich der Ableitung der ν -Komponente in μ -Richtung sein soll. Diese beiden Forderungen – es soll sich um einen metrischen und torsionsfreien Zusammenhang handeln – legen den Levi-Civita-Zusammenhang und damit die Christoffel-Symbole als Funktion der Metrik fest:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} \left[\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right].$$

6.3.2 Ein paar mathematische Zwischenbemerkungen

Der Mathematiker versucht, geometrische Konstruktionen möglichst unabhängig von einer Wahl der Koordinaten zu definieren. Ausgangspunkt ist meist ein Vektorfeld X , das entlang bestimmter Richtungen abgeleitet werden soll. Diese Richtungen werden wiederum koordinatenunabhängig durch ein zweites Vektorfeld Y definiert. Dazu muss zunächst gezeigt werden, dass jedes Vektorfeld Y (zumindest in einer offenen Umgebung, also einer Karte) Integralkurven besitzt, also eine Lösungsschar von Wegen $\gamma(t)$, deren Tangentialvektoren an jedem Punkt p gleich $Y(p)$ sind. Dann kann man ein Vektorfeld X nach dem Vektorfeld Y ableiten.

Eine spezielle Ableitung, die so genannte *kovariante Ableitung*, gibt nun an, unter welchen Bedingungen ein Vektorfeld X , abgeleitet nach einem Vektorfeld Y „konstant“ ist, also in Richtung der Integralkurven von Y eine Parallelverschiebung von Vektoren darstellt. Diese kovariante Ableitung bezeichnet man oft als ∇_Y . Die Bedingung einer Parallelverschiebung lautet dann

$$\nabla_Y X = 0. \quad (6.34)$$

Zum Vergleich mit unserer Notation betrachten wir einen speziellen Weg $\gamma(t)$ durch den Punkt p , also $\gamma(0) = p$. In einer Karte werde dieser Weg durch $y^{\mu}(t)$ beschrieben. Der Tangentialvektor in dieser Karte am Punkte p ist somit

$$Y^{\mu}(p) = \left. \frac{dy^{\mu}(t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (6.35)$$

Nun betrachten wir das Vektorfeld X , das entlang des Weges $\gamma(t)$ die Koordinaten $X^{\mu}(t)$ haben soll. Wir sagen, dieses Vektorfeld ist entlang des Weges $\gamma(t)$ (am Punkte p) eine Parallelverschiebung, wenn

$$\frac{dX^{\mu}(t)}{dt} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial y^{\lambda}} \frac{dy^{\lambda}(t)}{dt} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} X^{\nu}(t) \frac{dy^{\lambda}(t)}{dt} \quad (6.36)$$

ist, bzw.

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial y^\lambda} = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X^\nu. \quad (6.37)$$

Die kovariante Ableitung in Richtung der Koordinate λ ist somit:

$$\nabla_\lambda X^\mu := \partial_\lambda X^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X^\nu, \quad (6.38)$$

und das Verschwinden der kovarianten Ableitung ist die Bedingung, dass es sich bei dem Vektorfeld X^μ um eine Parallelverschiebung in Koordinatenrichtung λ handelt.

Abschließend möchte ich noch anmerken, dass man auch für Tensoren eine kovariante Ableitung definieren kann. Gleichung 6.33 bedeutet dann, dass die kovariante Ableitung der Metrik verschwindet. Dies ist eine alternative Definition für einen metrischen Zusammenhang.

6.3.3 Ein Beispiel aus der klassischen Mechanik – konstant rotierende Bezugssysteme

In diesem Zwischenabschnitt möchte ich darauf hinweisen, dass das Konzept der kovarianten Ableitung schon aus der Mechanik bekannt ist, allerdings meist nicht unter diesem Namen. Bei der Herleitung der Coriolis-Kraft betrachtet man ein ruhendes Inertialsystem und ein konstant rotierendes zweites Bezugssystem, dessen Ursprung mit dem ruhenden System zusammenfallen soll.

Ein Bahnkurve $x^i(t)$ (hier verwende ich lateinische Indizes, da es sich um rein räumliche Indizes handelt) im ruhenden System ist eine Gerade, wenn die zeitliche Ableitung $v^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}$ konstant ist. Im rotierenden System hingegen ändern sich die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors ständig. Seien

$$x^{i'}(t) = \sum_j R(t)_j^i x^j(t) \quad (6.39)$$

die Koordinaten der Bahnkurve im rotierenden System (wobei $R(t)$ eine t -abhängige Rotationsmatrix darstellt) und entsprechend

$$v^{i'}(t) = \frac{d}{dt} \sum_j R(t)_j^i x^j(t) = \sum_j \left(\frac{d}{dt} R(t)_j^i \right) x^j(t) + \sum_j R(t)_j^i \frac{d}{dt} x^j(t) \quad (6.40)$$

die Komponenten der Geschwindigkeit im rotierenden System, dann gilt bekanntlich

$$\vec{v}'(t) = R(t) (\vec{v}(t) + \vec{\omega} \times \vec{x}(t)), \quad (6.41)$$

wobei $\vec{\omega}$ die Drehung charakterisiert, also die Richtung von $\vec{\omega}$ die Drehachse und der Betrag die Winkelgeschwindigkeit. Nun definiert man oft die kovariante Zeitableitung

$$\frac{D}{Dt} \vec{x}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) + \vec{\omega} \times \vec{x}(t) \quad (6.42)$$

bzw. in Koordinaten

$$\frac{D}{Dt}x^i(t) = \frac{d}{dt}x^i(t) + \sum_{jk} \epsilon_{jk}^i \omega^j x^k(t). \quad (6.43)$$

Die Größe $\Gamma_k^i = \sum_j \epsilon_{jk}^i \omega^j$ definiert den Zusammenhang. Da die „Mannigfaltigkeit“ nur in der Zeitachse besteht, gibt es keinen gesonderten Index für die Richtung der Parallelverschiebung. Die kovariante Ableitung gibt an, wie sich die Komponenten eines Vektors im rotierenden System zeitlich verändern müssen, wenn dieser Vektor im ruhenden System konstant ist. Und die kovariante Ableitung verschwindet, wenn sich die Komponenten genau so verändern, dass es sich bei dem Vektor im Inertialsystem um einen konstanten Vektor handelt.

6.3.4 Die Geodätengleichung

Wir formulieren nun eine Geodätengleichung, d.h. eine Gleichung für die kürzeste (in der Relativitätstheorie wegen der Pseudo-Riemann'schen Geometrie die längste) Verbindungskurve zwischen zwei Punkten. Wir leiten diese Gleichung aus physikalischen Überlegungen zur Konstanz der Geschwindigkeit ab.

Gegeben sei eine Bahnkurve $\gamma(\tau)$ mit ihrer Koordinatendarstellung $x^\mu(\tau)$, parametrisiert durch die Eigenzeit τ . An jedem Punkt sei

$$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (6.44)$$

der Geschwindigkeitsvektor an die Kurve. Bei dem Geschwindigkeitsvektor handelt es sich um einen Tangentialvektor.

Gewöhnlich sagen wir, eine Bahnkurve ist eine Gerade (oder Geodäte), wenn die Komponenten der Geschwindigkeit konstant sind, sich also entlang der Bahnkurve nicht ändern. Auf einer Mannigfaltigkeit mit einer Metrik bedeutet dies, dass sich die Änderung der Komponenten von u^μ in Richtung der Geschwindigkeit nicht ändern, bzw.

$$du^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu dx^\lambda, \quad (6.45)$$

wobei

$$dx^\lambda = u^\lambda d\tau \quad (6.46)$$

in Richtung des Tangentialvektors zeigt. Damit erhalten wir als Geodätengleichung:

$$\frac{du^\mu(\tau)}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda. \quad (6.47)$$

Diese Gleichung ist gleichzeitig die Bewegungsgleichung für ein „freies“ Teilchen auf einer Mannigfaltigkeit mit der Metrik $g_{\mu\nu}$. Die Geschwindigkeit muss dabei für ein massives Teilchen noch der Bedingung

$$c^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad m \neq 0 \quad (6.48)$$

genügen, die im Wesentlichen angibt, dass es sich bei τ um die Eigenzeit handelt (in der gewöhnlichen Geometrie würde sich τ auf die Bogenlänge beziehen). Für ein masseloses Teilchen ist $d\tau = 0$ und damit folgt für eine beliebige Parametrisierung die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu(\lambda)}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} \quad (6.49)$$

mit der Einschränkung

$$0 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad m = 0. \quad (6.50)$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch als Euler-Lagrange-Gleichung aus dem Längenfunktional

$$S = \int L(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad \text{mit} \quad L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (6.51)$$

Die Ableitungen sind

$$\frac{\partial L}{\partial x^\lambda(t)} = \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \quad (6.52)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda(t)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} g_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu \right) \quad (6.53)$$

und die Extrema findet man, indem man die beiden Ausdrücke gleich setzt. Diese Gleichung wird sehr kompliziert, daher geht man auch hier meist zur Eigenzeitparametrisierung (Gl. 6.48 bzw. für masselose Teilchen Gl. 6.50) über, wodurch man nahezu direkt die Geodätengleichung erhält.

6.4 Krümmungstensoren

Der Levi-Civita-Zusammenhang bzw. die Christoffel-Symbole erlauben eine Parallelverschiebung eines Vektors in eine bestimmte Richtung. Sie ermöglichen damit den Vergleich zweier Vektoren an verschiedenen Punkten, sofern der eine Vektor entlang eines vorgegebenen Weges zu dem anderen Vektor parallel verschoben wird. Nun wollen wir einen Vektor entlang einer *geschlossenen* Bahnkurve parallel transportieren. Im Allgemeinen wird sich dabei der Vektor verändern. Diese Veränderung entlang geschlossener Bahnkurven ist ein Maß für die geometrische Krümmung der Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten zunächst ein vertrautes Beispiel auf der Kugeloberfläche: Wird ein Vektor beginnend am Nordpol entlang eines Längengrads parallel zum Äquator transportiert, anschließend entlang des Äquators um einen Viertelkreis parallel verschoben und dann wieder entlang eines Längengrads zum Nordpol, so hat sich dieser

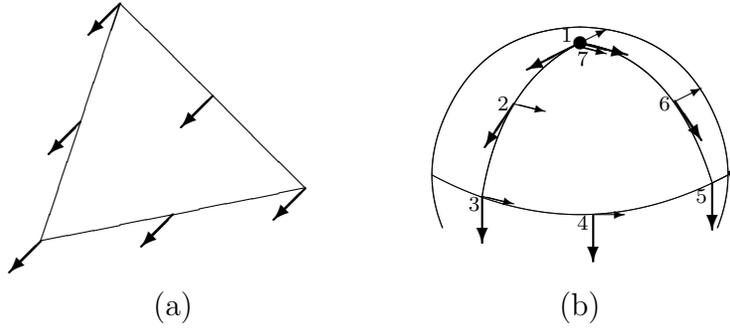


Abbildung 6.2: (a) Wird ein Vektor in einer Ebene entlang der Kanten eines Dreiecks parallel verschoben, ändert sich seine Richtung nicht. (b) Für eine entsprechende Parallelverschiebung entlang von Großkreisen (jeweils um eine Viertel Vollkreislänge) entlang der Positionen 1 bis 7 (Position 7 = Position 1) haben sich die Vektoren um 90° gedreht.

Vektor im Vergleich zu Anfangszustand um 90° gedreht (siehe Abb. 6.2). Verkleinert man die Fläche, um die herum ein Vektor parallel verschoben wird, so verkleinert sich auch der Winkel, um den dieser Vektor gedreht wird. Es zeigt sich jedoch, dass der Quotient aus dem Winkel, um den ein Vektor bei einer Parallelverschiebung um eine geschlossene Fläche gedreht wird, und dem Inhalt dieser Fläche gegen eine Konstante geht. Diese Konstante ist ein Maß für die Krümmung an dem Punkt, an dem dieser Weg beginnt und endet.

In Analogie zu Gleichung 6.29 definieren wir den Krümmungstensor $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$ über eine infinitesimale Parallelverschiebung, diesmal allerdings entlang eines geschlossenen Weges:

$$\delta X^\mu = R_{\nu\rho\sigma}^\mu X^\nu d\sigma^{\rho\sigma}. \quad (6.54)$$

Diese Gleichung bedeutet Folgendes: Wenn ein Vektor X mit Komponenten X^ν um den Rand des infinitesimalen Flächenelements $d\sigma^{\rho\sigma}$ parallel verschoben wird, dann ändern sich seine Komponenten um δX^μ . Das infinitesimale Flächenelement $d\sigma^{\rho\sigma}$ liegt in der durch die Koordinaten ρ und σ aufgespannten Ebene und hat den Flächeninhalt $|d\sigma^{\rho\sigma}|$.

Damit lässt sich aus den Christoffel-Symbolen der Riemann-Christoffel-Krümmungstensor berechnen:

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda.$$

Bei diesem Ausdruck handelt es sich im Wesentlichen um den Kommutator von zwei kovarianten Ableitungen

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = [(\partial_\mu \delta_\alpha^\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda), (\partial_\nu \delta_\kappa^\alpha - \Gamma_{\nu\kappa}^\alpha)], \quad (6.55)$$

was nochmals zum Ausdruck bringt, dass eine kovariante Ableitung ein Generator einer Parallelverschiebung in eine bestimmte Richtung ist, und der Krümmungstensor als Kommutator zweier solcher Generatoren als Differenz zwischen „erst Richtung κ , dann Richtung ν “ und „erst Richtung ν , dann Richtung κ “ aufzufassen ist.

Aus dem Riemann-Christoffel-Krümmungstensor erhält man durch Kontraktion den Ricci-Tensor:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} .$$

Eine weitere Kontraktion führt auf den Krümmungsskalar:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} .$$

In der Riemannschen Geometrie – mit positiv definiter Metrik – hat der Krümmungsskalar eine sehr anschauliche Bedeutung. Es ist der führende Korrekturfaktor für das Volumen $V_d(r)$ einer Kugel vom Radius r im Vergleich zum Volumen der Kugel in einem euklidischen Raum in d -Dimensionen (siehe Pauli [24], S. 48):

$$V_d(r) = C_d r^d \left\{ 1 + \frac{R}{6} \frac{r^2}{d+2} + \dots \right\} .$$

Die Ableitung nach r liefert eine entsprechende Formel für die Oberfläche der Kugel:

$$S_d(r) = d C_d r^{d-1} \left\{ 1 + \frac{R}{6} \frac{r^2}{d} + \dots \right\} .$$

6.5 Die Einstein'schen Feldgleichungen

Damit haben wir die rein geometrischen Bausteine der Allgemeinen Relativitätstheorie. Es fehlt noch der Anteil der Materie, ausgedrückt durch den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$. Lässt sich die Materie in einer durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ beschriebenen Raum-Zeit durch eine Wirkung $S[g; \dots]$ beschreiben, so gilt formal:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} .$$

Diese Formel ist besonders nützlich, wenn die Materie durch Felder repräsentiert wird, beispielsweise im Fall der Maxwell-Theorie (in einer gekrümmten Raumzeit), der Dirac- oder der Klein-Gordon-Theorie.

Die Einstein'schen Feldgleichungen lauten nun:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (6.56)$$

(G ist Newtons Gravitationskonstante.) Die linke Seite dieser Gleichung enthält rein geometrische Größen der Raumzeit; die rechte Seite den Materieanteil in der Raumzeit.

Der Energie-Impuls-Tensor hängt im Allgemeinen ebenfalls von der Metrik ab. Diese Gleichung ist allerdings nur eine Hälfte des vollständigen Gleichungssystems der Allgemeinen Relativitätstheorie. Es fehlt noch die Bewegungsgleichung der Materie. Lässt sich die Materie durch eine Wirkung beschreiben, so erhält man diese Bewegungsgleichungen durch Variation der Wirkung nach den entsprechenden Freiheitsgraden. Für Punktteilchen ist die Geodätengleichung 6.47 die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einer gekrümmten Raum-Zeit.

Die Einstein'schen Feldgleichungen lassen sich auch als Euler-Lagrange-Gleichungen aus einer Wirkung ableiten. Dazu betrachten wir folgenden Ausdruck, die so genannte *Einstein-Hilbert-Wirkung*:

$$S = \kappa \int d^4x \sqrt{-g} R + S[g_{\mu\nu}; \varphi, \psi, \dots] \quad (6.57)$$

Der erste Term beschreibt ein 4-dimensionales Volumenintegral über die skalare Krümmung. Der Faktor $\sqrt{-g}$ ist die Quadratwurzel aus der Determinante des metrischen Tensors. Das Minuszeichen macht diesen Ausdruck positiv, da in der üblichen Signatur die Determinante der Pseudo-Riemann'schen Metrik negativ ist. Die Kombination $d^4x \sqrt{-g}$ ist das invariante Volumenmaß. Die Konstante κ hängt über

$$\kappa = \frac{c^3}{16\pi G} \quad (6.58)$$

mit der Newton'schen Gravitationskonstante G zusammen.

Der zweite Term ist die Wirkung der Materie. Handelt es sich um Felder (Skalarfelder φ oder Dirac-Felder ψ) ist dies die übliche Klein-Gordon-Wirkung bzw. Dirac-Wirkung, allerdings koppeln diese Felder nun (minimal) an die Metrik. Wie schon erwähnt, liefert die Funktionalableitung dieser Wirkung nach der Metrik den Energie-Impuls-Tensor der Materie und damit den rechten Teil der Einstein'schen Gleichungen. Die Funktionalableitung des Krümmungsskalars nach der Metrik liefert die linke Seite der Einstein'schen Gleichungen.

Manchmal addiert man zu der angegebenen Wirkung noch einen Term

$$S_\Lambda = -2\kappa\Lambda \int d^4x \sqrt{-g}, \quad (6.59)$$

wobei Λ die so genannte *kosmologische Konstante* ist. Dieser Teil der Wirkung besteht also einfach aus einem Volumenintegral. Die Einstein-Gleichungen werden damit zu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (6.60)$$

Den noch fehlenden zweiten Anteil der Bewegungsgleichungen – die Bewegungsgleichungen für die Materie – erhält man aus der Wirkung (Gl. 6.57) durch die Variation nach den Feldern. Betrachtet man freie Punktteilchen, so ist ihre Wirkung durch

das Längenfunktional (Gl. 6.51) gegeben und die zweite Bewegungsgleichung ist die Geodätengleichung.

Abschließend wollen wir die Einstein'schen Feldgleichungen noch etwas umformen, was die Lösung insbesondere für den Fall $T_{\mu\nu} = 0$ einfacher macht. Bilden wir auf beiden Seiten der Gleichung 6.56 die Spur (genauer, ziehen einen der Indizes mit der Metrik hoch und bilden dann die Spur) so erhalten wir

$$R = \frac{8\pi G}{c^4} T. \quad (6.61)$$

Wir können daher den Term mit der skalaren Krümmung auf die andere Seite der Gleichung bringen:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (6.62)$$

Man erkennt an dieser Form sofort, dass die Lösungen der Einstein-Gleichungen im Vakuum (also für $T_{\mu\nu} = 0$) durch

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (6.63)$$

gegeben sind. Der Ricci-Tensor (und damit natürlich auch die skalare Krümmung) verschwinden im materiefreien Raum.

Kapitel 7

ART-Effekte für schwache Gravitation

Nachdem wir die mathematischen Grundlagen behandelt und die Einstein'schen Gleichungen angegeben haben, betrachten wir nun erste Anwendungen bzw. Konsequenzen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Sehr viele Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie – dazu gehören alle Effekte, die sich innerhalb unseres Sonnensystems beobachten lassen – erhält man im Rahmen einer störungstheoretischen Behandlung um die flache Minkowski-Raumzeit bzw. um die Newton'sche Theorie. Das GPS – Global Positioning System – berücksichtigt gleich mehrere Ordnungen in einer solchen Störungstheorie. Ohne die Berücksichtigung dieser Einflüsse wäre eine Positionierung, wie sie heute möglich ist (im Bereich von wenigen Metern, unter bestimmten Umständen sogar wenigen Zentimetern), nicht möglich.

Wir können im Rahmen dieses Überblicks auf die meisten dieser Effekte leider nicht eingehen, sondern beschränken uns hier auf die drei „klassischen Effekte“ der ART. Diese beziehen sich auf die Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld, die Rotverschiebung von Licht, das ein Gravitationsfeld verlässt, und die Erklärung der Periheldrehung des Merkur. Ebenfalls kurz ansprechen werde ich die Beschreibung von Gravitationswellen, den Newton'schen Grenzfall sowie das Verhalten von Drehimpuls bzw. Spin im Gravitationsfeld.

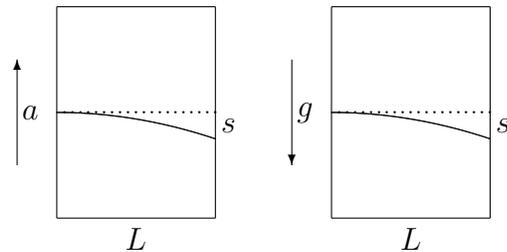
7.1 Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld

Der erste wichtige Test der Relativitätstheorie bezog sich auf die Lichtablenkung an der Sonne. Die Einstein'sche Relativitätstheorie sagt vorher, dass ein Lichtstrahl von einem Stern hinter der Sonne in der gekrümmten Raumzeit in der Nähe der Sonnenoberfläche abgelenkt werden muss. Diese Sprechweise bezieht sich auf den Vergleich zwischen der

Situation, wo die Sonne nahezu zwischen Erde und dem betreffenden Stern steht, und der Situation, wo diese Verbindungslinie frei von gravitativen Einflüssen ist. Eine tatsächliche „Ablenkung“ des Lichtstrahls an der Sonne findet nicht statt, denn der Lichtstrahl folgt immer einer geodätischen Linie.

Wir betrachten zunächst die Lichtablenkung in einem konstanten Gravitationsfeld. Nach dem Äquivalenzprinzip sollte die Physik in diesem Fall nicht unterscheidbar von der Physik in einem konstant beschleunigten Bezugssystem sein. Dazu stellen wir uns zwei Systeme vor (vgl. Abb. 7.1): das eine System werde konstant beschleunigt (Beschleunigung a), das zweite System befinde sich in einem Gravitationsfeld der Stärke $g = a$.

Abbildung 7.1: Nach dem Äquivalenzprinzip sollte die Lichtablenkung s in einem Labor, das mit der Beschleunigung a nach oben beschleunigt wird (links) dieselbe sein wie die in einem Labor, das sich in einem konstanten Gravitationsfeld der Stärke $g = a$ befindet (rechts).



Näherungsweise benötigt ein Lichtstrahl zum Durchlaufen des Labors (Länge L) die Zeit $t = L/c$. In dieser Zeit hat sich das Laborsystem aufgrund der Beschleunigung a um die Strecke $s = at^2/2$ weiterbewegt. Um dieselbe Strecke sollte daher ein Lichtstrahl in dem Laborsystem, das in einem Gravitationsfeld mit $g = a$ ruht, abgelenkt werden.

Wir betrachten nun die Ablenkung des Lichts an einem Stern wie der Sonne. Wenn das Äquivalenzprinzip gilt, sollte der Winkel der Ablenkung nur von der Anfangsgeschwindigkeit und dem Stoßparameter abhängen, nicht aber von der Masse eines Teilchens. Für sehr kleine Ablenkungswinkel (bei denen alle Korrekturterme höherer Ordnung vernachlässigt werden) ergibt sich in der klassischen Mechanik für die Streuung am Kepler-Potenzial:

$$\Delta\phi = 2\frac{GM}{v^2 r_0}, \quad (7.1)$$

wobei r_0 der Minimalabstand der Bahnkurve vom Sonnenmittelpunkt ist (vgl. Abb. 7.2), was bei den Beobachtungen während einer Sonnenfinsternis dem Sonnenradius entspricht.

Wenn wir (etwas naiv, da nicht-relativistisch gerechnet) für die Geschwindigkeit c einsetzen, erhalten wir:

$$\Delta\phi = 2\frac{GM}{c^2 r_0}, \quad (7.2)$$

Dies war das Ergebnis, das Einstein zunächst vermutet hatte.

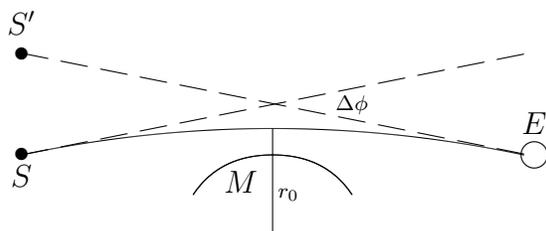


Abbildung 7.2: (Links) Ein Lichtstrahl eines entfernten Sterns S wird an der Sonne abgelenkt. Für einen Beobachter auf der Erde E erscheint der Stern scheinbar an einer anderen Position S' . Als Ablenkungswinkel bezeichnet man den Winkel $\Delta\phi$.

Wie schon erwähnt (S. 79) wurde der Effekt der Lichtablenkung an der Sonne 1919 gemessen und damit die Vorhersage der ART bestätigt. Einstein hatte ursprünglich nur die oben skizzierte Form des Äquivalenzprinzips für seine Vorhersage verwendet. Eine genauere Rechnung, die möglich wurde, nachdem 1916 die Schwarzschild-Lösung bekannt war, ergab diese für den Ablenkungswinkel

$$\Delta\phi = 4 \frac{GM}{c^2 r_0} \frac{1 + \gamma}{2}. \quad (7.3)$$

Hierbei ist γ einer der Parameter der Robertson-Entwicklung (siehe Abschnitt 8.1) und für die Schwarzschild-Lösung gilt $\gamma = 1$ (siehe Gl. 8.8), wohingegen in der Newton'schen Näherung $\gamma = 0$ folgt. Die tatsächliche Ablenkung eines Lichtstrahls an der Sonne fällt also im Rahmen der ART doppelt so stark aus, wie ursprünglich vermutet.

7.2 Die Rotverschiebung von Licht

Einer der klassischen Effekte der Relativitätstheorie, der mittlerweile auch mit einer großen Genauigkeit auf der Erde gemessen wurde, ist die Rotverschiebung von Licht, das ein Gravitationsfeld verlässt. Diese Rotverschiebung hat mit dem Gang von Uhren – genauer mit der Länge von Weltlinien – im Gravitationsfeld zu tun.

7.2.1 Uhren im Gravitationsfeld

Wir haben gesehen, dass wir für raumartige Abstände die Metrik durch starre Körper ausmessen können. Für zeitartige Wege können wir die Länge immer durch die Eigenzeit einer mittransportierten Uhr ausmessen.

Grundsätzlich gilt in diesem Fall das Gleiche, wie schon bei der Geometrisierung des Raumes. Es ist eine Definition, die Eigenzeit und damit die zeitartige Metrik über den Lauf guter Uhren zu bestimmen. Universelle Einflüsse sind solche, die den Lauf aller Uhren – d.h. aller physikalischen Systeme mit einer charakteristischen Zeitskala – gleichermaßen beeinflussen, sodass es sinnvoll ist, die Eigenzeit der Geometrie und nicht einer universellen Kraft zuzuschreiben.

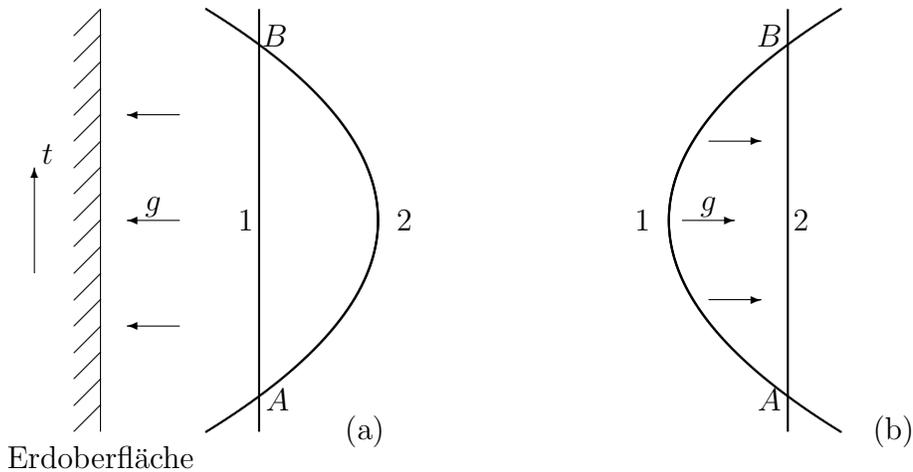


Abbildung 7.3: Das Äquivalenzprinzip für Beobachter im Gravitationsfeld. In Teil (a) befinden sich beide Beobachter in einem Gravitationsfeld g . Beobachter 1 hält seinen Abstand zur Erdoberfläche konstant, spürt also das Feld. Beobachter 2 bewegt sich in einem freien Inertialsystem. Die Situation ist äquivalent zu der Darstellung in Teil (b). Beobachter 2 bewegt sich frei entlang einer Geodäten. Beobachter 1 erfährt eine konstante Beschleunigung. Die Eigenzeit zwischen Ereignis A und B ist daher für Beobachter 2 länger.

Wir wollen nun unter Ausnutzung des Äquivalenzprinzips qualitativ herleiten, wie sich Uhren in einem Gravitationsfeld verhalten. Dazu vergleichen wir zunächst zwei Beobachter 1 und 2 (siehe Abb.7.3). Beobachter 1 sei in einem konstanten Gravitationsfeld „in Ruhe“; er hält beispielsweise seinen Abstand zur Quelle des Gravitationsfeldes (der Erdoberfläche) unter Ausnutzung einer anderen Kraft (beispielsweise der elektromagnetischen Kraft, die in einem Raketenantrieb wirksam ist) konstant. Beobachter 2 hingegen bewegt sich auf einer inertialen Bahnkurve, zum Beispiel in einem mit großer Geschwindigkeit abgeschossenen und dann frei fallenden Satelliten. Der Moment der Trennung der beiden Beobachter sei Ereignis A , der Moment des Zusammentreffens sei Ereignis B . Beide Beobachter haben auf ihren Uhren die Zeit zwischen Ereignis A und B gemessen. Was stellen sie fest?

Dieses Problem lässt sich mit Hilfe des Äquivalenzprinzips besonders einfach auf ein Problem der speziellen Relativitätstheorie zurückführen. Wir können nämlich auch sagen, dass sich Beobachter 2 entlang einer Geodäten bewegt hat (in seinem System gelten die physikalischen Gesetze eines Inertialsystems), im Minkowski-Raum also entlang einer geraden Linie, und Beobachter 1 wurde konstant beschleunigt. Er entfernt sich zunächst bei Ereignis A mit großer Geschwindigkeit von Beobachter 1, aber seine Beschleunigung ließ ihn immer langsamer werden, bis sich seine Geschwindigkeit um-

kehrte und er schließlich bei Ereignis B wieder mit Beobachter 1 zusammentraf. Nun wissen wir in der speziellen Relativitätstheorie, dass die Eigenzeit von Beobachter 2 länger ist als die Eigenzeit von Beobachter 1. Die Situation entspricht genau dem Beispiel des Zwillingsparadoxons, wobei 1 der „reisende Astronaut“ ist und 2 der rascher alternde Zwilling, der zu Hause zurückbleibt.

Da die physikalische Situation in beiden Fällen nach dem Äquivalenzprinzip die gleiche ist, bedeutet das, dass für den Beobachter 1 im Gravitationsfeld die Uhr langsamer geht als für den Beobachter 2, der sich scheinbar entlang einer längeren Linie bewegt, allerdings in einem Inertialsystem. Die Allgemeinen Relativitätstheorie besagt somit, dass Uhren im Gravitationsfeld langsamer gehen.

Diese letzte Bemerkung erfordert noch eine Erklärung: Was genau bedeutet „Uhren gehen im Gravitationsfeld langsamer?“ Zunächst einmal verlangt „langsamer“ nach einem Vergleich bzw. einer Referenz – langsamer im Vergleich zu was? Gemeint ist hier der Vergleich zu der Uhr, die sich nicht im Gravitationsfeld befindet (bzw. einer Beschleunigung unterliegt). Wir können jedoch nicht einfach das Gravitationsfeld abschalten (das war eine der Forderungen an eine „universelle Kraft“). In dem oben diskutierten Beispiel ist offensichtlich, welche zwei Uhren wir miteinander vergleichen. Diese Uhren haben aber unterschiedliche Weltlinien durchlaufen. Statt zu sagen, Uhren gehen im Gravitationsfeld langsamer, sollten wir besser sagen: Die Weltlinie entlang eines Weges, bei dem die Uhr den Einfluss der Gravitation spürt, ist kürzer. Eine gute Uhr setzt den Maßstab und geht nicht langsamer. Wenn wir trotzdem manchmal sagen „Uhren gehen im Gravitationsfeld langsamer“, ist diese Bedeutung gemeint, obwohl diese Sprechweise streng genommen irreführend ist.

7.2.2 Rotverschiebung

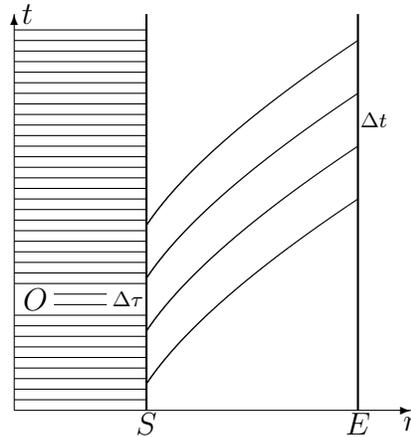
An einem ganz ähnlichen Gedankenexperiment lässt sich auch die Rotverschiebung von Licht im Gravitationsfeld verstehen. Beobachter S (der Sender) befinde sich in einem Gravitationsfeld, Beobachter E (Empfänger) sei außerhalb dieses Gravitationsfeldes. Beide Beobachter halten konstanten Abstand. Beobachter S benutzt nun eine Referenzfrequenz, beispielsweise die Frequenz einer bestimmten Spektrallinie eines Atoms, und sendet in entsprechendem Takt Signale zu Beobachter E . Zwischen der Ankunft zweier Signale vergeht für Beobachter E aber mehr Zeit, als zwischen den Absendezeiten für Beobachter S . Da es sich um Frequenzen handelt, sieht Beobachter E die entsprechende Spektrallinie also rotverschoben.

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass die g_{00} -Komponente der Metrik von der Form

$$g_{00} = 1 - 2 \frac{\phi(x)}{c^2} \quad (7.4)$$

ist (vgl. Gleichung 7.26), wobei $\phi(x) = GM/r$ das klassische Newton'sche Potenzial

Abbildung 7.4: Rotverschiebung von Licht. Von der Weltlinie eines Senders S an der Oberfläche O eines massiven Körpers wird in regelmäßigen Abständen ein Lichtsignal ausgesandt. Die Signale verlaufen zwar in der angegebenen Karte parallel, aber der Eigenzeitabstand $\Delta\tau$ zwischen zwei Ereignissen beim Sender ist kürzer als der Eigenzeitabstand Δt beim Empfänger E . Daher sieht E die Farbe von Licht rotverschoben.



einer kugelsymmetrischen Gravitationsquelle der Masse M (noch geteilt durch die Masse eines Probekörpers) ist. Damit folgt als Beziehung zwischen den Eigenzeiten:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - 2\frac{\phi(x)}{c^2}} \Delta t. \quad (7.5)$$

7.3 Periheldrehung des Merkur

Nach der Newton'schen Gravitationstheorie ist die Ellipsenbahn eines einzelnen um eine schwere Masse (z.B. die Sonne) rotierenden Körpers in einem Inertialsystem konstant, d.h., die Lage der großen Halbachse oder auch der Vektor vom Massenzentrum zum Perihel bleiben zeitlich konstant. Dies ist die Folge einer zusätzlichen Erhaltungsgröße, die als Lenz-Runge-Vektor bekannt ist. Der Lenz-Runge-Vektor zeigt vom Kraftzentrum zum Perihel (dem Punkt mit dem kürzesten Abstand der Bahnkurve zum Kraftzentrum) und ist proportional zur Exzentrizität der Ellipse.

Für die meisten Planetenbahnen ist jedoch bekannt, dass sich ihr Perihel im Laufe der Zeit langsam auf einer Kreisbahn um das Kraftzentrum dreht. Diese Periheldrehung ist für den Planeten Merkur am größten und beträgt in einem Inertialsystem rund 575,2 Bogensekunden pro Jahrhundert. Der Großteil dieser Periheldrehung – rund 532,1 Bogensekunden pro Jahrhundert – lässt sich auf Einflüsse der anderen Planeten sowie eine nicht kugelförmige Massenverteilung der Sonne zurückführen. Die Differenz zwischen dem gemessenen und dem aus der Newton'schen Theorie berechneten Wert beträgt rund 43,1 Bogensekunden pro Jahrhundert.

Dieser Wert ist zu groß, als dass man ihn als „Dreckeffect“ wegdiskutieren könnte. Mitte des 19. Jahrhunderts gab es daher Vorschläge, einen weiteren Planeten – Vulkan – zu postulieren, der sich so nah an der Sonne befinden sollte, dass man ihn (mit damaligen Mitteln) nicht beobachten kann.

Eine genauere Rechnung (siehe z.B. [12], Kap. 27) ergibt für die Periheldrehung

pro Umlauf:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 p} \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3}. \quad (7.6)$$

Hierbei ist p der harmonische Mittelwert der beiden Halbachsen – für die Merkurbahn gilt $p = 55 \cdot 10^6$ km – und somit ein fester Ellipsenparameter:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}, \quad (7.7)$$

und β und γ sind zwei Parameter der Robertson-Entwicklung (siehe Abschnitt 8.1), die sich für die Schwarzschild-Lösung zu $\beta = \gamma = 1$ ergeben (Gl. 8.8). Setzt man Werte ein, so erhält man pro Umlauf $\Delta\phi = 0,104$ Bogensekunden oder im Jahrhundert (der Merkur hat in einem Jahrhundert 415 Sonnenumläufe): $\Delta\phi = 43,0$ Bogensekunden.

Erstaunen mag zunächst, dass für $\beta = \gamma = 0$, also in der Newton'schen Näherung der Schwarzschild-Lösung, der Defektwinkel $\Delta\phi$ in Gl. 7.6 nicht verschwindet, sich also nicht das klassische Ergebnis des Kepler-Problems ergibt. Der Grund ist, dass zwar das Gravitationspotenzial in der Newton'schen Näherung angesetzt wird, die Bewegungsgleichung zur Bestimmung der Bahnkurven in diesem Potenzial aber immer noch relativistisch ist. Die relativistische Lösung des Wasserstoffproblems (hier wird das Gravitationspotential durch das elektromagnetische Potential ersetzt, was – zumindest nach der gängigen Theorie – nicht zu einer Veränderung der Raumzeitgeometrie führt) hat ebenfalls keine stabilen Ellipsenkurven.

7.4 Gravitationswellen

Auch ohne „Materie“ – ausgedrückt durch den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ – haben die Einstein'schen Feldgleichungen nicht-triviale Lösungen. Eine Klasse von Lösungen der freien Feldgleichungen bilden die Gravitationswellen. In diesem Fall interessiert man sich für Metriken, die sich nur wenig von der Metrik der flachen Raum-Zeit – der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ – unterscheiden. Daher bietet sich die Aufspaltung

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (7.8)$$

an. Man interessiert sich nun für die sogenannten linearisierten Einstein-Gleichungen, d.h. es werden nur Terme in linearer Ordnung in ϵ berücksichtigt.

In dieser Näherung ergibt sich für die Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu} h_{\kappa\nu} + \partial_{\nu} h_{\mu\kappa} - \partial_{\kappa} h_{\mu\nu}) \quad (7.9)$$

(Dieses Ergebnis ist sogar exakt, wenn man $\eta^{\lambda\kappa}$ durch $g^{\lambda\kappa}$ ersetzt.) Für den Riemann'schen Krümmungstensor erhalten wir:

$$R^{\lambda}_{\mu\gamma\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu\gamma}^2 h_{\kappa\nu} + \partial_{\kappa\nu}^2 h_{\mu\gamma} - \partial_{\mu\nu}^2 h_{\kappa\gamma} - \partial_{\kappa\gamma}^2 h_{\mu\nu}). \quad (7.10)$$

(Hier ergeben die in den Christoffel-Symbolen quadratischen Terme in der linearen Näherung keinen Beitrag.) Die Verkürzung über den mittleren unteren Index mit dem oberen führt auf den Ricci-Tensor:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial^2 h_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right). \quad (7.11)$$

Wie in Abschnitt 6.5 gezeigt wurde, muss für eine Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen im Vakuum der Ricci-Tensor verschwinden. Man erhält so eine lineare Differentialgleichung für $h_{\mu\nu}$:

$$\square h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 h^\rho{}_\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\rho{}_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\rho{}_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\rho} = 0. \quad (7.12)$$

Eine infinitesimale Koordinatentransformation

$$y^\mu = x^\mu + \epsilon f^\mu(x) \quad \text{bzw.} \quad dy^\mu = dx^\mu + \epsilon \frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (7.13)$$

soll die Metrik natürlich nicht ändern, d.h.

$$\hat{g}_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7.14)$$

Die Funktion $h_{\mu\nu}$ transformiert sich in diesem Fall wie

$$\hat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (7.15)$$

Die Funktionen $f^\mu(x)$ sind dabei (im physikalischen Sinne) beliebig, und die obige Gleichung beschreibt die Auswirkung einer solchen *Eichtransformation* auf die Funktion $h_{\mu\nu}$. Ähnlich wie in der Elektrodynamik können wir also eine Eichung wählen, für die die Feldgleichungen eine besonders einfache Form annehmen. Hier wählt man üblicherweise

$$2 \frac{\partial h^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial h^\mu{}_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (7.16)$$

Durch eine geeignete Wahl von f_μ lassen sich diese vier Bedingungen immer erfüllen. In dieser Eichung lauten die linearisierten freien Feldgleichungen:

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (7.17)$$

Dies ist eine gewöhnliche Wellengleichung für die Komponenten $h_{\mu\nu}$. Die Eichbedingung führt allerdings zu Einschränkungen zwischen den verschiedenen Komponenten.

Auch wenn es noch keine zufriedenstellende Quantentheorie der Gravitation gibt, so kann man doch vermuten, dass im Grenzfall kleiner Raum-Zeit-Fluktuationen die Quantentheorie der Gravitation durch eine quantisierte Form obiger Wellengleichung gegeben ist. Die zugehörigen Teilchen bezeichnet man als Gravitonen. Als Quantenzahlen zum Eigendrehimpuls $h\hbar$ der Gravitonen treten zunächst die Werte $h =$

$0, \pm 1, \pm 2$ auf, was Gravitonen als Spin-2-Teilchen kennzeichnet. Die Helizitäten zu $h = 0$ und $h = \pm 1$ gibt es jedoch nicht (ähnlich, wie es auch die Helizität $m = 0$ für das Photon als Spin-1-Teilchen nicht gibt – da das Photon keine Masse hat, gibt es auch keine transversalen Freiheitsgrade). Lediglich die Helizitäten $h = \pm 2$ entsprechen daher der physikalischen Polarisation einer Gravitationswelle bzw. dem Zustand eines Gravitons (vgl. [12], Kap. 29 und 38).

Man versucht heute mit Hilfe von Laserinterferenzexperimenten (im Wesentlichen riesige Michelson-Morley-Interferometer) Gravitationswellen nachzuweisen. Bisher ist ein direkter Nachweis noch nicht gelungen, allerdings gibt es indirekte Hinweise auf Gravitationswellen: An Doppelpulsarsystemen (das bekannteste ist das System PSR 1913+16) beobachtet man über die Jahre hinweg eine Verkürzung der Umlaufzeiten (Abb. 7.5). Diese beruht auf einem Energieverlust, der nach der ART berechnet werden kann und im Wesentlichen in einer Abstrahlung von Gravitationswellen besteht.

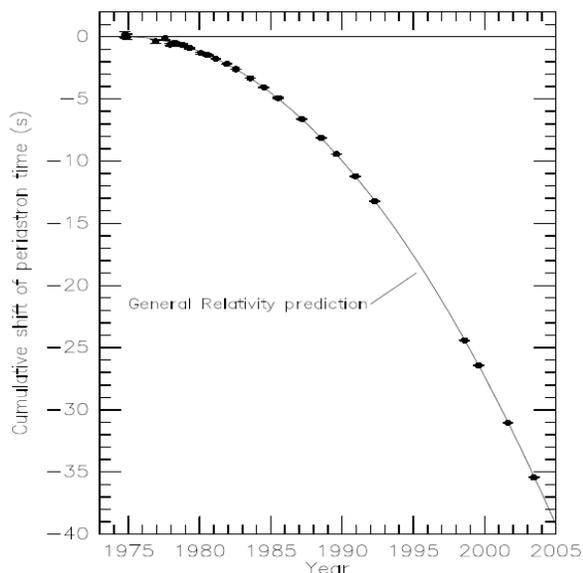


Abbildung 7.5: Periodenverkürzung des Periastrons (der Punkt, bei dem ein Stern eines Doppelstern-Systems seinem Partner am nächsten ist) bei dem Doppelstern-System PSR 1913+16. Die Verkürzung beruht im Wesentlichen auf einer Abstrahlung von Gravitationswellen. (Aus [32])

7.5 Die Newton'sche Näherung

Die Geodätengleichung (6.47) entspricht der Bewegungsgleichung für ein Teilchen unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes. In der Newton'schen Näherung sollte diese Gleichung somit in

$$\frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi(x) \quad (7.18)$$

übergehen, wobei

$$\phi(x) = -G \frac{M}{|\vec{x}|} \quad (7.19)$$

das Gravitationspotential eines Massepunktes bzw. Zentralkraftfelds (dividiert durch die Probemasse) ist. Für den Minkowski-Raum verschwinden die Christoffel-Symbole und man erhält die freie Bewegungsgleichung. Also muss für die Newton'sche Näherung eine nicht-triviale Metrik angenommen werden.

Wenn wir den Grenzfall $v \ll c$ oder

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \quad (7.20)$$

betrachten (das bedeutet, die Vierergeschwindigkeit hat praktisch nur eine Zeitkomponente), folgt für die Beschleunigung:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \approx -\Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2. \quad (7.21)$$

Außerdem sind wir an statischen Lösungen interessiert, bei denen die Metrik keine explizite Zeitabhängigkeit hat. In diesem Fall ist $\Gamma_{00}^0 = 0$ und $\Gamma_{00}^k = \frac{1}{2} \partial^k h_{00}$. Das bedeutet, in unserer Näherung ist

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c. \quad (7.22)$$

Weiterhin folgt

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x_k} c^2 \quad (7.23)$$

oder

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} c^2. \quad (7.24)$$

Ein Vergleich mit Gl. 7.18 gibt uns

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} \quad \text{oder} \quad g_{00} = 1 - \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (7.25)$$

Damit die Einstein'sche ART im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten und kleiner statischer Variationen der Metrik (d.h. für große Abstände von einer Massenkonzentration) mit der Newton'schen Theorie übereinstimmt, muss in diesem Grenzfall die Komponente g_{00} der Metrik die Form

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (7.26)$$

haben. Der Parameter M hat die Interpretation der Newton'schen Masse. Über die anderen Komponenten der Metrik können wir nichts aussagen. Insbesondere können wir nicht annehmen, dass diese in irgendeinem Sinne klein im Vergleich zu g_{00} sind. Zur Bewegungsgleichung tragen sie in dem Grenzfall $v^i \ll c$ nicht bei.

Nahe der Erdoberfläche können wir näherungsweise $\phi = gh$ setzen (h parametrisiert die Höhe über dem Erdboden) und erhalten

$$g_{00} = 1 - \frac{2gh}{c^2}. \quad (7.27)$$

7.6 Gravity B Probe

Am 20. April 2004 wurde mit einer Rakete ein Satellit in die Erdumlaufbahn gebracht, dessen Ziel die Messung der Raumkrümmung in der Nähe der Erde war. Das als „Gravity B Probe“ bekannte Experiment wurden in der Zeit bis Ende 2005 durchgeführt, die Auswertung der Daten dauerte mehrere Jahre. Zur Ausmessung der Raumkrümmung bediente man sich mehrerer hoch empfindlicher Gyroskope.

Die Idee des Experiments beruhte darauf, dass der Drehimpuls ein Vektor ist, der – sofern andere Einflüsse als die Gravitation ausgeschaltet werden können – entlang einer Weltlinie parallel verschoben wird. Den 4-Vektor s^μ erhält man aus der Forderung, dass der Vektor im Bezugssystem des Gyroskopes durch $(0, s^i)$ (eine verschwindende Zeitkomponente und die drei räumlichen Komponenten des Drehimpulses) gegeben ist. Die Präzession im Gravitationsfeld erfolgt daher nach der Gleichung

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu s^\lambda, \quad (7.28)$$

wobei $u^\nu(\tau)$ die Komponenten des Tangentialvektors (in der Eigenzeitparametrisierung) an die Bahnkurve der Verschiebung sind. Damit kann man aus einer Rotation der Drehimpulsachse auf bestimmte Komponenten der Metrik schließen.

Gravity B Probe sollte zwei Effekte der Raumkrümmung messen:

1. Die Raumkrümmung durch die Masse der Erde, wie sie sich beispielsweise aus einer Schwarzschild-Metrik (siehe nächstes Kapitel) für große Abstände vom Horizont ergibt. Der zu erwartende Effekt aufgrund dieses Einflusses war pro Jahr rund 6600 Millibogensekunden, um den die Drehachse verschoben wird.
2. Den so genannten *Lense-Thirring-Effekt*, wonach die Raumzeit in der Umgebung eines rotierenden Körpers von diesem „mitgezogen“ wird, was zu einer schwachen Verdrillung der Raumzeit in der Umgebung eines rotierenden Körpers führt. Man kann diesen Effekt z.B. aus der Kerr-Lösung (siehe ebenfalls nächstes Kapitel) für ein rotierendes Schwarzes Loch in großem Abstand erhalten. Hier betrug der zu erwartende Effekt rund 40 Millibogensekunden pro Jahr.

Insbesondere der Lense-Thirring-Effekt ist in der Umgebung der Erde winzig und erforderte eine sehr große Präzision sowohl bei den Gyroskopen als auch bei den Geräten zur Messung der Rotation der Drehimpulsachsen. Trotzdem konnte der Effekt mit rund 1% Genauigkeit nachgewiesen werden.

Kapitel 8

Schwarze Löcher und ART-Kosmologie

Die wohl spektakulärsten Vorhersagen der Einstein'schen Feldgleichungen beziehen sich auf Schwarze Löcher. Einige Lösungen kennt man in analytischer Form, dazu gehören die bekannte Schwarzschild-Lösungen eines ruhenden ungeladenen Schwarzen Lochs, die Kerr-Lösung für ungeladene rotierende Schwarze Löcher, die Reissner-Nordström-Lösung für ruhende geladene Schwarze Löcher und schließlich die Kerr-Newman-Lösung für rotierende geladene Schwarze Löcher. Außerdem gibt es Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen, die kosmologische Modelle beschreiben – die bekannteste Lösung ist in diesem Fall die Friedman-Lösung bzw. Robertson-Walker-Metrik.

8.1 Isotrope, statische Lösungen

Bevor wir uns konkret mit der Schwarzschild-Metrik beschäftigen, betrachten wir den allgemeineren Fall einer isotropen, statischen Geometrie. Die genauen Lösungen hängen vom Energie-Impuls-Tensor ab. Hier geht es mir jedoch nur um vorbereitende Bemerkungen zur allgemeinen Form solcher Geometrien. Die folgenden Überlegungen sind größtenteils dem Buch von Fließbach entnommen [12].

8.1.1 Standardform einer asymptotisch flachen isotropen und statischen Metrik

Neben „isotrop und statisch“ verlangen wir noch, dass die Lösung asymptotisch für sehr große Werte der Koordinate r (die eine räumlich radiale Achse vom Zentrum der Lösung parametrisiert) gegen die Minkowski-Metrik gehen soll, also in Kugelkoordinaten

naten:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8.1)$$

„Isotrop“ bedeutet, dass die Abhängigkeit der Metrik von den Winkeln θ und φ unverändert bleibt. „Statisch“ soll sich in diesem Fall auf den Zeitparameter t beziehen, d.h. auf die physikalische Zeit eines „unendlich“ weit entfernten Beobachters. Die Metrik soll nicht von diesem Zeitparameter abhängen.

Ganz allgemein setzen wir für eine solche Metrik die folgende Form an:

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - C(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8.2)$$

Wegen der Isotropie kann es keine gemischten Terme in den Winkeln geben, und einen gemischten Term der Form $dt dr$ kann man immer durch eine geeignete Umdefinition $t' = t + \psi(r)$ loswerden. Für $r \rightarrow \infty$ muss $\psi(r)$ verschwinden und damit hat auch t' asymptotisch immer noch die Bedeutung der physikalischen Zeit eines weit entfernten Beobachters. Ebenso hat r in diesem Grenzfall die Bedeutung einer gewöhnlichen Radialkoordinate. Die Winkel θ und φ sind ohnehin die gewöhnlichen Winkel in Kugelkoordinaten.

Zusätzlich zu diesen Einschränkungen können wir immer noch eine Umparametrisierung von r vornehmen, sodass wir den Term $C(r)$ loswerden. Auch dies ändert asymptotisch an der Interpretation von r nichts. Als *Standardform* einer isotropen, statischen Metrik bezeichnet man daher folgende Parametrisierung:

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8.3)$$

In dieser Parametrisierung hat eine Kugelschale für einen Abstand, der durch den Parameter r charakterisiert ist, eine Fläche von $4\pi r^2$. Allerdings bezeichnet r nun nicht mehr den physikalischen Abstand vom Ursprung; dieser ist durch

$$R(r) = \int_0^r \sqrt{A(r')} dr' \quad (8.4)$$

gegeben. Insofern verhält sich die Fläche einer Kugelschale als Funktion des Abstands $R(r)$ vom Ursprung nicht wie im Euklidischen. Dadurch kann der dreidimensionale Raum eine Krümmung haben. Betrachten wir eine zweidimensionale Fläche für feste Werte von t und r , also parametrisiert durch θ und φ , so handelt es sich um eine gewöhnliche Kugeloberfläche.

8.1.2 Robertson-Entwicklung

Bei der experimentellen Überprüfung der ART ist man oft an dem Verhalten der Lösungen für große Wert von r interessiert, also an den führenden Korrekturen zur Minkowski-Raumzeit. Dazu betrachtet man eine Entwicklung der Funktionen $A(r)$

und $B(r)$ für große Werte von r . Da $A(r)$ und $B(r)$ dimensionslos sind, können sie nur Funktionen einer dimensionslosen Größe sein, doch aus G , c und r (das sind die Parameter, die uns zunächst zur Verfügung stehen) erhalten wir keine dimensionslose Größe. Die Lösung muss durch mindestens einen weiteren Parameter, den wir mit M bezeichnen und der sich im Prinzip aus dem Energie-Impuls-Tensor ergeben sollte, charakterisiert sein. M ist ein Massenparameter, der durch die führende Korrektur, die der Newton'schen Gravitation entspricht, definiert ist. (Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass sich die Schwarzschild-Lösung als Lösung der Vakuumgleichungen $-T_{\mu\nu} = 0$ ergibt. Trotzdem enthält die Lösung einen Parameter M . Dies ist ähnlich wie in der Newton'schen Mechanik, wo das Gravitationspotenzial zu einer Punktmasse bei $r = 0$ nicht definiert ist, aber außerhalb von $r = 0$ eine Lösung der Vakuumgleichungen ist. Die „Stärke der Singularität“ bei $r = 0$ definiert den Massenparameter.)

Wir nehmen nun an, dass für große Abstände vom Zentrum der Verteilung nur dieser eine Parameter M relevant ist. Dann ist GM/c^2r dimensionslos und wir können schreiben:

$$A(r) = 1 + 2\beta \frac{GM}{c^2r} + \dots \quad (8.5)$$

$$B(r) = 1 - 2\alpha \frac{GM}{c^2r} + 2(\gamma - \beta) \left(\frac{GM}{c^2r} \right)^2 + \dots \quad (8.6)$$

(Die seltsame Kombination der Parameter α, β, γ hat historische Gründe.) Diese Entwicklung bezeichnet man als *Robertson-Entwicklung*. Wie wir schon in Abschnitt 7.5 gesehen haben, gilt für den Newton'schen Grenzfall:

$$\text{Newton: } \alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0. \quad (8.7)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Schwarzschild-Lösung der ART folgende Werte liefert:

$$\text{ART: } \alpha = \beta = \gamma = 1. \quad (8.8)$$

Diese Parameter haben wir auch schon im Zusammenhang mit der Lichtablenkung (Abschnitt 7.1) und der Periheldrehung (Abschnitt 7.3) betrachtet.

8.1.3 Der Ricci-Tensor als Funktion von $A(r)$ und $B(r)$

Wir können nun aus der Metrik (8.3) bzw.

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (B(r), -A(r), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) \quad (8.9)$$

die Christoffel-Symbole, den Riemann'schen Krümmungstensor und den Ricci-Tensor berechnen. Man benötigt dazu noch, dass die Metrik mit oben stehenden Indizes das Inverse der normalen Metrik ist, also

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(\frac{1}{B(r)}, -\frac{1}{A(r)}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (8.10)$$

Die Rechnung ist in [12] durchgeführt. Hier beschränke ich mich auf das Ergebnis für den Ricci-Tensor:

$$R_{00} = R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} \quad (8.11)$$

$$R_{11} = R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} \quad (8.12)$$

$$R_{22} = R_{\theta\theta} = -1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} \quad (8.13)$$

$$R_{33} = R_{\varphi\varphi} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (8.14)$$

Alle gemischten Terme verschwinden: $R_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$.

8.2 Schwarze Löcher – Schwarzschild-Metrik

Eine der ersten nicht-trivialen Lösung der materiefreien Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie fand 1916 der deutsche Astronom Karl Schwarzschild (*geb. 9.10.1873 in Frankfurt am Main; gest. 11.5.1916 in Potsdam*). Diese Schwarzschild-Metrik beschreibt nicht nur schwarze Löcher, sondern auch das Gravitationsfeld in der Umgebung von Sternen oder Planeten. Daher kann man diese Lösung zur Berechnung der Periheldrehung des Merkur oder der Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne heranziehen.

8.2.1 Klassische Berechnung des kritischen Radius

Schon im Jahre 1783 entwickelte der Geologe John Michell die Vorstellung „Dunkler Sterne“, von denen wegen ihrer Masse kein Licht entweichen kann. Seine Überlegungen basierten auf der Newton'schen Mechanik und setzten voraus, dass sich Licht wie jede andere Materie verhält (im Sinne der Korpuskeltheorie des Lichts von Newton). Ausgangspunkt seiner Überlegungen war die klassische Fluchtgeschwindigkeit.

Ein Probekörper der Masse m , der im Unendlichen in Ruhe ist ($v = 0$) und frei fallend auf einen schweren Körper der Masse M zufällt, hat im Abstand r die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{r} \quad (8.15)$$

und damit die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2G\frac{M}{r}}. \quad (8.16)$$

Dies ist umgekehrt die Fluchtgeschwindigkeit beim Radius r aus dem Feld eines Körpers der Masse M . Nach klassischen Überlegungen hat er somit die Lichtgeschwindigkeit c bei einem Abstand:

$$R_{\text{S}} = \frac{2GM}{c^2}. \quad (8.17)$$

Wenn der Radius des schweren Körpers der Masse M kleiner als R_S ist, kann somit selbst Licht diesem Körper nicht entweichen, da die Fluchtgeschwindigkeit größer als c wäre. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist diese Gleichung für einen kritischen Radius (dem Radius des Horizonts eines schwarzen Lochs – dem Schwarzschild-Radius) auch in der Relativitätstheorie exakt.

Ein solcher Körper benötigt nicht unbedingt eine sehr hohe Dichte, sofern er nur groß genug ist. Ausgedrückt durch die Dichte ist die Masse eines Körpers vom Radius R

$$M = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (8.18)$$

Setzen wir dies in Gleichung 8.17 für den kritischen Radius ein, erhalten wir die Bedingung:

$$R = \frac{2G}{c^2} \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \text{oder} \quad R = c \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho G}}. \quad (8.19)$$

Mit

$$G = 6,6738 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad (8.20)$$

und der Dichte von Wasser, also $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kommen wir zu einem Radius von rund $R = 4 \cdot 10^8 \text{ km}$ oder dem rund 2,5-fachen des Abstands Erde–Sonne. Ein Körper dieser Größe mit der Dichte von Wasser hätte einen Radius, der gleich seinem Schwarzschild-Radius ist.

8.2.2 Herleitung der Schwarzschild-Lösung

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben (vgl. Gl. 6.63), lassen sich die Einstein'schen Feldgleichungen ohne Materie (also für $T_{\mu\nu} = 0$) in der Form

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (8.21)$$

schreiben. Wir verwenden nun die Komponenten des Ricci-Tensors für die Standardform der isotropen, statischen Lösung (Gl. 8.11–8.14), um eine Lösung zu finden. Auch hierbei halte ich mich eng an [12]. Es muss gelten: $R_{00} = R_{11} = R_{22} = 0$. (Wegen Gl. 8.14 folgt aus $R_{22} = 0$ auch $R_{33} = 0$.) Wir bilden die Summe

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) = 0, \quad (8.22)$$

was auf

$$\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) = \frac{d}{dr} \ln(AB) = 0 \quad (8.23)$$

führt. Daraus folgt

$$A(r)B(r) = \text{const}, \quad (8.24)$$

und wegen des asymptotischen Verhaltens von $A(r)$ und $B(r)$ für große Werte von r ist die Konstante 1, also

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (8.25)$$

Wir nutzen diese Beziehung in R_{11} und gelangen zu der Gleichung

$$R_{22} = -1 + rB' + B = 0. \quad (8.26)$$

Da R_{22} identisch verschwinden soll, muss auch die Ableitung verschwinden und damit folgt:

$$\frac{dR_{22}}{dr} = B' + rB'' + B' = rB'' + 2B' = 0. \quad (8.27)$$

Setzen wir Gl. 8.25 in R_{11} ein, erhalten wir

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = \frac{rB'' + 2B'}{2rB}. \quad (8.28)$$

Wegen Gl. 8.27 verschwindet dieser Ausdruck aber, also ist $R_{11} = 0$ (und damit wegen Gl. 8.22 auch $R_{00} = 0$), sofern R_{22} verschwindet. Wir haben also nur noch Gleichung 8.26 zu lösen. Da $(rB)' = rB' + B$ führt dies auf:

$$\frac{d(rB)}{dr} = 1. \quad (8.29)$$

Aus dieser Gleichung folgt $rB = r - 2a$, wobei wir die freie Integrationskonstante mit $-2a$ bezeichnet haben. Damit erhalten wir als Lösungen:

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r} \quad \text{und} \quad A(r) = \frac{1}{1 - 2a/r}. \quad (8.30)$$

Die Minkowski-Metrik $A(r) = B(r) = 1$ ergibt sich aus dem Spezialfall $a = 0$.

Die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten a ergibt sich aus einem Vergleich mit der Newton'schen Näherung (siehe Abschnitt 7.5, Gl. 7.26). Für große Werte von r sollte die Lösung dem Newton'schen Grenzfall entsprechen, und damit erhalten wir

$$a = GM/c^2. \quad (8.31)$$

8.2.3 Die Schwarzschild-Lösung

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, lässt sich die Schwarzschild-Metrik als statische und rotationssymmetrische Lösung schreiben, d.h. sie hängt in diesem Fall nur von einer Koordinate ab – dem Radius r vom Zentrum der Lösung:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM/(c^2 r)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \quad (8.32)$$

Außerdem enthält die Schwarzschild-Metrik noch einen Parameter M , der die Stärke des Gravitationsfeldes in einem bestimmten Abstand angibt. M wird meist so gewählt, dass die Schwarzschild-Lösung für $r \rightarrow \infty$ einem Newton'schen Gravitationspotential einer Masse M im Abstand r entspricht.

Der winkelabhängige (letzte) Term der Metrik entspricht gewöhnlichen Kugelkoordinaten (vgl. Gl. 6.20). Die ersten beiden Terme werden bei

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (8.33)$$

singulär. R_S bezeichnet man auch als Schwarzschild-Radius. Vergleichen wir die Art der Singularität dieser beiden Elemente der Metrik mit der speziellen Kugelprojektion in Gl. 6.26, so entdeckt man (bis auf das relative Vorzeichen, das durch die Minkowski-Struktur hereinkommt) eine deutliche Ähnlichkeit, was die Vermutung nahelegt, dass es sich hierbei nur um eine Koordinatensingularität handelt.

Obwohl Eddington 1924 schon gezeigt hatte, dass es sich bei dieser Singularität nur um eine Koordinatensingularität handelt, blieb ihre Natur doch unklar. Bis in die sechziger Jahre schien man sich auch wenig dafür zu interessieren, da man sich kaum vorstellen konnte, dass schwarze Löcher wirklich existierten. Erst 1958 untersuchte David Finkelstein die Singularität in der Metrik genauer und „entdeckte“ das alte Ergebnis von Eddington wieder. Bei $r = 0$ gibt es allerdings wirklich eine geometrische Singularität, denn dort wird die Krümmung unendlich.

Veranschaulichungen der Schwarzschild-Metrik

Als ersten Schritt zum Versuch einer Veranschaulichung betrachten wir einen räumlichen Schnitt durch die Äquatorebene der Schwarzschild-Metrik. Das bedeutet, wir setzen $\theta = 0$ (dieser Winkel wird nicht variiert) und $t = \text{const}$ (diese Koordinate wird ebenfalls nicht variiert). Die verbleibende Metrik in der Äquatorebene ist somit:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - R_S/r} + r^2 d\varphi^2 \quad (8.34)$$

Wir suchen nun eine „Höhenfunktion“ $f(r)$ über der von r und φ parametrisierten Ebene, sodass die Projektion der Fläche $(r, \varphi, f(r))$ im \mathbb{R}^3 auf die Ebene (r, φ) die oben angegebene Metrik liefert. Nach den Überlegungen aus Abschnitt 6.2.1 wird die rr -Komponente der Metrik (alle anderen Komponenten werden nicht beeinflusst, da f nicht vom Winkel abhängen soll) zu

$$g_{rr} = \frac{\partial(r, \varphi, f(r))}{\partial r} \cdot \frac{\partial(r, \varphi, f(r))}{\partial r} = (1, 0, f'(r)) \cdot (1, 0, f'(r)) = 1 + (f'(r))^2. \quad (8.35)$$

Wir müssen also die Differentialgleichung

$$\frac{1}{1 - R_S/r} = 1 + f'^2 \quad (8.36)$$

bzw.

$$f'(r) = \sqrt{\frac{R_S}{r - R_S}} \quad (8.37)$$

lösen (zunächst nur für $r > R_S$). Das Ergebnis ist

$$f(r) = 2\sqrt{R_S}\sqrt{r - R_S}. \quad (8.38)$$

Wir erhalten somit einen Trichter von der Form einer Wurzelfunktion (siehe Abb. 8.1). Diesen Trichter bezeichnet man auch als Flamm'schen Paraboloid.

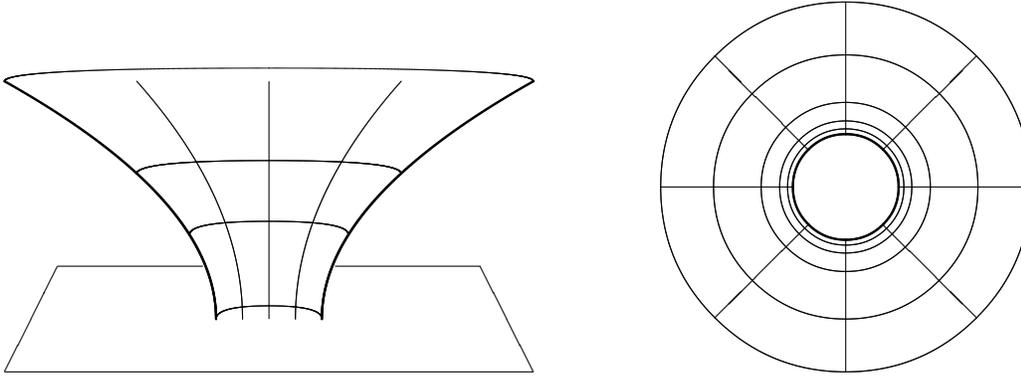


Abbildung 8.1: (links) Projiziert man den Trichter auf die (r, φ) -Ebene so induziert dieser eine Metrik, die gleich der Metrik der Schwarzschild-Lösung in der Äquatorialebene ist. (rechts) Die Dichte der Kreise, die auf dem Trichter einen konstanten Abstand voneinander haben, wird in dieser Karte immer höher, je näher man sich dem Schwarzschild-Radius nähert.

Obwohl $f(r)$ für sehr große Werte von r nicht verschwindet, ist die durch $f(r)$ induzierte Metrik für sehr große Werte von r gleich der Minkowski-Metrik, da die Ableitung von $f(r)$ für $r \rightarrow \infty$ gegen null geht.

Was passiert für $r < R_S$? In diesem Fall dreht sich das Vorzeichen in der rr -Komponente der Metrik um. Wir erhalten also für den Bereich innerhalb des Schwarzschild-Radius eine kausale Struktur in r -Richtung. Dies werden wir später noch diskutieren.

Nun betrachten wir die Schwarzschild-Metrik in (t, r) -Koordinaten (vgl. Abbildung 8.2). Wir haben in der Abbildung gleiche physikalische räumliche Distanzen auf der r -Achse markiert. In der Karte entsprechen diesen Distanzen immer kürzere Abstände. Man vergleiche dieses Verhalten mit den Abständen der Breitengraden auf einer Kugeloberfläche in einer senkrechten Zylinderprojektion auf die z -Achse (Abb. 6.1). Umgekehrt werden gleiche Eigenzeiten in t -Richtung in der Karte durch immer größere Abstände wiedergegeben (die Punkte auf der durchgezogenen Kurve haben von der r -Achse immer denselben senkrechten Abstand $\Delta\tau$). Dies entspricht den Verhältnissen für horizontale Abstände (entlang von Breitengraden) in Abb. 6.1. Dieselbe physikalische Distanz auf der Kugeloberfläche wird in der Karte durch immer größere Abstände in horizontaler Richtung wiedergegeben, wenn man sich den Polen nähert.

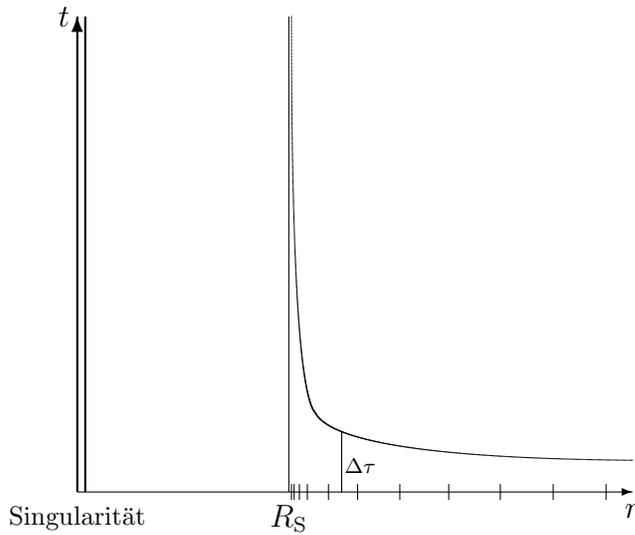


Abbildung 8.2: Schwarzschild-Metrik außerhalb des Schwarzschild-Radius. Physikalisch gleiche räumliche Abstände werden in der Karte durch immer kürzere Abstände dargestellt, wenn r sich dem Schwarzschild-Radius nähert. Andererseits entsprechen physikalisch gleiche Eigenzeitintervalle in t -Richtung immer größeren Intervallen in der Karte.

Weltlinien von Beobachtern

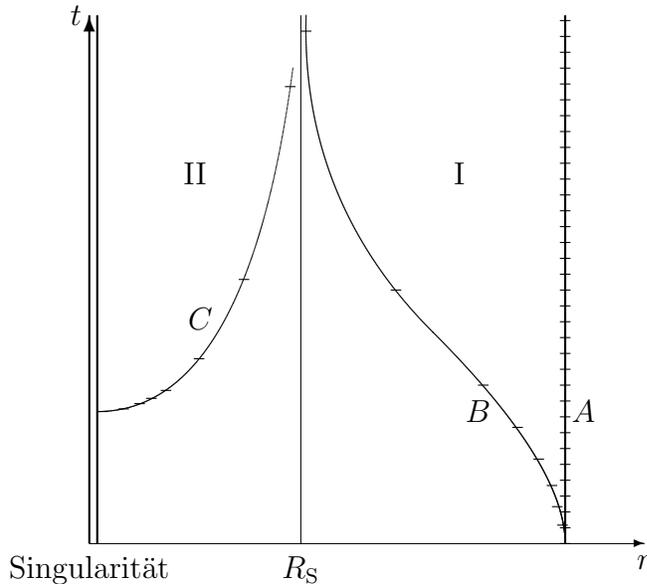


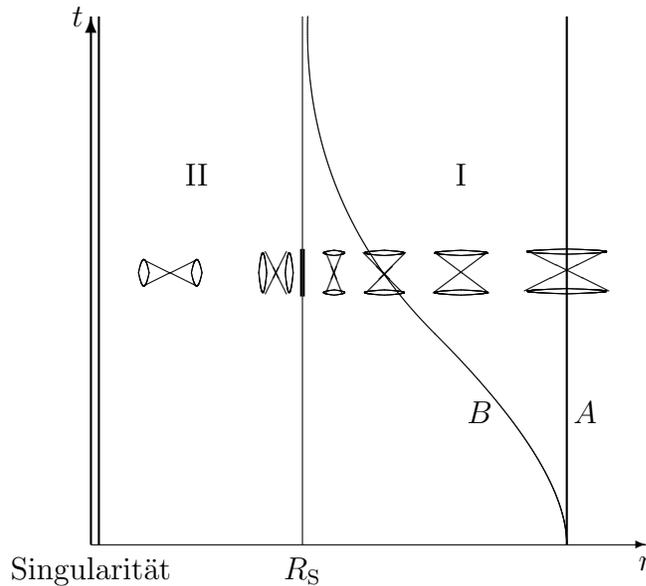
Abbildung 8.3: Schwarzschild-Metrik. Beobachter A hält einen konstanten Abstand von der Singularität; Beobachter B trennt sich von Beobachter A und fliegt frei auf das schwarze Loch zu. Die Markierungen auf den jeweiligen Weltlinien entsprechen (qualitativ) gleichen Taktzeiten. Bereich I entspricht $r > R_S$, Bereich II ist der Bereich innerhalb des Horizonts. Eine Weltlinie hinter dem Horizont (C) „kommt von oben“ und endet unweigerlich in der Singularität.

Abb. 8.3 skizziert die Verhältnisse zweier Beobachter im Feld der Schwarzschild-Metrik, ausgedrückt in den Koordinaten (t, r) , entsprechend der obigen Form (Gl. 8.32). Die Winkelvariable interessieren uns im Folgenden nicht weiter, da die Lösung rotationssymmetrisch ist. Die Koordinate t entspricht der Eigenzeit eines Beobachters in konstantem „unendlichen“ Abstand vom Schwarzen Loch und ist proportional zur Eigenzeit eines Beobachters A , der einen konstanten Abstand außerhalb vom Schwarzschild-

Radius hält. Nähert sich dieser Abstand dem Schwarzschild-Radius, so wird dieser Proportionalitätsfaktor kleiner, d.h. umso weiter liegen in diesen Koordinaten Takte konstanter Eigenzeit auf der Weltlinie auseinander. Am Schwarzschild-Radius wird dieser Faktor null. Die senkrechte Linie an diesem Punkt entspricht einer „Null-Linie“, d.h. zwei Punkte auf dieser Linie haben den Minkowski-Abstand Null.

Abbildung 8.4:

Lichtkegelstruktur der Schwarzschild-Metrik. Je kleiner r , umso enger wird der Lichtkegel in den Schwarzschild-Koordinaten. Beim Schwarzschild-Radius entartet der Kegel zu einer Linie (Öffnungswinkel null). Innerhalb des Horizonts haben r und t ihre Rollen als „räumliche“ und „zeitliche“ Koordinaten vertauscht.



Für einen Beobachter B , der sich von A trennt und „frei“ auf das schwarze Loch zufällt, werden die Intervalle gleicher Eigenzeit durch immer größere Abstände wiedergegeben. Dies wird durch die Markierungen in Abb. 8.3 symbolisiert. Integriert man die Länge der Weltlinie von B bis zum Wert $t = \infty$ (d.h. unendlicher Eigenzeit des Beobachters A) auf, so findet man einen endlichen Wert. Beobachter B erreicht somit den Schwarzschild-Radius nach einer für ihn endlichen Eigenzeit. Sein weiteres Schicksal wird aus dieser Darstellung zunächst nicht deutlich. Man kann jedoch seine Geodäte vervollständigen und erhält dabei eine Trajektorie C innerhalb des Schwarzschild-Radius, die in den angegebenen Koordinaten „von oben“ kommt und in der Singularität bei $r = 0$ endet.

Für $r < R_S$ haben die Koeffizienten von dt und dr ihre Vorzeichen gewechselt, d.h. innerhalb des Schwarzschild-Radius sind die Verhältnisse von „raumartig“ und „zeitartig“ umgekehrt: waagerechte Linien sind zeitartig und senkrechte Linien sind raumartig. Daher liegt die Singularität eigentlich in der zeitlichen Zukunft und ist raumartig.

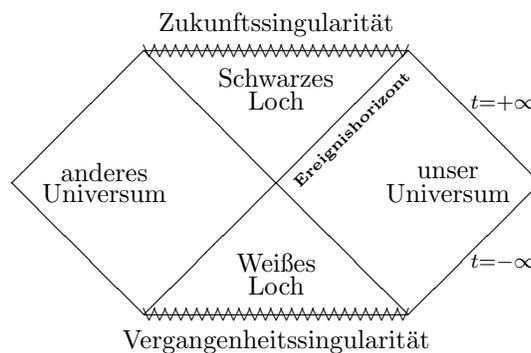
Das „Universum“ von Beobachter A ist der Bereich I. Er kann Bereich II innerhalb des Schwarzschild-Radius nicht einsehen. Der Schwarzschild-Radius bildet somit für A einen Ereignishorizont. Er sieht einen Beobachter B auf diesen Ereignishorizont zufliegen, allerdings bleibt B für alle Zeiten von A außerhalb dieses Bereichs. Er

muss eine Kraft aufwenden, um sich dem Einfluss des schwarzen Loches entziehen zu können, und spürt somit das Gravitationsfeld. Aus Bereich IV kann Strahlung in seine Welt dringen, nichts aus seiner Welt kann aber in diesen Bereich hinein. Man bezeichnet diesen Bereich manchmal auch als „weißes Loch“. Die Trennungsfläche zwischen Bereich I und II entspricht dem Ereignishorizont. Nichts, was einmal aus Bereich I in diesen Bereich gelangt ist, kann jemals wieder in den Bereich I zurück. Der äußere Beobachter A sieht den Beobachter B an der Oberfläche des Horizonts verschwinden, ganz ähnlich wie im Fall des Rindler-Universums.

Bereich III ist wiederum von Bereich I kausal getrennt. Für eine geodätisch vollständige Lösung – d.h. eine Lösung, für die jede Geodäte entweder fortgesetzt werden kann oder an einer Singularität endet – ist dieser Bereich jedoch notwendig. Er ist wie ein zweites Universum – ebenfalls außerhalb des schwarzen Loches – aber trotzdem mit I durch keine zeitartige Linie verbunden.

Eine ebenfalls elegante Darstellung von Lösungen der Einstein-Gleichungen sind so genannte Penrose-Diagramme. Hierbei handelt es sich um eine konforme Koordinatentransformation, d.h. Winkel werden getreu dargestellt, allerdings sind Längen verzerrt. Durch eine konforme Transformation lässt sich die Kruskal-Szekeres-Raumzeit auf ein Diagramm wie in Abb. 8.6 abbilden.

Abbildung 8.6: Penrose-Diagramm einer vervollständigten Schwarzschild-Lösung. Die Zukunftssingularität und die Vergangenheitssingularität entsprechen den horizontalen Linien am oberen und unteren Rand. Topologisch sind die Bereiche ähnlich dargestellt wie bei den Kruskal-Szekeres-Koordinaten. Lokal sind Lichtkegel immer unter $\pm 45^\circ$ geneigt, also wie bei einem gewöhnlichen Minkowski-Diagramm.



Durch die konforme Transformation wird der Bereich „unseres“ Universums endlich. Er wird oben rechts von der Zukunftslinie $t = +\infty$ berandet und unten rechts von der Vergangenheitslinie $t = -\infty$. Sämtliche Weltlinien in unserem Universum (die also nie einen Ereignishorizont überschreiten) beginnen auf der Linie unten rechts und enden auf der Linie oben rechts. Weltlinien aus unserem Universum, die den Ereignishorizont zum Schwarzen Loch überschreiten, enden an der Zukunftssingularität.

8.3 Schwarze Löcher mit Ladung und Drehimpuls

Geschlossene Lösungen der Einstein-Gleichung sind noch für Schwarze Löcher mit einer elektrischen Ladung Q und einem Drehimpuls J bekannt. Die Kerr-Newman-Metrik beschreibt eine Lösung mit allen drei Qualitätsmerkmalen. Sie lautet:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left((r^2 + a^2) d\varphi - a dt \right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (8.39)$$

mit folgenden Abkürzungen:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad a = \frac{J}{M}. \quad (8.40)$$

Für den Spezialfall $Q = 0$ und $J = 0$ wird diese Metrik zur Schwarzschild-Metrik (Gl. 8.32). Den Spezialfall $Q = 0$ und $J \neq 0$ bezeichnet man als Kerr-Metrik, und den Spezialfall $Q \neq 0$ und $J = 0$ als Reissner-Nordström-Metrik.

Theoretisch kann ein Schwarzes Loch noch andere Quantenzahlen haben – Baryonenzahl, Leptonenzahl, etc. – aber es gibt zu diesen Quantenzahlen keine weiteren Parameter. Insbesondere gibt es zur Massenverteilung oder Ladungsverteilung keine höheren Momente, oder zum Drehimpuls keinen Trägheitstensor mit unterschiedlichen Trägheitsmomenten. Diese Tatsache bezeichnet man manchmal auch als „No-Hair-Theorem“, womit angedeutet werden soll, dass ein Schwarzes Loch neben diesen angedeuteten Quantenzahlen keine weiteren Freiheitsgrade besitzen kann.

Besonders interessant sind einige Eigenschaften rotierender Schwarzer Löcher, die ich qualitativ kurz ansprechen möchte, da sie einerseits bei Schülern auf großes Interesse stoßen dürften und andererseits mit großer Wahrscheinlichkeit die riesigen Schwarzen Löcher in den Zentren von Galaxien sehr rasch rotieren werden, diese Lösungen also wichtig sind.

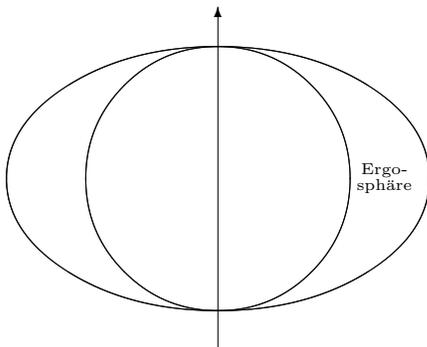


Abbildung 8.7: Ein rotierendes Schwarzes Loch besitzt einen inneren und einen äußeren Ereignishorizont. Den Bereich zwischen den beiden Horizonten bezeichnet man als Ergosphäre.

Ein rotierendes Schwarzes Loch besitzt zwei Ereignishorizonte (siehe Abb. 8.7). Der innere Ereignishorizont hat Kugelform, und ein Gegenstand, der diesen Horizont überquert hat, kann nicht mehr in den äußeren Bereich, aus dem er gekommen ist, zurück. Zwischen den beiden Horizonten befindet sich die so genannte Ergosphäre. In

diesem Bereich kann sich ein Beobachter nur halten, wenn er sich um das Schwarze Loch herumbewegt. Der Raum in diesem Bereich wird durch das rotierende Schwarze Loch derart „mitgedreht“, dass der Lichtkegel so stark in Rotationsrichtung gekippt ist, dass eine Weltlinie innerhalb des Lichtkegels nicht an ihrem Ort bleiben kann, sondern sich ebenfalls um das Schwarze Loch winden muss. Trotzdem kann ein Beobachter diesem Bereich auch wieder entkommen.

Roger Penrose hat auf einen interessanten Prozess hingewiesen (den so genannten *Penrose-Prozess*), bei dem man an einem rotierenden Schwarzen Loch durch die Entsorgung von Müll Energie gewinnen kann: Eine Rakete mit Müll fliegt in den Bereich der Ergosphäre und trennt sich dort von dem Müll. Dies kann in einer Weise geschehen, dass der Müll in das Schwarze Loch hineinfliegt und gleichzeitig der Rakete ein größerer Impuls übertragen wird, mit dem sie das Schwarze Loch wieder verlassen kann. Insgesamt hat die Rakete nachher eine höhere Energie als vorher, und zwar einschließlich der ursprünglichen Energie des Mülls, und der Müll ist im Schwarzen Loch verschwunden. Bei diesem Prozess verliert das rotierende Schwarze Loch allerdings einen Teil seines Drehimpulses (und damit einen Teil seiner Rotationsenergie, die nun auf die Rakete übertragen wurde), sodass er nicht beliebig oft wiederholt werden kann.

Allgemein sind die Eigenschaften der Lösungen zu rotierenden bzw. geladenen Schwarzen Löchern wesentlich komplizierter als bei der Schwarzschild-Lösung. Abbildung 8.8) zeigt das Penrose-Diagramm zur geodätisch vervollständigten Lösung. Man erkennt die beiden Horizonte, den inneren und äußeren Horizont. Außerdem sind die Singularitäten nun zeitartig und können von einer Weltlinie umgangen werden, so dass es bei diesen Schwarzen Löchern tatsächlich möglich ist, dem Inneren wieder zu entkommen, allerdings in einen anderen Teil des Universums.

8.3.1 Quantentheorie und Gravitation

Eine wirklich zufriedenstellende Quantentheorie der Gravitation bzw. der Raumzeit gibt es derzeit trotz umfangreicher Versuche (es gibt die kanonische Quantengravitation, die Loop-Quantengravitation, die String-Theorie, kausale Mengen, kausale Triangulationen, nicht-kommutative Geometrie, ...) noch nicht. Auch nur ein elementarer Überblick zu diesen Ansätzen würde den Rahmen dieser Vorlesung mehr als sprengen.

Ein paar wichtige Überlegungen scheinen jedoch so allgemein, dass sie vermutlich in jeder sinnvollen Form der Quantengravitation eine Rolle spielen werden. Dazu zählen beispielsweise die so genannten Planck'schen Einheiten, als auch insbesondere die Thermodynamik Schwarzer Löcher. Auf beides möchte ich kurz eingehen.

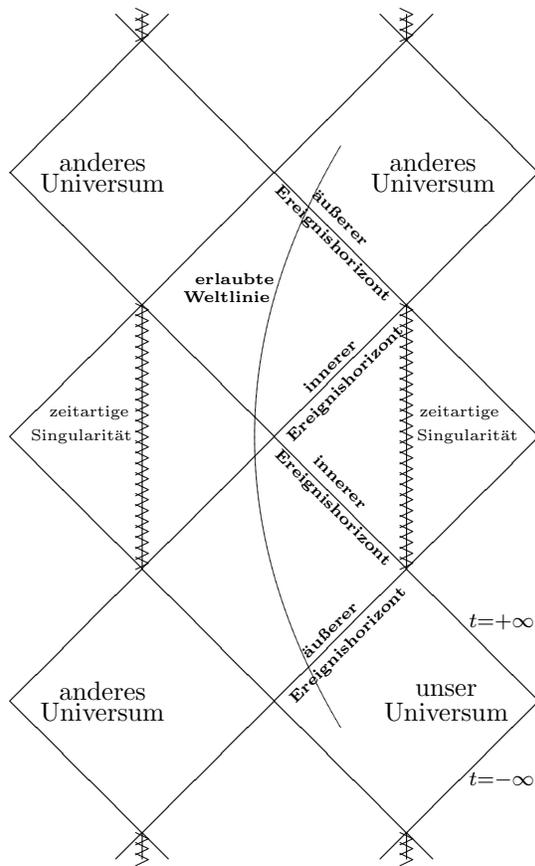


Abbildung 8.8: Penrose-Diagramm einer vervollständigten Kerr-Lösung. Die Singularitäten sind nun zeitartig und können daher von Weltlinien vermieden werden. Das Diagramm wiederholt sich in Zeitrichtung beliebig oft. In dieser Raumzeit gibt es zeitartige Weltlinien, die von unserem Universum in andere Universen führen, ohne auf eine Singularität zu treffen.

Planck'sche Einheiten

Die Quantentheorie, die Spezielle Relativitätstheorie und die Allgemeine Relativitätstheorie liefern uns drei fundamentale Naturkonstanten:

$$\begin{aligned} \hbar &= 1,054572 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ c &= 299\,792\,458 \text{ m} \\ G &= 6,675 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \end{aligned}$$

Aus diesen Konstanten lassen sich fundamentale Größen zu allen physikalischen Einheiten ableiten, z.B.:

$$\begin{aligned}
 \text{Planck-Länge } l_{\text{P}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6162 \times 10^{-35} \text{ m} \\
 \text{Planck-Zeit } t_{\text{P}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5,391 \times 10^{-44} \text{ s} \\
 \text{Planck-Masse } m_{\text{P}} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,1765 \times 10^{-8} \text{ kg} \\
 \text{Planck-Energie } E_{\text{P}} &= \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1,9561 \times 10^9 \text{ J} \\
 \text{Planck-Dichte } \rho_{\text{P}} &= \frac{c^5}{\hbar G^2} = 5,155 \times 10^{96} \text{ kg/m}^3 \\
 \text{Planck-Volumen } V_{\text{P}} &= \sqrt{\frac{(\hbar G)^3}{c^9}} = 4,2217 \times 10^{-105} \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Nehmen wir noch die Boltzmann-Konstante

$$k_{\text{B}} = 1,38065 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (8.41)$$

hinzu, so erhalten wir auch eine

$$\text{Planck-Temperatur } T_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_{\text{B}}^2}} = 1,4168 \times 10^{32} \text{ K}. \quad (8.42)$$

Schon 1899 (also ein Jahr vor seinem berühmten Vortrag am 14. Dezember 1900 vor der Physikalischen Gesellschaft, der allgemein als die Geburtsstunde der Quantentheorie angesehen wird) machte Max Planck darauf aufmerksam, dass es diese fundamentalen Größen geben müsse. Er hatte zu dieser Zeit eine empirische Formel für die Schwarzkörperstrahlung gefunden und erkannt, dass in dieser Formel eine fundamentale Konstante (die wir heute als Planck-Konstante bezeichnen) auftritt. Mit dieser Konstanten und den damals schon bekannten Konstanten c und G gelangte er zu den Größen, die wir heute als *Planck-Einheiten* bezeichnen.

Die Planck-Länge ist vermutlich die kleinste Skala, auf der das Konzept einer Länge noch sinnvoll ist, ähnliches gilt für die Planck-Zeit. Die Planck-Zeit entspricht der Zeit, die das Licht braucht, um eine Planck-Länge zu durchqueren.

Die Planck-Masse ist die Masse eines Schwarzen Loches, dessen Schwarzschild-Radius gleich der Planck-Länge ist. Mit rund 0,02 mg hat sie fast einen makroskopischen Wert. Ausgedrückt in GeV/c^2 , eine bei Teilchenphysikern sehr beliebte Einheit, entspricht dies $m_{\text{P}} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$. Dies ist vermutlich die höchste Masse, die ein nachweisbares elementares Teilchen haben kann.

Die Planck-Energie ist die Energie zu einer Planck-Masse nach der Einstein'schen Beziehung $E = mc^2$. Gleichzeitig ist es die Unbestimmtheit in der Energie, die nach der Quantentheorie innerhalb einer Planck-Zeit nicht unterschritten werden kann.

Außerdem definieren die Planck-Einheiten die Grenzen, bis zu denen wir nach dem Standardmodell der Teilchenphysik vordringen können, ohne die Quantengravitation mit einbeziehen zu müssen: Das Universum hatte eine Planck-Zeit nach dem Urknall einen Radius von der Planck-Länge bzw. ein Planck-Volumen. Es hatte zu diesem Zeitpunkt eine Temperatur von der Planck-Temperatur, usw.

8.3.2 Die Hawking-Bekenstein-Strahlung

Als einzigen Quantenaspekt der Gravitation möchte ich in dieser Vorlesung kurz die Thermodynamik Schwarzer Löcher ansprechen. Es geht dabei darum, dass man einem Schwarzen Loch eine Entropie und eine Temperatur zuschreiben kann, und dass mit dieser Temperatur auch eine Strahlung verbunden ist, die *Bekenstein-Hawking-Strahlung* Schwarzer Löcher [3, 14].

Wie wir im Zusammenhang mit den Lösungen der Einstein'schen Gleichungen gesehen haben, gilt für Schwarze Löcher das „No Hair-Theorem“. Neben ihrer Masse, ihrem Drehimpuls und ihrer Ladung (sowie einigen Erhaltungsgrößen aus der Teilchenphysik) haben Schwarze Löcher keine weiteren Freiheitsgrade. Insbesondere gibt es keine Quadrupolmomente zur Massen- oder Ladungsverteilung etc. Im Sinne der Boltzmann'schen Beziehung $S = k_B \ln \Omega$ zwischen der Entropie S und der Anzahl der Mikrozustände Ω sollte ein Schwarzes Loch daher praktisch keine Entropie besitzen.

Damit würden Schwarze Löcher jedoch dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (zumindest in einer bestimmten Form) widersprechen: Die Gesamtentropie in unserem Universum kann niemals abnehmen. Wenn jedoch ein Schwarzes Loch praktisch keine Entropie hätte, gleichzeitig aber beliebige Materiemengen mit nahezu beliebig viel Entropie „verschlucken“ kann, dann scheint bei diesem Prozess die Entropie in unserem Universum abzunehmen.

Ein Ausweg ergibt sich, wenn man einem Schwarzen Loch eine Entropie zuschreibt, die mit seiner Masse zusammenhängt. Durch solche Überlegungen gelangte Bekenstein zu der Schlussfolgerung, dass ein Schwarzes Loch eine Entropie

$$S = \frac{k_B}{4} \frac{A}{l_P^2} \quad (8.43)$$

haben muss. Hierbei ist A die Oberfläche des Schwarzen Lochs (also die Fläche einer Kugeloberfläche vom Radius R_S) und l_P die oben eingeführte Planck-Länge. Die Entropie eines Schwarzen Lochs entspricht also seiner Oberfläche in Einheiten der Planck-Fläche. Es zeigt sich, dass dies die höchste Entropie ist, die sich in dem Volumen eines Schwarzen Lochs unterbringen lässt. Keine Materieform kann in einem so

kleinen Bereich eine größere Entropie haben.

Es mag erstaunen, dass ein Schwarzes Loch eine Entropie hat, die proportional zu seiner Oberfläche und nicht zu seinem Volumen ist, denn gewöhnlich ist die Entropie eine extensive Größe, die proportional zum Volumen eines Systems ist. Hier hilft aber vielleicht die Vorstellung, dass für einen asymptotischen Beobachter Materie (und damit Entropie) niemals hinter dem Horizont verschwindet, sondern in gewisser Hinsicht an der Oberfläche „kleben“ bleibt. Die emittierte Strahlung wird zwar immer langwelliger, aber die Wellenlänge kann nie größer als der Durchmesser des Schwarzen Lochs werden.

Dies gibt auch gleichzeitig eine Vorstellung von der Temperatur des Schwarzen Lochs: Ein Schwarzes Loch strahlt eine thermische Strahlung ab, deren Wellenlänge seinem Durchmesser entspricht. Verwenden wir das Wien'sche Verschiebungsgesetz, das eine Beziehung zwischen der Temperatur und der Wellenlänge zur maximalen Intensität der abgestrahlten Strahlung angibt,

$$\lambda = \text{const} \frac{\hbar c}{k_B T}, \quad (8.44)$$

und setzen für λ den Schwarzschild-Durchmesser (doppelten Radius) eines Schwarzen Lochs ein, so erhalten wir

$$\frac{4GM}{c^2} = \text{const} \frac{\hbar c}{k_B T} \quad (8.45)$$

oder

$$T = \text{const} \frac{\hbar c^3}{k_B GM}. \quad (8.46)$$

Eine genaue quantenfeldtheoretische Rechnung liefert die *Bekenstein-Hawking-Temperatur*:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM}. \quad (8.47)$$

Aus dieser Gleichung kann man auch wieder die Entropie des Schwarzen Lochs ableiten.

In einem sehr vereinfachten Bild wird der Ursprung der Bekenstein-Hawking-Strahlung in der Quantenfeldtheorie gerne folgendermaßen beschrieben: Das Vakuum ist in der Quantenfeldtheorie nicht leer, sondern es gibt eine Grundzustandsenergie und Grundzustandsfluktuationen. Diese werden oft durch die Erzeugung und Vernichtung virtueller Teilchen-Antiteilchen-Paare beschrieben. Wenn nun ein Teilchen-Antiteilchen-Paar nahe der Oberfläche eines Schwarzen Lochs entsteht, kann es passieren, dass eines der Teilchen den Schwarzschild-Radius überquert, wohingegen das andere Teilchen dem Schwarzen Loch entkommt. Für einen entfernten Beobachter scheint dieses (nun reale) Teilchen von dem Schwarzen Loch abgestrahlt worden zu sein. Das vom Schwarzen Loch verschluckte Teilchen hatte eine negative Energie und hat somit die Energie des Schwarzen Lochs um die Energie des abgestrahlten Teilchens

verringert. Man sollte jedoch nicht vergessen, dass dies nur ein sehr vereinfachtes, anschauliches Bild ist.

Die Entropie zu einem Schwarzen Loch von der Masse der Sonne ist ungefähr

$$\frac{S_{\text{Sonne}}}{k_{\text{B}}} \approx 1,07 \cdot 10^{76}. \quad (8.48)$$

Die Masse unseres Universums wird auf rund 10^{24} Sonnenmassen geschätzt. Da die Entropie proportional zum Quadrat der Sonnenmasse ist, folgt daraus für die maximal mögliche Entropie, die unser Universum haben kann (wenn nämlich die gesamte Masse in einem einzigen Schwarzen Loch verschwunden ist), ein Wert von rund 10^{124} . Die geschätzte Entropie des heutigen Universums liegt um rund 20 Größenordnungen niedriger.

Derzeit entspricht die Mikrowellenhintergrundstrahlung einer Temperatur von rund 2,7 K. Dies bezeichnet man manchmal als die heutige Temperatur des Universums. Die Temperatur eines Schwarzen Lochs von der Masse unserer Sonne ist nach obiger Formel ungefähr 10^{-6} K, schwerere Schwarze Löcher haben sogar noch niedrigere Temperaturen. Somit würde ein Schwarzes Loch derzeit mehr Strahlung aufnehmen (und dadurch an Masse zunehmen) als es abstrahlt. Da sich unser Universum aber beschleunigt ausdehnt (siehe nächstes Kapitel) und somit seine Temperatur weiterhin abnimmt, könnte irgendwann der Zeitpunkt kommen, an dem Schwarze Löcher mehr Strahlung abstrahlen als sie aufnehmen. Ist das der Fall, könnten langsam sämtliche Schwarzen Löcher verstrahlen und zurück bliebe ein sehr dünnes Gas in einem ansonsten leeren Raum.

8.4 Kosmologische Modelle

Eine Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen entspricht einer vollständigen Raumzeit, d.h. einem Modell eines Kosmos. Zum ersten Mal hat die Physik mit der Allgemeinen Relativitätstheorie somit ein Modell an der Hand, mit dem sich kosmologische Fragen, insbesondere auch zur Entstehungsgeschichte des Universums, wissenschaftlich angehen lassen.

Einstein ging zunächst davon aus, dass unser Universum auf großen Skalen im Wesentlichen statisch sei. Er musste jedoch rasch feststellen, dass seine Feldgleichungen ein solch statisches Universum nur in sehr unphysikalischen Situationen ($T_{\mu\nu} = 0$) zulassen. Um auch für realistischere Materieverteilungen Lösungen zu einem statischen Universum zu erhalten, erweiterte Einstein seine Feldgleichungen um einen sogenannten kosmologischen Term mit einer kosmologischen Konstanten Λ , sodass Gl. 6.56 zu folgender Gleichung wird:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (8.49)$$

Geometrisch könnte man Λ als eine „negative Raumkrümmung“ des Vakuums interpretieren, die durch die vorhandene Materie nahezu ausgebügelt wird. Schlägt man den kosmologischen Term der rechten Seite der Gleichung zu, so kann man ihn als eine Art Energiedichte des Vakuums interpretieren, die zu einer negativen Raumkrümmung führt.

Durch die kosmologische Konstante hoffte Einstein, statische Lösungen der Feldgleichungen mit Materiefeldern zu erhalten. Er wurde aber rasch enttäuscht. Angeblich (die einzige Quelle für dieses Zitat scheint der Physiker George Gamow zu sein) hat Einstein bei späterer Gelegenheit die Einführung dieses Terms als seine „größte Eselei“ bezeichnet.

8.4.1 Das Olbers'sche Paradoxon

Im Rahmen der klassischen Kosmologie war schon bekannt, dass die Annahme eines homogenen, seit unendlichen Zeiten in gleicher Form bestehenden Kosmos zu einem Widerspruch führt. Heute bezeichnet man dieses Paradoxon meist nach dem Astronom und Arzt Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (*geb. 11.10.1758 in Arbergen bei Bremen; gest. 2.3.1840 in Bremen*), obwohl entsprechende Überlegungen bereits von Edmund Halley (1656–1742) angestellt wurden.

Olbers argumentierte, dass der Himmel in alle Richtungen dieselbe Helligkeit wie die Sonne haben müsste. Insbesondere müsste es auch Nachts „taghell“ sein. Das Argument basiert auf der Annahme eines unendlich ausgedehnten, homogenen Universums (d.h. die Sternendichte ist überall nahezu konstant), das in dieser Form auch seit unendlicher Zeit existiert hat. In diesem Fall müsste nämlich aus jeder Raumrichtung das Licht eines Sterns auf die Erde treffen.

Olbers selber glaubte das Paradoxon dadurch umgehen zu können, dass er Wolken im Kosmos annahm, die das Licht von sehr weit entfernten Sternen verdecken. Man weiß heute jedoch, dass sich diese Wolken durch die einfallende Strahlung hätten erwärmen müssen, bis sie schließlich ins thermische Gleichgewicht mit dieser Strahlung gekommen wären, d.h. ebenfalls die Strahlung emittieren würden. Auch die Annahme einer endlichen Lebensdauer der Sterne umgeht das Paradoxon nicht, wenn man zusätzlich fordert, dass die mittlere Sterndichte konstant bleibt, also auch ständig neue Sterne entstehen.

Aus heutiger Sicht gibt es zwei Lösungen dieses Olbers'schen Paradoxons (vgl. [12], S. 347):

1. Für ein endliches Weltalter gibt es den Ereignishorizont, jenseits dessen wir nichts sehen. Auch in einem unendlich ausgedehnten Universum erreicht uns nur Licht aus einem Bereich, der in unserer kausalen Vergangenheit liegt.

2. Bei einer Expansion des Universums nimmt die Fluchtgeschwindigkeit mit dem Abstand zu. Geht diese Fluchtgeschwindigkeit gegen die Lichtgeschwindigkeit, so muss die Rotverschiebung des wahrgenommenen Lichtes gegen Unendlich gehen. Auch hierdurch wird die empfangene Helligkeit begrenzt. Diese Schranke der Wahrnehmbarkeit ist für Robertson-Walker-Universen (s.u.) mit dem Ereignishorizont identisch.

8.4.2 Expandierende Universen

Im Jahre 1924 zeigte Edwin Powell Hubble (*geb. 20.11.1889 in Marshfield (Missouri), gest. 28.9.1953 in San Marino (Kalifornien)*) die Existenz von Galaxien außerhalb unseres Sternensystems. Fünf Jahre später entdeckte er die Expansion des Weltalls über die Rotverschiebung entfernter Galaxien. Zu dem Zeitpunkt, als Einstein die Allgemeine Relativitätstheorie entwickelt hatte, waren also weder außergalaktische Objekte noch die Expansion des Universums bekannt.

Doch schon im Jahre 1917 fand der sowjetische Kosmologe Aleksandr Alexandrovich Friedmann (1888–1925) Lösungen der Einstein-Gleichungen, die ein expandierendes Universum beschreiben. Er legte so die Grundlagen für unsere heutige Big-Bang- bzw. Urknall-Theorie.

Die wesentliche Annahme, die für kosmologische Lösungen der Einstein-Gleichungen meist gemacht wird, ist die Homogenität und Isotropie unseres Universums. Darunter versteht man, dass auf sehr großen Skalen kein Ort und keine Richtung im Universum ausgezeichnet sind. Diese Annahme bezeichnet man auch als kosmologisches Prinzip. Für den geometrischen Anteil der Einstein-Gleichungen bedeutet dies, dass die dreidimensionale Krümmung räumlich konstant sein muß. Lediglich eine Zeitabhängigkeit dieser Krümmung ist noch erlaubt. Es zeigt sich, dass unter diesen Bedingungen nur noch eine Metrik der Form

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right) \quad (8.50)$$

möglich ist. Diese Metrik bezeichnet man als Robertson-Walker-Metrik.

Zwei freie Parameter kennzeichnen diese Metrik: Der Parameter k , der durch geeignete Skalierung von r auf die Werte $k = 0, +1, -1$ beschränkt werden kann, und der Wert $R(t)$, der über die Gleichung

$$K = \frac{k}{R(t)^2} \quad (8.51)$$

mit dem dreidimensionalen Krümmungsskalar K in Beziehung steht. Der Wert von k unterscheidet somit, ob die dreidimensionale skalare Krümmung positiv, null oder negativ ist. Dem entsprechen drei unterschiedlichen Formen von Universen. Insbesondere ist für $k = 1$ der dreidimensionale Raum endlich, aber ohne Grenze (Kugel).

Das kosmologische Prinzip wird gelegentlich angezweifelt, und man kann zu recht fragen, ob wir wirklich eine Homogenität und Isotropie des Raumes beobachten. Der sichtbare Teil des Universums hat einen Radius von ungefähr 10^{10} Lichtjahren. Unsere Galaxie andererseits hat einen Radius von 10^5 Lichtjahren. Die meisten Galaxien sind in Clustern oder Haufen mit einem Durchmesser von rund 10^7 Lichtjahren konzentriert. Bis zu dieser Skala beobachten wir somit durchaus reichhaltige Strukturen auch in der Form der Materieverteilung. Es handelt sich also um maximal zwei bis drei Größenordnungen, für die das kosmologische Prinzip gültig sein könnte. Ob das der Fall ist, oder ob es weitere charakteristische Strukturen jenseits der Galaxiencluster gibt, müssen zukünftige Messungen entscheiden.

Noch wurde nichts über die zeitliche Entwicklung des Universums ausgesagt. Diese steckt in der Abhängigkeit des „Radius“ $R(t)$ – genauer sollte man von einer Skala sprechen – des Universums von der Zeit und sollte aus der Einstein-Gleichung bestimmt werden. Dazu macht man üblicherweise Annahmen über den Energie-Impuls-Tensor der Materie, der nach dem kosmologischen Prinzip ebenfalls räumlich konstant und isotrop sein sollte. Die wesentliche Freiheit besteht in der Relation zwischen der Materiedichte ρ und dem „Radius“ $R(t)$. Für „normale“ Materie gilt

$$\rho_m R(t)^3 = \text{const} \quad (\text{materiedominiert}) , \quad (8.52)$$

also die bekannte Relation, dass die Dichte umgekehrt proportional zum Volumen ist. Für Strahlung beispielsweise gilt

$$\rho_s R(t)^4 = \text{const} \quad (\text{strahlungsdominiert}) . \quad (8.53)$$

Mit diesen Relationen erhält man aus den Einstein-Gleichungen eine einfache Differentialgleichung für $R(t)$,

$$\dot{R}^2 + V(R) = -k , \quad (8.54)$$

mit

$$V(R) = -\frac{a}{R^2} - \frac{b}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2 . \quad (8.55)$$

a und b sind Konstanten, die den Anteil an Strahlung bzw. normaler Materie im Universum angeben, und Λ ist die kosmologische Konstante. Modelle, bei denen $R(t)$ der Gl. 8.54 genügt, bezeichnet man als Friedmann-Modelle.

Qualitativ lassen sich die Lösungen von Gl. 8.54 leicht durch die physikalische Analogie mit der Energie eines eindimensionalen Teilchens in einem effektivem Potential $V(R)$ diskutieren. Für $\Lambda = 0$ beispielsweise kann es Universen geben, deren Radius (Skala) nach oben beschränkt ist – in diesem Fall kommt es wieder zu einem Kollaps. Oder aber das Universum expandiert für alle Zeiten.

Der wesentliche Parameter für diese Unterscheidung ist die Materiedichte im Universum. Aus der sichtbaren Materie in unserem Universum würde man auf einen

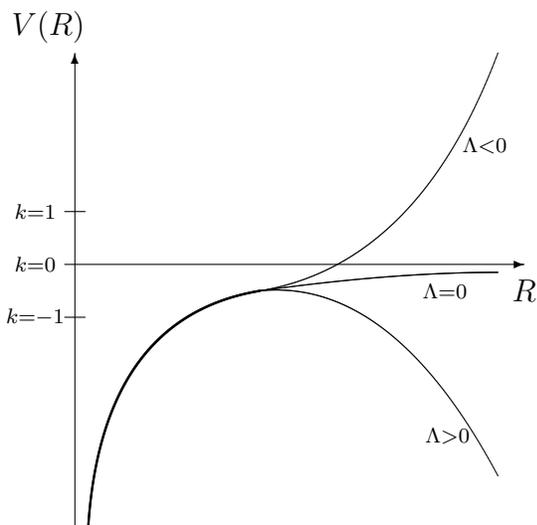


Abbildung 8.9: Das „effektive Potenzial“ für die Dynamik des Skalenfaktors $R(t)$ in einer Friedman-Lösung für verschiedene Werte der kosmologischen Konstanten Λ . In Abhängigkeit von k verschiebt sich die $V(R) = 0$ -Achse nach oben oder unten.

Wert von ρ schließen, der zu einem ewig expandierenden Universum führt. Allerdings deuten genaue Untersuchungen der Bewegungen von Galaxien darauf hin, dass der größte Teil der Materie in unserem Universum unsichtbar ist.

Nachdem vor einigen Jahren aufgrund genauer Beobachtungen und Messungen an Supernovaexplosionen die Entfernungsskalen für Objekte, deren Entfernung nicht mehr durch Parallaxenmessung möglich ist, revidiert werden mussten, ergibt sich heute (Stand Januar 2015) das Bild, dass sich unser Universum in einem Stadium befindet, in dem die Geschwindigkeit der Expansion wieder zunimmt, nachdem es vor rund 8 Milliarden Jahren eine „minimale Expansionsrate“ durchlaufen hat. Die Beobachtungen lassen sich zwar durch eine positive kosmologische Konstante beschreiben, doch die Natur dieser Konstanten bleibt ungewiss. Manche Modelle postulieren eine ganz neue Energie- oder gar Materieform (man spricht auch manchmal von *Dunkler Energie*), die sich durch einen negativen Druck auszeichnet und das Universum zur Expansion „drängt“. In kaum einem Gebiet der Physik ändern sich derzeit die grundlegenden Vorstellungen innerhalb weniger Jahre so oft und so einschneidend wie in der Kosmologie.

8.4.3 Das de Sitter-Universum

Sollten sich die augenblicklichen Vorstellungen als richtig erweisen und die Skala des Universums beschleunigt zunehmen, wird der Materiegehalt immer dünner und spielt eine zunehmend geringere Rolle. In diesem Fall ist das Verhalten des Universums durch die Kosmologische Konstante Λ dominiert, die bei einem beschleunigt expandierenden Universum positiv sein muss.

Ein Universum ohne Materiegehalt aber mit einer positiven Kosmologischen Konstanten bezeichnet man als *de Sitter-Universum*. Die „Bewegungsgleichung“ für

$R(t)$ (Gl. 8.54) wird in diesem Fall zu

$$\dot{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\Lambda}R(t) = HR(t) \quad (8.56)$$

mit Expansionsrate H . Die Lösung lautet:

$$R(t) = R_0 e^{Ht}. \quad (8.57)$$

Dies ist die *de Sitter-Lösung* der Einstein'schen Gleichungen für einen materiefreien Raum mit einer kosmologischen Konstanten. Sie beschreibt nicht nur möglicherweise das asymptotische Verhalten unseres Universums in der fernen Zukunft, sondern sie hat auch viele interessante mathematische Eigenschaften.

Literaturverzeichnis

- [1] Peter C. Aichelburg (Hrsg.); *Zeit im Wandel der Zeit*; Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1988.
- [2] *Mach's Principle – From Newton's Bucket to Quantum Gravity*; Julian Barbour & Herbert Pfister (Hrsg.); Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995.
- [3] Jacob D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D 7 (1973) 2333–2346.
- [4] John Bell; *Speakable and Unspeakable in Quantum Physics*, 2. edition, Cambridge University Press (2004).
- [5] Max Born; *Optik*; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.
- [6] Encyclopaedia Britannica; 15.th edition, 1988.
- [7] Albert Einstein; *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*; Annalen der Physik, Leipzig, 17 (1905) 891.
- [8] Albert Einstein; *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* (Ann. Phys., Leipzig, 18 (1905) 639.
- [9] Albert Einstein; *Aus meinen späten Jahren*; Ullstein Sachbuch, Verlag Ullstein, Frankfurt, Berlin, 1993.
- [10] Albert Einstein; *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*; Annalen der Physik 55 (1918) 241.
- [11] Albert Einstein; *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*; Annalen der Physik 35 (1911) 898.
- [12] Torsten Fließbach; *Allgemeine Relativitätstheorie*; BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien Zürich, 1990.
- [13] Galilei; *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische*; Teubner Stuttgart, 1982; aus dem Italienischen übersetzt von Emil Strauss.

- [14] Stephen W. Hawking, *Particle Creation by black holes*, Comm. Math. Phys. 43 (1976) 199–220.
- [15] Hermann von Helmholtz; *Über Wirbelbewegungen, Über Flüssigkeitsbewegungen*, 1858; in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 1; Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1996.
- [16] G.L. Lamb, Jr.; *Elements of Soliton Theory*; Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1980.
- [17] Max von Laue; *Geschichte der Physik*; Universitäts-Verlag Bonn, 1947.
- [18] Hendrik Antoon Lorentz; *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*; Proc. Acad. Sci., Amsterdam, 6 [1904], S. 809.
- [19] Ernst Mach; *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch kritisch dargestellt*; Akademie Verlag, Berlin, 1988.
- [20] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler; *Gravitation*; W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [21] Peter Mittelstaedt; *Der Zeitbegriff in der Physik*; BI-Wissenschaftsverlag, 1989.
- [22] Peter Mittelstaedt; *Philosophische Probleme der modernen Physik*; BI-Wissenschaftsverlag, 1989.
- [23] Isaac Newton; *Über die Gravitation...*; Klostermann Texte Philosophie; Vittorio Klostermann, Frankfurt, 1988; übersetzt von Gernot Böhme.
- [24] Wolfgang Pauli; *Theory of Relativity*; Dover Publications, New York, 1981.
- [25] Jules Henri Poincaré; *Sur la dynamique de l'électron*, C.R. Acad. Sci., Paris, 140 (1905) S. 1504; und Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 21 (1906) S. 129.
- [26] Hans Reichenbach; *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*; Hans Reichenbach - Gesammelte Werke Bd. 2; Vieweg-Verlag, Braunschweig; 1977.
- [27] Hans Reichenbach; *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre*; in *Die philosophische Bedeutung der Relativitätstheorie*; Hans Reichenbach - Gesammelte Werke Bd. 3; Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1977.
- [28] Carlo Rovelli, *Quantum Gravity*; Cambridge University Press, 2007.

- [29] Schlamminger, Choi, Wagner, Gundlach, Adelberger; *Test of the Equivalence Principle using a rotating torsion balance*; Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 041101.
- [30] Roman U. Sexl, Helmuth K. Urbantke; *Relativität, Gruppen, Teilchen*; Springer-Verlag, Wien, New York, 1992.
- [31] Károly Simonyi; *Kulturgeschichte der Physik*; Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1990.
- [32] Weisberg, J.M., Taylor, J.H.; *Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis*; arXiv:astro-ph/0407149v1; 2004.

Index

- Aberration, 14
- Äquivalenz von Masse und Energie, 56
- Äquivalenzprinzip, 76, 112, 114
- Äther, 10
- Ätherhypothese, 14, 42
- Atlas (Differentialgeometrie), 92

- Bekenstein-Hawking-Strahlung, 139
- Bekenstein-Hawking-Temperatur, 140
- Big-Bang, 143
- Bradley, James, 14
- Breather-Lösung, 34

- Christoffel-Symbole, 103, 117

- de Sitter-Universum, 146
- Diffeomorphismus, 92
- Differentielle Kraft, 84
- Dunkle Energie, 145
- „Dunkler Stern“, 126

- Eddington, Arthur Stanley, 129
- Eichtransformation, 118
- Eichung, 118
- Eigenzeit, 97
 - im Gravitationsfeld, 113
- Einstein'sche Gleichungen, 108, 141
 - im Vakuum, 110
 - linearisierte, 117
 - ohne Materie, 127
- Einstein, Albert, 10, 56, 75
- Einstein-Hilbert-Wirkung, 109
- Einstein-Synchronisation, 41
- Energie-Impuls-Tensor, 108, 144

- Entropie, 139
 - Schwarzes Loch, 139
 - Sonne, 141
 - des Universums, 141
- Ereignishorizont, 132, 134, 142
- Ergosphäre, 135

- Finkelstein, David, 129
- Fitzgerald, George Francis, 14
- Fizeau, Armand, 11
- Flamm'scher Paraboloid, 130
- Fluchtgeschwindigkeit, 126
- Friedmann, Aleksandr Alexandrovich, 143
- Friedmann-Modelle, 144

- Geodätengleichung, 105
- Geodätisch Vollständig, 133
- Gleichzeitigkeit, 28, 39
- Gravitation
 - als universelle Kraft, 85
- Graviton, 118
- Gravity B-Probe, 121

- Halley, Edmund, 142
- von Helmholtz, Hermann, 12
- Homogenität des Raumes, 41
- Hubble, Edwin Powell, 143

- isotrope Raumzeit, 124
- Isotropie des Raumes, 41

- Karte, 92
- kausale Struktur, 97
- Kerr-Newman-Metrik, 135
- Knotentheorie der Materie, 12

- Kongruenzerhaltende Kraft, 84
- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, 15
- Koordinatensingularitäten, 99
- Kosmologische Konstante, 109, 141, 145
- Kosmologisches Prinzip, 143
- kovariante Ableitung, 103
 - rotierendes Bezugssystem, 104
- Krümmungsskalar, 108
- Krümmungstensor, 107
- Kraft
 - differentielle, 84
 - kongruenzerhaltende, 84
 - universelle, 84
- Kruskal, Martin David, 133
- Kugeloberfläche, 94
 - induzierte Metriken, 97
 - Koordinaten, 94
 - Parallelverschiebung, 106
 - Zylinderprojektion, 99
- Lense-Thirring-Effekt, 121
- Lenz-Runge-Vektor, 116
- Levi-Civita-Zusammenhang, 103
- Lichtgeschwindigkeit in bewegten Flüssigkeiten, 11
 - 11
- Lichtablenkung an der Sonne, 111
- Lichtkegel, 97
- Linearisierte Einstein-Gleichungen, 117
- Lorentz, Hendrik Antoon, 14
- Lorentz-Fitzgerald-Kontraktion, 14, 35
- Lorentz-Invarianz, 38
- Lorentz-Transformation, 32
- Mannigfaltigkeit, 91
 - eingebettete, 94
- Masse
 - schwere, 76
 - träge, 76
- Metrik, 95
 - induzierte, 97
 - inverse, 125
 - Maßstabfaktor, 98
- Metrischer Tensor, 83
- Michell, John, 126
- Michelson, Albert, 12
- Michelson-Morley-Experiment, 12, 44
- Minkowski, Hermann, 20
- Morley, Edward, 12
- Newton'sche Näherung der ART, 119
- No-Hair-Theorem, 135
- Olbers, Heinrich Wilhelm Matthias, 142
- orientierbar, 92
- Parallelverschiebung, 101
 - auf Kugeloberfläche, 106
- Pendelkette, 31
- Penrose-Diagramm, 134, 136
- Penrose-Prozess, 136
- Periheldrehung des Merkur, 116
- Planck, Max, 138
- Planck-Einheiten, 137
 - Planck-Energie, 139
 - Planck-Länge, 138
 - Planck-Masse, 138
 - Planck-Temperatur, 138
 - Planck-Zeit, 138
- Poincaré, Jules Henri, 10
- Präzession im Gravitationsfeld, 121
- Pseudometrik, 96
- PSR 1913+16, 119
- Reichenbach, Hans, 39
- Relativitätsprinzip, 15, 41
- Ricci-Tensor, 108, 118, 126
- Riemann-Christoffel-Krümmungstensor, 107, 117
- Rindler-Universum, 68
- Robertson-Entwicklung, 113, 117, 125
- Robertson-Walker-Metrik, 143

- Rotverschiebung im Gravitationsfeld, 115
- Schwarzes Loch, 126, 134
 - Entropie, 139
 - Kruskal-Szekeres-Karte, 133
 - rotierendes, 135
 - Temperatur, 140
- Schwarzschild, Karl, 126
- Schwarzschild-Metrik, 126, 130
 - Äquatorialebene, 129
 - kausale Beziehungen, 132
 - Weltlinien, 131
- Schwarzschild-Radius, 129
- Soliton, 33
- Standardform einer isotropen, statischen
 - Metrik, 124
- Starrer Körper, 84
- statische Raumzeit, 124
- Stoke, George Gabriel, 11
- Streuung am Kepler-Potenzial, 112
- Summenkonvention, Einstein'sche, 96
- Symmetrie der Gleichzeitigkeit, 40
- Synchronisation von Uhren, 39
- Szekeres, George, 133

- Tangentialraum, 93
- Tangentialvektor, 93
- Temperatur eines Schwarzen Lochs, 140
- Thomson, William (Kelvin), 12
- Torsionsfreiheit, 103

- Universelle Kraft, 84
- Urknall, 143

- Weg, parametrisierter, 93
- Weißes Loch, 134

- Zitat
 - Einstein, 56
 - Laue, 11
- Zusammenhang, 102
 - metrischer, 102
 - Zwei-Wege-Lichtgeschwindigkeit, 43
 - Zwillingsparadoxon, 36