Mathematik für Studierende der Physik

Thomas Filk

Skript zur Vorlesung Sommersemester 2021 & Wintersemester 2021/22 Sommersemester 2022

(Version vom 7. Juli 2022)

Vorwort

Die neue Mathematikausbildung in der Physik an der Universität Freiburg sieht vor, dass die Studierenden im ersten Semester die Lineare Algebra 1 und die Analysis 1 in der Mathematik hören, und für das zweite und dritte Semester sind die Vorlesungen "Mathematik für Studierende der Physik I" und "Mathematik für Studierende der Physik II" vorgesehen.

Das vorliegende Skript bezieht sich auf die wesentlichen Themen dieser beiden Vorlesungen. Dementsprechend werden die Grundlagen zur Linearen Algebra und zur Analysis, wie sie im ersten Semester der Mathematikvorlesungen in Freiburg behandelt werden, vorausgesetzt. Hier verweise ich z.B. auf die Skripten zu diesen Vorlesungen [Grosse 2020, Martin-Pizarro 2020, Mildenberger 2021] sowie auch das ältere Skript [Kuwert 2007], dem ich viele Konzepte entnommen habe. Die Kapitel 1 und 3 wiederholen nochmals die wichtigsten Grundlagen aus diesen beiden Vorlesungen. Das Kapitel 2 behandelt die wichtigsten Konzepte der Linearen Algebra für endlich dimensionale Vektorräume, die in der Physik von Bedeutung sind, das sind insbesondere die Besonderheiten von Vektorräumen, auf denen ein Skalarprodukt definiert ist.

Die Kapitel 4–7 enthalten weiterführende Grundkonzepte der Analysis (Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen, gewöhnliche Differentialgleichungen, parametrisierte Räume und allgemeine Koordinatensysteme, Mehrfachintegrale). Diese Kapitel wurden größtenteils einem älteren Skript entnommen [Filk 2021], das in der früheren Mathematikausbildung für Studierende der Physik verwendet wurde. Die weiteren Kapitel des ersten Teils behandeln Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten (Kap. 8), Funktionentheorie (Kap. 9) und eine Einführung in die Theorie der Distributionen (Kap. 10).

Der zweite Teil befasst sich mit ausgewählten Kapiteln der mathematischen Physik, die für die Physik zwar wichtig sind, oft aber nur "nebenher" im Zusammenhang mit ihren Anwendungen behandelt werden. Hier sollten die Studierenden auch einen Einstieg in die Grundlagen und Grundbegriffe dieser Themen erhalten. Beispiele sind die Theorie der Green'schen Funktionen (Kap. 11), die Theorie der Hilbert-Räume (Kap. 12), die Fourier-Transformation (Kap. 13) sowie spezielle lineare Differentialgleichungen und die Theorie der zugehörigen Operatoren (Kap. 14 und 15). Es folgt schließlich noch eine Einführung in die Theorie der Differentialformen (Kap. 16).

In der früheren Mathematikausbildung war für das vierte Semester die Vorlesung "Höhere Mathematik" vorgesehen. Die Inhalte dieser Vorlesung werden nun auf die beiden Teile dieser Vorlesung verteilt. Hier sei unter anderem auf das Skript zu dieser Vorlesung von Prof. Dittmaier hingewiesen [Dittmaier 2017].

Freiburg, Frühjahr 2022 Thomas Filk

Inhaltsverzeichnis

Vo	orwo	rt	3
In	halts	sverzeichnis	3
Ι	\mathbf{M}	athematik für Studierende der Physik I	13
1	Line	eare Algebra I	15
	1.1	Relationen	15
		1.1.1 Das kartesische Produkt	15
		1.1.2 Zweistellige homogene Relationen	15
		1.1.3 Darstellung einer Relation als Graph – die Adjazenzmatrix	16
		1.1.4 Ordnungsrelation	17
		1.1.5 Äquivalenzrelationen, Äquivalenzklassen und Quotientenmengen	18
	1.2	Gruppen, Körper, Vektorräume	19
		1.2.1 Gruppen und Untergruppen	19
		1.2.2 Ringe und Körper	20
		1.2.3 Vektorräume	21
	1.3	Lineare Abbildungen und Matrizen	22
	1.4	Eigenwerte und Eigenräume	24
	1.5	Basistransformationen und Normaldarstellungen	25
		1.5.1 Äquivalente Matrizen	25
		1.5.2 Jordan'sche Normalform ähnlicher Matrizen	25
		1.5.3 Funktionen der Jordan'schen Normalform	26
	1.6	Der duale Vektorraum	27
2	Vek	xtorräume mit Skalarprodukt	29
	2.1	Skalarprodukte	29
	2.2	Vektorprodukt, Spatprodukt und Determinante	34
	2.3	Adjungierte Abbildungen	35
	2.4	Projektionen und Spektralzerlegung	38
		2.4.1 Eigenschaften von Projektoren	39
		2.4.2 Die Spektralzerlegung	40
		2.4.3 Funktionen linearer Abbildungen	40
	2.5	Unitäre Abbildungen und orthonormale Basistransformationen	41
	2.6	Das Tensorprodukt von Vektorräumen	42
	2.7	Vektoren, Tensoren, Skalare etc.	44
		2.7.1 Tensoren als Elemente von Tensorprodukten	44

		2.7.2	Pseudovektoren und Pseudoskalare	45
		2.7.3	Nochmals Basistransformationen	47
		2.7.4	Indexschreibweise und Einstein'sche Summenkonvention	48
		2.7.5	Tensoren als Darstellung einer Gruppe	50
	2.8	Affine	Räume	51
	2.9	Bezug	ssysteme	52
3	Gru	indlage	en der Analysis	55
	3.1	Topole	ogische Räume und offene Mengen	55
	3.2	Folger	a und ihre Konvergenz	57
	3.3	Defini	tionen und Sätze zu metrischen Räumen	57
	3.4	Reiher	n und ihre Konvergenz	58
	3.5	Stetig	keit	60
	3.6	Die \mathcal{O}	- und <i>o</i> -Notation	61
		3.6.1	\mathcal{O} und o für Folgen	61
		3.6.2	\mathcal{O} und o für Funktionen	62
	3.7	Die A	bleitung einer Funktion	63
		3.7.1	Ableitungsregeln	63
		3.7.2	Bahnkurven und ihre Geschwindigkeit	64
	3.8	Integr	ation und Integrationsregeln	65
		0		
4	Abl	eitung	en in mehreren Variablen	69
	4.1	Richtu	Ingsableitung und totale Ableitung	69
		4.1.1	Partielle Ableitung und Richtungsableitung	69
		4.1.2	Die totale Ableitung und der Gradient	70
		4.1.3	Der Gradient und seine geometrische Bedeutung	71
		4.1.4	Das ∇ -(Nabla-)Symbol	71
		4.1.5	Die Richtungsableitung als Ableitung entlang eines Weges	71
	4.2	Allgen	neine Ableitung	72
		4.2.1	Divergenz und Rotation	72
	4.3	Höher	e Ableitungen	73
		4.3.1	Extrempunkte und stationäre Punkte	74
		4.3.2	Laplace- und d'Alembert-Operator	76
		4.3.3	Ableitungsidentitäten	77
	4.4	Die Ta	avlor-Entwicklung	77
		4.4.1	Der Satz von L'Hospital	78
		4.4.2	Einige spezielle Funktionen	80
			O. T.	
5	Gev	vöhnlie	che Differentialgleichungen	83
	5.1	Zwei I	Beispiele	84
		5.1.1	Die Zerfalls- bzw. Wachstumsgleichung	84
		5.1.2	Der harmonische Oszillator	85
	5.2	Das V	Verfahren von Picard und Lindelöf	87
	5.3	Linear	re Differentialgleichungen	89
		5.3.1	Allgemeine Eigenschaften	89
		5.3.2	Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	91
		5.3.3	Weshalb Exponentialansatz?	93
		5.3.4	Der getriebene gedämpfte Oszillator	94

	5.4	5.4 Gekoppelte lineare Differentialgleichungen		
		5.4.1	Gekoppelte lineare homogene Differentialgleichungen erster Ordnung	. 95
		5.4.2	Gekoppelte lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung	. 97
	5.5	Spezie	elle Lösungsverfahren	. 99
		5.5.1	Trennung der Variablen	. 99
		5.5.2	Beispiel: Die logistische Differentialgleichung	. 101
		5.5.3	Fixpunkte und Flusslinien im Phasendiagramm	. 102
		554	Variation der Konstanten	105
		5.5.5	Die Energieerhaltung	. 106
		0.0.0		. 100
6	Par	ametri	isierte Räume	109
	6.1	Paran	netrisierte Wege im \mathbb{R}^n	. 109
		6.1.1	Die Parametrisierung von Wegen	. 109
		6.1.2	Der Tangentialvektor - Die Geschwindigkeit	. 110
		6.1.3	Die Beschleunigung	. 111
		6.1.4	Das mitgeführte Dreibein	. 112
	6.2	Fläche	en	. 113
	6.3	Paran	neterdarstellung d-dimensionaler Räume im \mathbb{R}^n	. 115
	6.4	Impliz	zite Funktionen	. 116
	6.5	Kegels	schnitte	. 117
	6.6	Koord	linatensysteme	. 119
		6.6.1	Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2	. 120
		6.6.2	Zvlinderkoordinaten im \mathbb{R}^3	. 120
		663	Kugelkoordinaten	121
		6.6.4	Allgemeine Koordinatentransformationen	. 121
		665	Weitere spezielle orthogonale Koordinatensysteme	121
7	Mel	hrfachi	integrale	125
	7.1	Eleme	entare Einführung in die Maßtheorie	. 125
		7.1.1	Messbare Mengen – σ -Algebren	. 125
		7.1.2	Маве	. 126
		7.1.3	Wahrscheinlichkeitsmaße	. 127
		7.1.4	Integrale - Riemann, Lebesgue und Stieltjes	. 128
		7.1.5	Mehrfachintegrale - Der Satz von Fubini	. 131
		7.1.6	Beispiele für Maße	. 131
	7.2	Kurve	enintegrale	. 134
		7.2.1	Die Bogenlänge	. 134
		7.2.2	Kurvenintegration über skalare Felder	. 135
		7.2.3	Berechnung der Arbeit	. 135
		7.2.4	Integration über Gradientenfelder	. 136
	7.3	Fläche	enintegrale und Stokes'scher Satz	. 137
		7.3.1	Flächenelement und Flächenintegral im \mathbb{R}^3	. 137
		7.3.2	Beispiel: Die Kugeloberfläche	. 138
		7.3.3	Der Stokes'sche Satz	. 138
		7.3.4	Der Satz von Poincaré	. 141
		7.3.5	Das eindimensionale Integral als Flächenintegral	. 142
	74	7.3.5 Volum	Das eindimensionale Integral als Flächenintegral	. 142 143
	7.4	7.3.5 Volum 7 4 1	Das eindimensionale Integral als Flächenintegral	. 142 . 143

		742	Beispiel: Die Kugel vom Badius R 144
		7.4.3	Der Satz von Gauß – Die Divergenz als Quellendichte
	7.5	Die Ko	ontinuitätsgleichung
8	Vek	torana	lysis 147
	8.1	Verallg	gemeinertes Skalarprodukt und metrischer Tensor
	8.2	Duale	und reziproke Basis
	8.3	Intrins	ische Bedeutung der Metrik 150
	8.4	Volum	enelemente und Metrik
	8.5	Drei B	eispiele
		8.5.1	Polarkoordinaten
		8.5.2	Kugelkoordinaten
		8.5.3	Die Kugeloberfläche
	8.6	Die Ti	ssot'sche Indikatrix
	8.7	Differe	ntialoperatoren $\ldots \ldots \ldots$
		8.7.1	Der Gradient
		8.7.2	Die Divergenz
		8.7.3	Der Laplace-Operator
		8.7.4	Die Rotation
9	Einf	ührun	g in die Funktionentheorie 161
	9.1	Die ko	mplexen Zahlen
		9.1.1	Definition der komplexen Zahlen 161
		9.1.2	Rechnen mit komplexen Zahlen
		9.1.3	Die Euler'sche Formel
		9.1.4	Die Polardarstellung komplexer Zahlen
		9.1.5	Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra
		9.1.6	Die komplexe Zahlenkugel und Möbius-Transformationen
	9.2	Analyt	ische bzw. holomorphe Funktionen
		9.2.1	Die Ableitung einer komplexen Funktion
		9.2.2	Die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen
		9.2.3	Holomorphe Funktionen und die 2-dimensionale Laplace-Gleichung
		9.2.4	Beispiel: Potenzialströmung in der Fluiddynamik
		9.2.5	Konforme Abbildungen und holomorphe Funktionen 175
	9.3	Der Ca	auchy'sche Integralsatz
	9.4	Residu	enkalkül
		9.4.1	Laurent-Entwicklung und isolierte Singularitäten 179
		9.4.2	Meromorphe Funktionen
		9.4.3	Der Residuensatz
		9.4.4	Anwendungen des Residuensatzes
	9.5	Analyt	ische Fortsetzung - Riemann'sche Flächen
10	Diet	ributi	nen 197
10	10 1	Testfu	aktionen und Distributionen
	10.1	10.1 1	Ein physikalisches Beispiel: Punktladungen
		10.1.2	Funktionen als Vektorräume
		10.1.3	Die Testfunktionenräume \mathscr{D} und \mathscr{S}
		10.1.4	Distributionen als lineare Abbildungen

8

INHALTSVERZEICHNIS

w	eite	r Teil		204
-	10.6	Die Fü	Inktionalableitung	201
	10 G		un letion a la blaiteur a	901
		10.5.3	Die Heaviside-Funktion	201
		10.5.2	Diracs δ -Identität	200
		10.5.1	Das "Cauchy'sche Hauptwert"-Integral	199
-	10.5	Distril	butionen als Randwerte komplexer Funktionen	199
		10.4.2	Beispiel: Die Planck'sche Strahlungsformel	198
		10.4.1	Variablenwechsel in der Delta-Distribution	197
-	10.4	Variab	blenwechsel	197
-	10.3	Distrib	butionen als Grenzwerte regulärer Funktionen	195
-	10.2	Recher	nregeln für Distributionen	193

Zweiter Teil

II Mathematik für Studierende der Physik II

11	Gre	en'sche Funktionen	207
	11.1	Einführende Vorbemerkungen	207
	11.2	Lineare Abbildungen auf dem Funktionenraum	208
	11.3	Green'sche Funktionen	209
		11.3.1 Vergleich	211
	11.4	Beispiel: Der gedämpfte Oszillator	211
	11.5	Beispiel: Der Laplace-Operator	212
		11.5.1 Die Green'sche Funktion zu Δ für beliebige Dimensionen $\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$	213
		11.5.2 Der Helmholtz-Operator	214
		11.5.3 Die Diffusionsgleichung	214
	11.6	Randbedingungen für Green'sche Funktionen	215
		11.6.1 Randbedingungen beim gedämpften Oszillator	216
		11.6.2 Randbedingungen beim harmonischen (ungedämpften) Oszillator	217
		11.6.3 Randbedingungen für die Green'sche Funktion zum Laplace-Operator $\ \ldots \ \ldots$	218
12	Hilb	pert-Räume	221
	12.1	Grundbegriffe	221
		12.1.1 Topologische Räume	221
		12.1.2 Metrische Räume	222
		12.1.3 Normierte Vektorräume und Vektorräume mit Skalarprodukt	223
		12.1.4 Kompakte Räume	224
		12.1.5 Gleichheit von Topologien	225
		12.1.6 Banach-Räume	226
	12.2	Der Hilbert-Raum	228
	12.3	Zwei Beispiele separabler Hilbert-Räume	230
		12.3.1 ℓ^2 – Quadrat summierbare Folgen komplexer Zahlen $\hfill \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	230
		12.3.2 \mathcal{L}^2 – Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen	231
	12.4	Der duale Vektorraum und die Bra-Ket Notation	231
	12.5	Periodische Funktionen und Fourier-Reihen	233
	12.6	Komplexe Fourier-Reihen	235
	12.7	Die Elemente von \mathcal{L}^2 -Räumen	236
		12.7.1 Gleichheit von Elementen - Konvergenz von Folgen	236

205

	12.7.2 \mathcal{L}^2 enthält auch nicht-stetige Funktionen		237
	12.7.3 Stückweise stetige Funktionen		238
	12.7.4 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ enthält auch Funktionen, die für $ x \to \infty$ nicht gegen 0 konvergieren .		238
	12.7.5 \mathcal{L}^2 enthält auch singuläre Funktionen		239
	12.7.6 Dichte Teilmengen des \mathcal{L}^2		239
12.8	Lineare Operatoren in Hilbert-Bäumen		240
12.0	12.8.1 Beispiele linearer Operatoren		240
	12.8.2 Matrixdarstellung linearer Operatoren	•••	242
	12.8.3 Die Norm von Operatoren	•••	212
	12.8.4 Der Kommutator von Operatoren	•••	242
	12.8.4 Der Kommutator von Operatoren	•••	244
	12.8.5 Aujungierte und senst-aujungierte Operatoren	•••	240
	12.8.0 Unitate und Isometrische Operatoren	•••	240
	12.8.7 Eigenwerte und Spektrum eines Operators	• •	241
10.0	12.8.8 Spurklasseoperatoren	• •	248
12.9	[*] Der Orts- und Impulsoperator	•••	249
	12.9.1 Orts- und Impulsoperator sind unbeschrankt	•••	249
	12.9.2 Das Spektrum von x und $-1\frac{\partial}{\partial x}$	• •	250
	12.9.3 Die x - und k -Basis	• •	251
	12.9.4 Das Gel'fand-Tripel	• •	252
13 Fou	riar-Analyse und Fourier-Transformation		253
10 104	Fourier-Transformation		253
10.1	13.1.1 Der Gronzwort $L \rightarrow \infty$	•••	255
	13.1.2 Fourier Transformation für Testfunktionen in \mathscr{C}	• •	204
	13.1.2 Fourier-Hansionmation fur restructionen in \mathcal{I}	•••	255
	13.1.5 Verangementerung auf den \mathbb{R}	• •	201
12.0	15.1.4 Fourier-mainstonnation auf $\mathcal{L}(\mathbb{R})$	• •	200
13.2	Allweildungen	•••	209
	13.2.1 Die Diffusionsgleichung	• •	209
	13.2.2 Poisson-Gleichung	•••	201
	13.2.3 Der gedampfte harmonische Oszillator	• •	263
	13.2.4 Der ungedampte Oszillator	• •	263
	13.2.5 Quantenmechanik	• •	265
	13.2.6 Datenanalyse	• •	266
14 Line	eare Differentialgleichungen		267
14.1	Der Separationsansatz		268
1	14.1.1 Beispiel: Separation von Orts- und Zeitvariablen		269
	14.1.2 Beispiel: Laplace-Operator in Kugelkoordinaten	•••	200
14.2	Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen	•••	270
1 1.2	14.2.1 Gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung	•••	271
	14.2.1 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	• •	211
	Bostimmung einer zweiten linear unabhängigen Lösung		979
143	Variablentransformation	•••	212
14.0 14.1	Variabientransformation	•••	214
14.4	14.4.1 Die oberekterigtigehe Cleichung	• •	214
	14.4.2 Die Deluweionegleichung	•••	210
14 8	14.4.2 Die Rekursionsgleichung	• •	210
14.5	Geschiossen losbare Gleichungen	• •	211
	14.0.1 Reine Potenziunktionen		277

	14.5.2 Der harmonische Oszillator
	14.5.3 Die Bessel'sche Differentialgleichung
	14.5.4 Die Legendre'sche Differentialgleichung
	14.5.5 Die Hermite'sche Differentialgleichung
	14.5.6 Hypergeometrische Funktionen
15 Stur	m-Liouville-Theorie 28
15.1	Selbst-adjungierte Operatoren
	15.1.1 Allgemeine Vorbemerkungen
	15.1.2 Selbst-adjungierte Operatoren bezüglich des Standardmaßes
	15.1.3 Selbst-adjungierte Operatoren bezüglich eines verallgemeinerten Maßes $\ \ldots \ 28^{\prime\prime}$
	15.1.4 Randbedingungen
15.2	Sturm-Liouville-Probleme
15.3	Polynomsysteme
	15.3.1 Die Legendre-Polynome
	15.3.2 Die Hermite-Polynome
	15.3.3 Die Laguerre-Polynome
	15.3.4 Die Kugelflächenfunktionen
16 Mar	nigfaltigkeiten und Differentialformen 299
16.1	Mannigfaltigkeiten
	16.1.1 Karten und Atlanten
	16.1.2 Der Tangentialraum
	16.1.3 Vergleich mit eingebetteten Mannigfaltigkeiten
16.2	Die äußere Algebra eines Vektorraums
	16.2.1 Das zweifache Tensorprodukt
	16.2.2 Der total antisymmetrische Unterraum des q -fachen Tensorprodukts $\ldots \ldots 302$
	16.2.3 Das äußere Produkt
	16.2.4 Die äußere Algebra
	16.2.5 Die Hodge-Dualität und der *-Operator
16.3	Differentialformen
	16.3.1 1-Formen
	16.3.2 <i>p</i> -Formen
	16.3.3 Die äußere Ableitung
	16.3.4 Integrale
16.4	Anwendungen
	16.4.1 Elektrodynamik I: 3-dimensionaler Formalismus
	16.4.2 Elektrodynamik II: 4-dimensionaler (kovarianter) Formalismus
	16.4.3 Thermodynamik
A1Anh	ang I 31
A1.1	Die Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
A1.2	Einige Integrale
	A1.2.1 Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x} dx$
	A1.2.2 Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos kx}{x^2} dx$

A2Anhang II					
A2.1 Die Oberfläche der <i>d</i> -dimensionalen Einheitskugel	. 319				
A2.2 Die Minkowski-Ungleichung	. 320				
A2.3 Die Parallelogramm-Identität	. 320				
A2.4 Fourier-Reihen	. 322				
A2.5 Identitäten zu orthogonalen Polynomen	. 324				
A2.5.1 Legendre-Polynome	. 324				
A2.5.2 Assoziierte Legendre-Polynome	. 327				
A2.5.3 Hermite-Polynome	. 329				
A2.5.4 Laguerre-Polynome	. 332				
A2.5.5 Assoziierte Laguerre-Polynome	. 334				
A2.5.6 Kugelflächenfunktionen	. 335				
Literaturangaben und Referenzen					
33 33 33					
Stichwortverzeichnis	340				

Teil I

Mathematik für Studierende der Physik I

Kapitel 1

Lineare Algebra I

Dieses Kapitel wiederholt in knapper Form die Grundlagen zur Linearen Algebra, die in der Mathematikvorlesungen "Lineare Algebra I" behandelt wurden und für das Folgende von Bedeutung sind.

Nicht mehr wiederholt werden die Grundlagen der Mengenlehre (mit den Symbolen \cup, \cap und der Komplementbildung), der Logik (mit den Symbolen $\wedge, \vee, \rightarrow$ etc. und insbesondere \forall, \exists), die Mächtigkeit von Mengen, der Begriff der Abbildung bzw. Funktion (und damit zusammenhängend die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrabbildung). Ebenfalls nicht wiederholt werden die Definitionen der Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} .

1.1 Relationen

1.1.1 Das kartesische Produkt

Definition: Zu zwei Mengen M und N bezeichnet

$$M \times N = \{(m, n) | (m \in M) \land (n \in N)\}$$

$$(1.1)$$

das kartesische Produkt [cartesian product] von M und N.

 $M \times N$ besteht somit aus allen geordneten Paaren (m, n) von Elementen, bei denen das erste Element aus M und das zweite aus N ist.

Man kann auch das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst bilden:

$$M \times M = \{(m, n) | m, n \in M\},$$
(1.2)

und man kann das kartesische Produkt von beliebig vielen Mengen bilden (sogar von unendlich vielen Mengen):

$$M_1 \times M_2 \times ... \times M_k = \{(m_1, m_2, ..., m_k) | m_i \in M_i\}.$$
(1.3)

1.1.2 Zweistellige homogene Relationen

Ganz allgemein ist eine k-stellige Relation eine Teilmenge des kartesischen Produkts von k Mengen (Gl. 1.3). Wir betrachten im Folgenden zweistellige Relationen [*relations*] innerhalb einer Menge M, also Teilmengen von $M \times M$. Relationen innerhalb einer Menge bezeichnet man auch als homogen.

Definition: Eine <u>Relation</u> R auf einer Menge M ist eine Teilmenge von $M \times M$, also $R \subset M \times M$.

Gilt für zwei Elemente $x, y \in M$, dass $(x, y) \in R$, dann sagt man auch, dass x und y die Relation erfüllen und schreibt manchmal dafür $x \sim y$ oder xRy (oder man verwendet ein anderes, der Relation angemessenes Symbol).

Relationen können sehr viele verschiedene Eigenschaften haben, von denen hier nur einige vorgestellt werden. Eine Relation heißt

• symmetrisch:

$$\forall m, n \in M : (m, n) \in R \Rightarrow (n, m) \in R.$$
(1.4)

• antisymmetrisch [anti-symmetric]:

$$\forall m, n \in M : (m, n) \in R \land (n, m) \in R \Rightarrow m = n.$$
(1.5)

• asymmetrisch [asymmetric]:

$$\forall m, n \in M : (m, n) \in R \Rightarrow (n, m) \notin R.$$
(1.6)

• reflexiv [reflexive]:

$$\forall m \in M : (m,m) \in R. \tag{1.7}$$

• transitiv [transitive].

$$(m,n) \in R \land (n,p) \in R \Longrightarrow (m,p) \in R.$$
(1.8)

• total (oder vollständig) [total].

$$\forall m, n \in M : (m, n) \in R \lor (n, m) \in R.$$
(1.9)

• *linkstotal* (oder linksvollständig) [*left-total*]:

$$\forall m \in M \ \exists n \in M : (m, n) \in R \tag{1.10}$$

(entsprechend für rechtstotal).

• rechtseindeutig [left-unique]:

$$(m,n) \in R \land (m,n') \in R \Rightarrow n = n' \tag{1.11}$$

(entsprechend für linkseindeutig).

Aus der obigen Liste lassen sich totale und eindeutige Relationen auch für verschiedene Mengen (also als inhomogene Relationen) definieren. In diesem Sinne ist eine *Abbildung* [mapping] von einer Menge M in eine Menge N eine linkstotale, rechtseindeutige Relation.

1.1.3 Darstellung einer Relation als Graph – die Adjazenzmatrix

Relationen in endlichen Mengen lassen sich als Graphen (Punkte mit Verbindungslinien) darstellen und diese Graphen besitzen eine algebraische Darstellung durch eine Matrix.

Sei $M = \{v_1, v_2, ..., v_N\}$ eine endliche Menge mit N Elementen. Die Elemente der Menge stellen wir als Punkte (Vertizes, Knoten) [*vertices, nodes*] in einer Ebene dar. Falls $(v_i, v_j) \in R$, also das geordnete Paar (v_i, v_j) , Element der Relation ist, zeichnet man eine gerichtete Linie von v_i nach v_j . Bei einer symmetrischen Relation kann man auf die Gerichtetheit der Linien verzichten; in diesem Fall repräsentiert eine Linie beide Elemente, (v_i, v_j) und (v_j, v_i) . Für diagonale Elemente (v_i, v_i) kann man einen Selbst-Loop zeichnen, also eine Linie, die einen Vertex mit sich selbst verbindet. Es folgen zwei Beispiele:



Man kann eine Relation (bzw. einen Graphen) auch durch eine Tabelle darstellen, die man Adjazenzmatrix [adjacency matrix] nennt. Die Adjazenzmatrix A_{ij} ist folgendermaßen definiert:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_j, v_i) \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(1.12)

(Man beachte, dass die Reihenfolge der Indizes an der Adjazenzmatrix umgekehrt ist, als bei der Relation. Dies ist für manche Berechnungen sinnvoll.) Die beiden obigen Beispiele haben folgende Adjazenzmatrizen:

$$A_{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(1.13)

1.1.4 Ordnungsrelation

Definition: Eine <u>Ordnungsrelation</u> [order relation] ist eine antisymmetrische, reflexive, transitive Relation, d.h., es gilt (jeweils für alle x, y, z der betrachteten Menge):

$$x \le x$$
 (*Reflexivität*) (1.14)

$$(x \le y) \land (y \le x) \Rightarrow x = y$$
 (Antisymmetrie) (1.15)

$$x < y) \land (y < z) \Rightarrow x < z \qquad (Transitivität). \tag{1.16}$$

Manche Autoren oder Bücher fordern für eine Ordnungsrelation noch die Vollständigkeit oder *Totalität* [totality]:

$$\forall x, y: (x \le y) \lor (y \le x)$$
 (Totalität) (1.17)

Dies bedeutet, dass für zwei beliebige Elemente x, y entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Zur Betonung, dass diese Bedingung erfüllt ist, spricht man auch von einer *Totalordnung* oder *vollständigen Ordnung*. Möchte man betonen, dass die Bedingung nicht notwendigerweise erfüllt ist, spricht man von einer *Partialordnung* oder *Teilordnung* [partial ordering].

Ist auf einer Menge eine Ordnungsrelation gegeben, kann man auch die Relation < ("echt kleiner als") definieren:

$$x < y \iff (x \le y) \land (x \ne y).$$
(1.18)

Beispiel: In der Relativitätstheorie definiert man auf \mathbb{R}^4 (mit $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ und $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$) die Relation C:

$$(x,y) \in C \iff (y_0 - x_0) \ge |\vec{y} - \vec{x}| \tag{1.19}$$

Man sagt in diesem Fall "y liegt in der kausalen Zukunft von x" oder "y - x ist zeitartig". Hierbei handelt es sich um eine Teilordnung.

Beispiel: Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M kann man durch folgende Vorschrift eine Teilordnung R definieren: Für alle $U_i, U_j \subseteq M$ gilt:

$$(U_i, U_j) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad U_i \subseteq U_j \,. \tag{1.20}$$

Diese Definition ist natürlich auch sinnvoll, wenn die Menge M unendlich viele Elemente hat.

Die reellen Zahlen besitzen eine Totalordnung, die folgende Bedingungen erfüllt: Für alle reellen x, y, z gilt

$$x < y \Longleftrightarrow x + z < y + z, \tag{1.21}$$

und, sofern z > 0:

$$x < y \Longleftrightarrow xz < yz \,. \tag{1.22}$$

Die komplexen Zahlen besitzen keine Totalordnung mit diesen Eigenschaften.

1.1.5 Äquivalenzrelationen, Äquivalenzklassen und Quotientenmengen

Definition: Eine <u>Äquivalenzrelation</u> [equivalence relation] auf einer Menge M (für eine Äquivalenzrelation verwendet man statt R oft das Symbol \sim) ist eine symmetrische, reflexive, transitive Relation:

$$x \sim x$$
 (*Reflexivität*) (1.23)

$$(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$$
 (Symmetrie) (1.24)

$$(x \sim y) \land (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$$
 (Transitivität). (1.25)

Beispiel: Auf den Punkten (x, y) des \mathbb{R}^2 sei folgende Äquivalenzrelation definiert: $(x_1, y_1) \sim_r (x_2, y_2)$ (oder $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$) sofern $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Zwei Punkte sind also äquivalent, wenn sie denselben Abstand vom Ursprung haben. Die drei Axiome sind leicht überprüft. Alle Punkte auf einem Kreis um den Ursprung sind im angegebenen Sinne äquivalent.

Ist auf einer Menge M eine Äquivalenzrelation definiert, kann man M in disjunkte Äquivalenzklassen [equivalence classes] aufteilen, die eine Partition von M bilden. Allgemein versteht man unter einer Partition (oder Teilung) einer Menge M eine Menge von Teilmengen $\{A_i\}$ mit

$$M = \bigcup_{i} A_{i} \qquad \text{und} \quad A_{i} \cap A_{j} = \emptyset \quad \text{für } i \neq j.$$
(1.26)

Für $x \sim y$ gehören x und y zur selben Äquivalenzklasse und umgekehrt: Zwei Elemente derselben Menge sind immer äquivalent.

Beispiel: Für das oben angegebene Beispiel der Äquivalenzklassen von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf Kreisen mit gleichem Radius gilt:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_r K_r \qquad \text{mit } K_r = \{(x, y) | x^2 + y^2 = r^2\}.$$
(1.27)

Hier ist der "Index" zur Bezeichnung einer Äquivalenzklasse der Radius r, und innerhalb einer Äquivalenzklasse K_r liegen alle Punkte, die vom Ursprung denselben Abstand r haben.

Definition: Sei eine Menge M und eine Äquivalenzrelation ~ gegeben. Die Menge der Äquivalenzklassen heißt <u>Quotientenmenge</u> M/\sim (man spricht auch von der "Menge M modulo der Äquivalenzrelation ~").

In vielen Fällen wählt man aus jeder Äquivalenzklasse einen *Vertreter* [*representative*], allerdings sollte man die Äquivalenzklasse (als eine Menge) nicht mit ihren Vertretern verwechseln.

Beispiel: Für das obige Beispiel der Unterteilung der Ebene in Kreise erhalten wir:

$$\mathbb{R}^2 / \sim_r \simeq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,. \tag{1.28}$$

Die Quotientenmenge lässt sich also darstellen durch die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen, d.h. als die Menge der möglichen Radien. Ich habe in obiger Gleichung das Symbol \simeq benutzt (und nicht =) um anzudeuten, dass die beiden Mengen äqiuvalent sind, dass es sich aber nicht unbedingt um dieselben Mengen handelt (links steht eine Menge von Mengen, rechts eine Teilmenge der reellen Zahlen). In vielen Fällen findet man an dieser Stelle aber auch ein Gleichheitszeichen.

Beispiel: Ein weiteres prominentes Beispiel für eine Quotientenmenge ergibt sich aus der Äquivalenzrelation "modulo" auf der Menge der ganzen Zahlen. Seien x und y zwei ganze Zahlen, dann definieren wir eine Äquivalenzrelation " $x \equiv y \mod N$ " durch die Vorschrift:

$$x \equiv y \mod N \Leftrightarrow (x - y)$$
 ist durch N ohne Rest teilbar. (1.29)

Die Äquivalenzklassen sind jeweils Mengen von Zahlen, die bei einer Teilung durch N denselben Rest haben. Die Quotientenmenge (dafür schreibt man in diesem Fall meist $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, was man als " \mathbb{Z} modulo N-fache Vielfache von ganzen Zahlen" lesen kann) entspricht diesem Rest, also der Menge der Zahlen $\{0, 1, 2, ..., N - 1\}$. Das Element 0 steht hier eigentlich für die Menge aller ganzen Zahlen, die durch N teilbar sind. Entsprechend steht 1 für die Menge aller ganzen Zahlen, die bei einer Division durch N den Rest 1 ergeben, usw.

1.2 Gruppen, Körper, Vektorräume

1.2.1 Gruppen und Untergruppen

Definition: Eine <u>Gruppe</u> [group] ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. <u>Associativität</u> [associativity]: Für je drei Elemente $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt:

$$g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1 \,. \tag{1.30}$$

2. Existenz eines <u>neutralen Elements</u> [neutral element]: Es gibt ein Element $e \in G$, sodass für alle Element $g \in G$ gilt:

$$g \circ e = e \circ g = g \,. \tag{1.31}$$

Manchmal bezeichnet man das neutrale Element auch als "Identität" [identity element] oder auch als "Eins-Element".

3. Existenz eines <u>inversen Elements</u> [inverse element]: Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein Element g^{-1} , sodass

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e \,. \tag{1.32}$$

Anmerkungen:

1. Gilt neben den genannten Axiomen noch für zwei beliebige Elemente $g_1, g_2 \in G$ die Kommutativität [commutativity],

$$g_2 \circ g_1 = g_1 \circ g_2 \,, \tag{1.33}$$

so spricht man von einer kommutativen Gruppe oder auch abelschen Gruppe [abelian group]. Bei kommutativen Gruppen schreibt man für die Verknüpfung oft + und das neutrale Element wird mit 0 bezeichnet.

2. Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} bildet eine Gruppe unter der Addition; das zu $n \in \mathbb{Z}$ inverse Element wird mit (-n) bezeichnet. Die Subtraktion ist also keine gesonderte Verknüpfung sondern bezeichnet die Addition mit dem inversen Element.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (jeweils ohne das Element 0) bilden eine Gruppe unter der Multiplikation, wobei das inverse Element zu einer Zahl x mit $x^{-1} = \frac{1}{x}$ bezeichnet wird. Wiederum ist die Division keine eigenständige Verknüpfung sondern bezeichnet die Multiplikation mit einem inversen Element.

3. Die Gruppe S_N der Permutationen [permutations] auf einer endlichen Menge M mit N Elementen besteht aus allen bijektiven Abbildung dieser Menge M in sich selbst. Anschaulich entspricht dies einer Umordnung (Permutation) der Menge $\{1, 2, ..., N\}$. Diese Gruppe hat N! Elemente. Eine Permutation heißt gerade, wenn sie sich als Hintereinanderschaltung einer geraden Anzahl von paarweisen Vertauschungen schreiben lässt. Andernfalls heißt sie ungerade. Man bezeichnet mit $\sigma_P = \pm 1$ das Vorzeichen einer Permutation P, wobei $\sigma_P = 1$ falls P gerade und $\sigma_P = -1$ falls P ungerade.

Definition: Eine Teilmenge $H \subset G$ heißt <u>Untergruppe</u> [subgroup] von G, wenn zu jedem $g \in H$ auch $g^{-1} \in H$ und für alle $g_1, g_2 \in H$ auch $g_2 \circ \overline{g_1 \in H}$ gilt.

Definition: Eine Abbildung $f : G_1 \to G_2$ von einer Gruppe G_1 in eine Gruppe G_2 heißt <u>Gruppenhomomorphismus</u> [group homomorphism], wenn $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ und für alle $g, g' \in G_1$ <u>gilt:</u> $f(g') \circ f(g) = f(g' \circ g)$.

Aus dieser Definition folgt $f(e_1) = e_2$ (wobei e_1 und e_2 die jeweiligen Einselemente in G_1 und G_2 sind). Handelt es sich bei f um eine bijektive Abbildung, bezeichnet man f als *Gruppenisomorphismus* [group isomorphism] und die Gruppen G_1 und G_2 heißen isomorph [isomorphic].

1.2.2 Ringe und Körper

Definition: Eine <u>Halbgruppe</u> ist eine Menge R zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung \circ : $R \times R \rightarrow R$; es gilt also (für alle $x, y, z \in R$):

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \,. \tag{1.34}$$

1.2. GRUPPEN, KÖRPER, VEKTORRÄUME

Definition: Ein <u>Ring</u> [ring] ist eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen , $+/\cdot : R \times R \to R$ mit folgenden Eigenschaften (soweit nicht anders erwähnt für alle $x, y, z \in R$):

- R ist eine abelsche Gruppe unter der Operation +. Das Einselement wird mit 0 bezeichnet, das inverse Element zu einem Element $x \in R$ mit -x.
- R ist eine Halbgruppe bezüglich ·.
- Es gelten folgende weitere Beziehungen (diese bezeichnet man als Distributivgesetze):

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
 (1.35)

$$(x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$
 (1.36)

Anmerkungen:

- 1. Besitzt R ein (beiseitiges) Eins-Element bezüglich der Multiplikation, bezeichnet man den Ring als *unitär*.
- 2. Ist die Multiplikation kommutativ, spricht man von einem kommutativen Ring.
- 3. Eine Teilmenge $I \subset R$ heißt linksseitiges (rechtsseitiges) *Ideal*, wenn I eine Untergruppe von R bezüglich + ist und für alle $x \in R$ und alle $a \in I$ gilt: $a \cdot x \in I$ ($x \cdot a \in I$). Ist ein Ideal sowohl links- als auch rechtsseitig, spricht man einfach von '*Ideal*'.

Beispiel: Im Ring der reell-wertigen Funktionen über einer Menge M (also alle Funktionen $f: M \to \mathbb{R}$) ist die Menge I_x aller Funktionen, die an einem festen Punkt $x \in M$ verschwinden (also f(x) = 0), ein Ideal.

Definition: Ein <u>Körper</u> [(number) field] ist eine Menge \mathbb{K} zusammen mit zwei Verknüpfungen, +/·: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften (soweit nicht anders erwähnt für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$):

- \mathbb{K} ist eine abelsche Gruppe unter der Operation +. Das Einselement wird mit 0 bezeichnet, das inverse Element zu einem Element $x \in \mathbb{K}$ mit -x.
- Es gilt folgende weitere Beziehung:

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$
 Distributivgesetz. (1.37)

Wir werden uns meist mit dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} und dem Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} beschäftigen. Es gibt aber auch beispielsweise endliche Zahlenkörper wie $\mathbb{F}_1 = \{0, 1\}$ mit den üblichen Verknüpfungen modulo 2 oder allgemeiner \mathbb{F}_p , die Menge aus allen Zahlen 0, ..., p-1 mit den Verknüpfungen jeweils modulo p (wobei p eine Primzahl ist). Bei der Multiplikation wird das Verknüpfungszeichen "·" auch meist weggelassen.

1.2.3 Vektorräume

Definition: Ein <u>Vektorraum</u> [vector space] besteht aus einer Menge V und einem Körper K mit zwei Verknüpfungen $+: V \times V \to V$ und $\cdot: K \times V \to V$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind (soweit nicht anders erwähnt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ und $\alpha, \beta \in K$):

- V ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Verknüpfung +.
- Es gilt:

$$\alpha \cdot (\beta \boldsymbol{x}) = (\alpha \beta) \cdot \boldsymbol{x} \tag{1.38}$$

$$\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{y}$$
(1.39)

$$(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x} \tag{1.40}$$

$$1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}. \tag{1.41}$$

Die Elemente von V heißen <u>Vektoren</u>.

Wir werden im Folgenden für den Körper \mathbb{K} meist die reellen Zahlen \mathbb{R} oder die komplexen Zahlen \mathbb{C} betrachten.

Definition: Ein Satz von Vektoren $\{x_i\}_{i=1,...,n}$ heißt <u>linear unabhängig</u> [linearly independent], wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i = 0 \,\,\forall i \,. \tag{1.42}$$

Die maximale Zahl n, für die es in einem Vektorraum V linear unabhängige Vektoren gibt, heißt die *Dimension* [dimension] des Vektorraums V. Ein Satz von n linear unabhängigen Vektoren in V bildet eine *Basis* des Vektorraums, wenn n die Dimension des Vektorraums V ist. Jedes Element in V lässt sich als eindeutige Linearkombination dieser Basis schreiben. (Die letzten beiden Aussagen setzen voraus, dass n endlich ist. Zu unendlich dimensionalen Vektorräumen siehe Kap. 12.)

Definition: Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ heißt <u>Norm</u> auf V, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind $(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \text{ und } \forall \alpha \in \mathbb{K})$:

$$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0 \qquad \text{und} \quad \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0 \tag{1.43}$$

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\| \tag{1.44}$$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$
 (Dreiecksungleichung). (1.45)

1.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

Im Folgenden seien V und W immer Vektorräume der Dimension m bzw. n. Weitere Strukturen (Norm oder Skalarprodukt) werden erst einmal nicht vorausgesetzt bzw., falls notwendig, explizit erwähnt.

Definition: Eine Abbildung $A : V \to W$ heißt <u>linear</u> [linear mapping], wenn für alle Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ folgende Bedingung erfüllt ist:

$$A(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha A(\boldsymbol{x}) + \beta A(\boldsymbol{y}).$$
(1.46)

Sei auf V eine Basis $\{\boldsymbol{e}_j\}(j = 1, ..., m)$ gegeben, sodass ein Vektor \boldsymbol{x} die Zerlegung $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^m x_j \boldsymbol{e}_j$ hat, dann folgt aus der Bedingung der Linearität:

$$A(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} x_j A(\boldsymbol{e}_j) \,. \tag{1.47}$$

(Da auf V und/oder W kein Skalarprodukt gegeben sein muss, kann es sich um eine beliebige Basis handeln; die Begriffe "orthogonal" oder "normiert" müssen also nicht definiert sein.) Die lineare Abbildung A liegt also fest, wenn sie auf einem Satz von Basisvektoren von V definiert ist. Sei $\{f_i\}$ (i = 1, ..., n) eine Basis von W, dann lässt sich das Bild jedes Basisvektors aus V eindeutig nach der Basis von W zerlegen:

$$A(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} \boldsymbol{f}_i \,. \tag{1.48}$$

Damit folgt für einen beliebigen Vektor \boldsymbol{x} :

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} x_j A(\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j}^{n,m} A_{ij} x_j \mathbf{f}_i.$$
 (1.49)

Ist $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$ der Bildvektor von \boldsymbol{x} unter der Abbildung A, dann gilt somit für die Komponenten:

$$y_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j \,. \tag{1.50}$$

Sind auf V und W jeweils Sätze von Basisvektoren gegeben, kann man A daher als eine $n \times m$ Matrix mit Elementen A_{ij} schreiben. Man beachte, dass die Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix von der gewählten Basis abhängt, wohingegen die lineare Abbildung selbst basisunabhängig ist. (Das Gleiche gilt auch für Vektoren: Ihre Darstellung durch Komponenten ist basisabhängig; als Elemente eines Vektorraums sind sie jedoch basisunabhängig definiert.)

Zu zwei linearen Abbildungen $A: V \to W$ und $B: W \to U$ (U ebenfalls Vektorraum) ist auch die Hintereinanderschaltung $BA: V \to U$ eine lineare Abbildung. Zu gegebenen Basen in V, W, Ugilt, ausgedrückt in Matrixelementen (Komponenten):

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{kj} \,. \tag{1.51}$$

Definition: Der <u>Kern</u> [kernel] einer linearen Abbildung $A : V \to W$ besteht aus allen Vektoren in V, die auf den Nullvektor in W abgebildet werden:

$$Ker(A) = \{ \boldsymbol{x} \in V | A(\boldsymbol{x}) = 0 \}.$$
 (1.52)

Besteht Ker(A) nur aus dem Nullvektor in V, ist A injektiv. Allgemein ist der Kern selbst immer ein Untervektorraum von V.

Definition: Das <u>Bild</u> [image] einer linearen Abbildung $A : V \to W$ ist die Menge der Elemente $y \in W$, für die es ein Urbild gibt:

$$Bild(A) = \{ \boldsymbol{y} \in W | \exists \boldsymbol{x} \in V : \boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x}) \}.$$
(1.53)

Ist Bild(A) = W, ist A surjektiv. Auch Bild(A) ist immer ein (Unter-)Vektorraum von W. Die Dimension von Bild(A) bezeichnet man auch als den *Rang* der Abbildung A.

Seien V, W Vektorräume derselben Dimension und $A : V \to W$ eine lineare Abbildungen von V nach W, dann bezeichnet man A als *(beidseitig) invertierbar*, wenn es eine lineare Abbildung $A^{-1}: W \to V$ gibt, sodass $A^{-1}A = \mathbf{1}_V$ und $AA^{-1} = \mathbf{1}_W$ gilt. Hierbei sind $\mathbf{1}_V$ die Identitätsabbildung auf V und $\mathbf{1}_W$ die Identitätsabbildung auf W, die jedes Element auf sich selbst abbilden. Eine invertierbare Abbildung dieser Form ist immer bijektiv. Sei A_{ij} eine Matrixdarstellung zu einer linearen Abbildung $A: V \to V$ (wobei V endlichdimensional sein soll). Dann bezeichnet man

$$\det A = \sum_{P} \sigma_P A_{1i_1} A_{2i_2} \cdots A_{mi_m} \tag{1.54}$$

als die Determinante der Matrix A_{ij} . Die Summe erstreckt sich über alle Permuationen der Menge $\{1, 2, ..., m\}$ und σ_P ist das Vorzeichen der Permutation. Eine lineare Abbildung ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante einer ihrer Matrixdarstellungen von 0 verschieden ist. Es wird im Folgenden angenommen, dass die Standardverfahren zur Berechnung von Determinanten sowie die Umformungsregeln für Determinanten bekannt sind.

Die Menge aller $n \times n$ -Matrizen $\{A_{ij}\}$ mit Elementen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} und det $A \neq 0$ bildet eine Gruppe, die sogenannte allgemeine lineare Gruppe [general linear group] $\operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$. Die Untermenge der Matrizen mit Determinante 1 bildet eine Untergruppe, die spezielle lineare Gruppe $\operatorname{SL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\operatorname{SL}(n, \mathbb{C})$. Allgemeiner kann man auch definieren: Sei V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} , dann bildet die Menge der Automorphismen von V (der invertierbaren linearen Abbildungen) die Gruppe $\operatorname{GL}(V, \mathbb{K})$.

1.4 Eigenwerte und Eigenräume

Es seien V ein Vektorraum (soweit nicht anders angegeben sei der Körper K entweder \mathbb{R} oder \mathbb{C}) und $A: V \to V$ eine lineare Abbildung von V auf sich selbst.

Definition: Ein von 0 verschiedener Vektor $\boldsymbol{v} \in V$ heißt Eigenvektor zu A mit zugehörigem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn folgende Beziehung gilt:

$$A(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v} \,. \tag{1.55}$$

Falls die Bedingung für zwei Vektoren \boldsymbol{v} und \boldsymbol{w} zum selben Wert λ erfüllt ist, ist sie wegen der Linearität von A auch für alle Linearkombinationen $\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}$ erfüllt. Daher bildet die Menge aller Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ einen linearen Unterraum, den man auch als den *Eigenraum* zum Eigenwert λ bezeichnet.

Definition: Das charakteristische Polynom zu einer Matrix A ist

$$p_A(\lambda) = \det \left(A - \lambda \mathbf{1} \right). \tag{1.56}$$

(Diese Definition ist zunächst nur für endlich dimensionale Vektorräume sinnvoll. Ganz allgemein gelten im Folgenden Sätze, die von der Existenz einer Determinante oder dem charakteristischen Polynom abhängen, zunächst nicht für unendlich dimensionale Vektorräume.) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die möglichen Eigenwerte von A. Man bezeichnet den Grad der Entartung des Polynoms bezüglich eines Eigenwerts λ als die algebraische Vielfachheit von λ und die Dimension des zugehörigen Eigenraums als die geometrische Vielfachheit von λ .

Beispiel: Die Matrix (Jordan-Block, siehe Abschnitt 1.5):

$$J = \left(\begin{array}{cc} a & 1\\ 0 & a \end{array}\right) \tag{1.57}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\det \left(J - \lambda \mathbf{1}\right) = (a - \lambda)^2. \tag{1.58}$$

Da

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+y \\ ay \end{pmatrix}$$
(1.59)

folgt als einziger Eigenraum der 1-dimensionale Unterraum, der aus reellen Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}$ besteht, für den also y = 0 ist. Der Eigenwert $\lambda = a$ besitzt somit die algebraische Vielfachheit 2 und die geometrische Vielfachheit 1.

1.5 Basistransformationen und Normaldarstellungen einer Matrix

1.5.1 Äquivalente Matrizen

Es seien V und W Vektorräume (über demselben Körper K, in unserem Fall immer den reellen oder komplexen Zahlen) und $A: V \to W$ eine lineare Abbildung. Zu einer gegebenen Basis $\{\boldsymbol{e}_j\}$ von V (j = 1, ..., m) und einer gegebenen Basis $\{\boldsymbol{f}_i\}$ (i = 1, ..., n) von W sei A_{ij} die Matrixdarstellung der linearen Abbildung.

Seien $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_j\}$ eine zweite Basis auf V und $\{\tilde{\boldsymbol{f}}_i\}$ eine zweite Basis auf W. Dann gibt es invertierbare lineare Abbildungen $T_v: V \to V$, sodass $T_v(\boldsymbol{e}_j) = \tilde{\boldsymbol{e}}_j$ ($\forall j$; die Indizes laufen immer von 1 bis zur jeweiligen Dimension des Vektorraums) und $T_w: W \to W$, sodass $T_w(\boldsymbol{f}_i) = \tilde{\boldsymbol{f}}_i$ ($\forall i$). Seien weiterhin A_{ij} die Matrixdarstellung von A bezüglich der Basen $\{\boldsymbol{e}_j\}$ und $\{\boldsymbol{f}_i\}$ und \tilde{A}_{ij} die Matrixdarstellung von A bezüglich der Basen $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_j\}$ und $\{\tilde{\boldsymbol{f}}_i\}$. Dann folgt wegen

$$\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x}) \implies T_{w}^{-1}T_{w}\boldsymbol{y} = A(T_{v}^{-1}T_{v}\boldsymbol{x}) \qquad \text{bzw.} \quad T_{w}\boldsymbol{y} = (T_{w}AT_{v}^{-1})T_{v}\boldsymbol{x} \qquad (1.60)$$

für die Matrixelemente von A und \hat{A}

$$\tilde{A}_{kl} = \sum_{ij} (T_{\rm w})_{ki} A_{ij} (T_{\rm v}^{-1})_{jl} \,.$$
(1.61)

Man bezeichnet zwei Matrizendarstellungen einer Abbildung $A: V \to W$ als äquivalent, wenn es reguläre (invertierbare) Abbildungen T_v und T_w auf V bzw. W gibt, sodass obige Beziehung gilt. Es zeigt sich, dass es in jeder Äquivalenzklasse einen sehr einfachen Äquivalenzklassenvertreter gibt, der auf der Hauptdiagonalen nur 1er und 0er hat, wobei die Anzahl der 1er dem Rang (also der Dimension des Bildraums) entspricht. Alle $n \times m$ -Matrizen mit gleichem Rang sind in diesem Sinne äquivalent. Man beachte in diesem Zusammenhang jedoch, dass im Gegensatz zu den sogenannten Endomorphismen (also Abbildungen von einem Vektorraum in sich selbst) hier sowohl die Ausgangsals auch die Zielbasis frei gewählt werden können.

Beweisskizze: Hat die Matrix A den Rang k, so gibt es k linear unabhängige Vektoren $\{x_j\}$ in V, die auf k linear unabhängige Vektoren $\{y_i\}$ in W abgebildet werden. Weiterhin gibt es im Kern von $A \ n - k$ linear unabhängige Vektoren $\{\tilde{x}_j\}$, die auf die 0 in W abgebildet werden, und es gibt in $W \ m - k$ linear unabhängige Vektoren $\{\tilde{y}_i\}$, zu denen es keine Vektoren in V gibt, die auf diese Vektoren abgebildet werden. Wählt man nun in V die Basis $\{x_j\} \cup \{\tilde{x}_j\}$ und in W die Basis $\{y_i\} \cup \{\tilde{y}_i\}$, so hat A die geforderte Form.

1.5.2 Jordan'sche Normalform ähnlicher Matrizen

Sei nun $A: V \to V$ eine lineare Abbildung eines Vektorraums V in sich selbst. Sofern der Körper, über dem der Vektorraum definiert ist, algebraisch abgeschlossen ist (d.h., alle Polynomgleichungen

KAPITEL 1. LINEARE ALGEBRA I

lassen sich in lineare Faktoren faktorisieren, beispielsweise sind die komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen, die reellen Zahlen jedoch nicht) kann durch eine geeignete Wahl der Basisvektoren die Matrixdarstellung dieser Abbildung immer auf die sogenannte *Jordan'sche Normalform* gebracht werden. Da wir diese in der Physik selten brauchen werden, soll diese Darstellung hier nicht bewiesen sondern nur beschrieben werden. Beweise findet man in allen Büchern zur linearen Algebra bzw. zu Matrizen (z.B. [Kowalsky 1992, Lancaster 1969, Gantmacher 1959]). Die Diagonalisierung von sogenannten selbst-adjungierten bzw. allgemeiner normalen Matrizen spielt hingegen in der Physik eine wichtige Rolle und wird in Kap. 2.3 behandelt.

Ein Jordan-Block ist eine Matrix von folgender Gestalt:

$$J_{j} = \begin{pmatrix} \lambda_{j} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{j} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{j} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{j} \end{pmatrix}.$$
 (1.62)

Jede lineare Abbildung $A: V \to V$ (über \mathbb{C}) lässt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation bzw. die Wahl einer geeigneten Basis in die Form

$$A_{\rm J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_k \end{pmatrix}$$
(1.63)

bringen. Die Anzahl der Jordan-Blöcke zu einem festen Eigenwert λ ist gleich der sogenannten geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts (also der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu λ). Die Summe der Dimensionen aller Jordan-Blöcke zu einem Eigenwert λ ist gleich der algebraischen Vielfachheit (also der Potenz, mit der der Faktor $(x - \lambda)$ im charakteristischen Polynom auftritt). Wie viele Jordan-Blöcke es zu einem festen Eigenwert λ gibt und welche Dimension diese Jordan-Blöcke haben hängt von den Dimensionen der Kerne von $(A - \lambda \mathbf{1})^s$ (wobei s die Werte s = 1, 2, 3, ...annehmen kann) ab. Hier sei für Einzelheiten auf die allgemeine Literatur verwiesen.

1.5.3 Funktionen der Jordan'schen Normalform

Manchmal muss die Funktion einer Matrix berechnet werden. Im Allgemeinen verwendet man dazu die Darstellung durch Reihen, die in Kap. 3 eingeführt wird. Daher betrachte ich hier nur Funktionen, die sich als Polynomfunktion darstellen lassen. Die Übertragung auf unendliche Reihen ist - bis auf Fragen zur Konvergenz - problemlos.

Sei p(x) ein Polynom *n*-ter Ordnung, also $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, und *A* eine lineare Abbildung. Die lineare Abbildung p(A) ist dann definiert durch:

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k , \qquad (1.64)$$

wobei A^k die k-fache Hintereinanderausführung der Abbildung A ist. Unter einer Ähnlichkeitstransformation $A \to S^{-1}AS$ transformiert sich p(A) entsprechend: $p(A) \to p(S^{-1}AS) =$

 $S^{-1}p(A)S$. Das bedeutet, wir können p(A) dadurch bestimmen, dass wir die Abbildung A in ihrer Normalform betrachten. Hat eine Matrix Blockdiagonalgestalt,

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{pmatrix},$$
(1.65)

wobei B_i Matrizen sind, gilt:

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(B_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(B_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(B_n) \end{pmatrix}.$$
 (1.66)

Da sich jede Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation auf die Jordan'sche Normalform bringen lässt, muss man letztendlich nur Potenzen von Jordan-Blöcken bestimmen. Für einen Jordan-Block (Gl. 1.62) zeigt man (z.B. durch vollständige Induktion über die Potenzen von Jordan-Blöcken):

$$p(J) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{1}{2}p''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}p^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & p(\lambda) & p'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}p^{(n-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & p(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-3)!}p^{(n-3)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(\lambda) \end{pmatrix}.$$
 (1.67)

Hierbei sind $p'(\lambda)$ die erste Ableitung des Polynoms $p(\lambda)$ und entsprechend $p''(\lambda)$ die zweite Ableitung und $p^{(n)}(\lambda)$ die *n*-te Ableitung. Auf diese Weise kann man Polynomfunktionen von Matrizen bestimmen.

Man beachte allerdings, dass die Jordan'sche Normalform nur in komplexen Vektorräumen (bzw. Vektorräumen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper) möglich ist. Für den Körper der reellen Zahlen gibt es auch eine Normalform, die aber etwas komplizierter ist.

1.6 Der duale Vektorraum

Da ein Körper auch immer ein Vektorraum (über sich selbst) ist, können wir die Menge aller linearen Abbildungen von einem Vektorraum V in seinen Körper betrachten. Diesen Raum bezeichnet man als den dualen Vektorraum V^{*} [dual vector space] zu V. Es ist also:

$$V^* = \{ \boldsymbol{\omega} | \boldsymbol{\omega} : V \to \mathbb{K}, \text{ linear} \}.$$
(1.68)

Für die Wirkung von einem Element $\boldsymbol{\omega}$ des Dualraums auf ein Element \boldsymbol{x} des Vektorraums schreiben wir $\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x} \rangle$ (statt $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$) und die Linearität bedeutet:

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{y} \rangle.$$
(1.69)

 V^* ist selbst wieder ein Vektorraum, wobei die Linearkombination von zwei Elementen $\omega_1, \omega_2 \in V^*$ folgendermaßen definiert ist:

$$\langle \alpha \boldsymbol{\omega}_1 + \beta \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{x} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{x} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{x} \rangle \quad \forall \, \boldsymbol{x} \,.$$
 (1.70)

Sei $\{e_i\}$ eine Basis auf V, dann ist ein Element $\boldsymbol{\omega}$ des dualen Vektorraums wieder eindeutig festgelegt, wenn $\boldsymbol{\omega}$ auf den Basiselementen definiert ist. Zu einer Basis $\{e_i\}$ von V definierten wir die dualen Basiselemente $\{\varepsilon_i\}$ von V^* durch die Bedingung:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle = \delta_{ij} \,. \tag{1.71}$$

Für endlich-dimensionale Vektorräume bildet $\{\varepsilon_j\}$ eine Basis des Dualraums. Daher haben für endlich-dimensionale Vektorräume V und V^{*} dieselbe Dimension. Dies gilt im Allgemeinen nicht für unendlich-dimensionale Vektorräume. Wir werden im Zusammenhang mit Funktionenräumen und Distributionen (Kap. 10) darauf zurückkommen.

Die bisherigen Konstruktionen verwenden nur die Vektorraumaxiome von V. Viele Strukturen, die auf V zusätzlich definiert werden, lassen sich auf V^* übertragen. Ist beispielsweise auf V eine Norm $\|\cdot\|$ definiert, kann man auch auf V^* eine Norm definieren:

$$\|\boldsymbol{\omega}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x} \rangle.$$
 (1.72)

Kapitel 2

Vektorräume mit Skalarprodukt

In diesem Kapitel betrachten wir Vektorräume, auf denen ein Skalarprodukt (positiv und nicht entartet, siehe Kap 2.1) definiert ist. Manche der Konzepte lassen sich zwar auch auf allgemeinere Vektorräume erweitern, dies soll hier aber nicht untersucht werden. Man beachte auch, dass ein Skalarprodukt eine Norm induziert. Wir werden hier immer diese durch das Skalarprodukt induzierte Norm betrachten. Außerdem seien die Dimensionen der Vektorräume in diesem Kapitel immer endlich. Es wird allerdings betont, falls eine Aussage nicht für unendlich dimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt gilt (solche Vektorräume werden in den Kapiteln 12, 10 und 11 behandelt).

2.1 Skalarprodukte

Vektorräume mit einem Skalarprodukt spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Ich betrachte hier Vektorräume über \mathbb{R} und Vektorräume über \mathbb{C} getrennt, obwohl man den ersten Fall (reelle Zahlen) als Spezialfall der Definition für komplexe Zahlen auffassen kann. Skalarprodukte sind dabei ein Spezialfall von symmetrischen, bilinearen Produkten (bzw. hermiteschen, sesquilinearen Produkten, wenn man den Körper der komplexen Zahlen betrachtet).

Definition: Es sei V ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} . Eine symmetrische Bilinearform [symmetric bilinear form] ist eine Abbildung $g: V \times V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(Symmetrie)
$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$$
 (2.1)

(Bilinearität)
$$g(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{z}) = \alpha g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$
 (2.2)

Wegen der Eigenschaft der Symmetrie folgt aus der Linearität im zweiten Argument auch die Linearität im ersten Argument (daher <u>bi</u>linear), d.h., es gilt auch:

$$g(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V , \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$

$$(2.3)$$

Definition: Es sei V ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{C} . Eine hermitesche Sesquilinearform [hermitean sesquilinear form] ist eine Abbildung $g: V \times V \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(Hermitizität)
$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$$
 (2.4)

 $(\text{Sesquilinearit}\ddot{a}) \quad g(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{z}) = \alpha g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V \ , \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ . \ (2.5)$

In diesem Fall folgt im ersten Argument eine Linearität mit komplexer Konjugation der Körperelemente. Dies bezeichnet man auch schon mal als *Antilinearität* (oder seltener als *Semilinearität*):

$$g(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \overline{\alpha}g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \overline{\beta}g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V , \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} .$$

$$(2.6)$$

Die Linearität im zweiten Argument und die Antilinearität im ersten zusammen definieren die Sesquilinearität.

Es gilt der **Sylvester'sche Trägheitssatz:** Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}) und g eine symmetrische Bilinearform auf V (bzw. eine hermitesche Sesquilinearform), dann gibt es in V eine Basis, sodass g bezüglich dieser Basis die Form

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_{+}} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbf{1}_{n_{-}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O}_{n_{0}} \end{pmatrix}$$
(2.7)

annimmt. Das Tripel (n_+, n_-, n_0) bezeichnet man als die *Trägheitsindizes* (manchmal auch zusammengenommen als den *Trägheitsindex*) [*indices of inertia*] von *g*. Diese Größen sind Invarianten, d.h. in jeder Basis ist die Anzahl der positiven, negativen und verschwindenden Elemente auf der Diagonalen gleich.

Definition: Eine Bilinearform (bzw. entsprechend eine Sesquilinearform) heißt <u>nicht entartet</u> [non degenerate], wenn aus $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{y} \in V$ folgt $\mathbf{x} = 0$. Andernfalls heißt die Bilinearform <u>entartet</u>.

Definition: Ein <u>Skalarprodukt</u> g auf einem Vektorraum V über dem Körper \mathbb{R} ist eine positive [positive], nicht entartete symmetrische Bilinearform. Neben den Gl.en 2.1 und 2.2 gilt noch:

 $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \ge 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in V \quad (\text{Positivität}) \quad \text{und} \quad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0 \quad (\text{nicht entartet}) \quad (2.8)$

Die hier angegebene Bedingung dafür, dass das Skalarprodukt nicht entartet ist, ist zusammen mit der Positivität äquivalent zu der obigen Bedingung. Die oben angegebene Definition ist allgemeiner, da sie die Positivität nicht verlangt. Die hier angegebene Bedingung ist jedoch häufig leichter zu überprüfen bzw. lässt sich oft anwenden um zu argumentieren, dass es sich im konkreten Fall um den Nullvektor handelt.

Manchmal bezeichnet man das Skalarprodukt auch als inneres Produkt [inner product].

Beispiel: Das kanonische Skalarprodukt für Vektorräume über den reellen Zahlen ist:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i} x_{i} y_{i} \,. \tag{2.9}$$

Beispiel: In der speziellen Relativitätstheorie betrachtet man folgende symmetrische Bilinearform:

$$\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^3 x_i y_i \,, \tag{2.10}$$

wobei $x_0 = ct_x$ (c die Lichtgeschwindigkeit) bzw. $y_0 = ct_y$ sind. Diese Bilinearform ist nicht positiv definit. Vektoren, für die $(x_0^2 - |\vec{x}|^2) < 0$, bezeichnet man als raumartig; gilt $(x_0^2 - |\vec{x}|^2) > 0$ so nennt man sie zeitartig. Es gibt auch nicht-verschwindende Vektoren, für die $\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ (solche Vektoren bezeichnet man als *lichtartig*). Trotzdem ist diese Bilinearform nicht entartet, denn zu jedem von 0 verschiedenen Vektor \boldsymbol{y} gibt es immer Vektoren \boldsymbol{x} , sodass $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$. Trotz der fehlenden Positivität spricht man in der Physik häufig von der *Minkowski-Metrik* oder dem Skalarprodukt der Relativitätstheorie. **Definition:** Ein <u>Skalarprodukt</u> g auf einem Vektorraum V über dem Körper \mathbb{C} ist eine positive [positive], nicht entartete hermitesche Sesquilinearform. Auch hier gilt neben den Gl.en 2.4 und 2.5 noch:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \ge 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in V \quad (\text{Positivität}) \quad \text{und} \quad g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0 \quad (\text{nicht entartet}) \quad (2.11)$$

Dieses Skalarprodukt ist linear im zweiten Argument (entsprechend Forderung Gl. 2.5) und antilinear im ersten, d.h., es gilt für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:¹

$$g(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \overline{\alpha} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \overline{\beta} g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$
(2.12)

Man beachte, dass auch bei einem komplexen Vektorraum gilt: $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ für alle $\boldsymbol{x} \in V$. Daher ist die Forderung der Positivität immer noch sinnvoll.

Für einen gegebenen Vektor $\boldsymbol{x} \in V$ definiert

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \tag{2.13}$$

eine Norm [norm] (anschaulich eine Länge des Vektors \boldsymbol{x}) und

$$\cos \alpha = \frac{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|}$$
(2.14)

einen Winkel α zwischen zwei (nicht verschwindenden) Vektoren. Diese Definition ist sinnvoll, weil der Ausdruck auf der rechten Seite wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (siehe Gl. 2.19) niemals größer als 1 wird. Insbesondere bezeichnen wir zwei nicht verschwindende Vektoren \boldsymbol{x} und \boldsymbol{y} als orthogonal [orthogonal], wenn $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Wir bezeichnen zwei orthogonale Vektoren \boldsymbol{x} und \boldsymbol{y} als orthonormal [orthonormal], wenn neben $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ noch $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$ gilt. Sind die Basisvektoren in einem Vektorraum paarweise orthonormal, spricht man von einer Orthonormalbasis.

Sei $\{\boldsymbol{e}_i\}$ eine Basis (nicht notwendigerweise orthonormal) auf einem Vektorraum V und $\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{y} = \sum_i y_i \boldsymbol{e}_i$ eine Entwicklung von \boldsymbol{x} und \boldsymbol{y} nach dieser Basis, dann gilt wegen der Linearität bzw. Hermitizität des Skalarprodukts:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{ij} \overline{x_i} y_j g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \,.$$
(2.15)

Das Skalarprodukt liegt also fest, wenn es für eine Basis gegeben ist. Wir definieren:

$$g_{ij} = g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \,. \tag{2.16}$$

Die Bedingung der Symmetrie bzw. Schiefsymmetrie wird zu $g_{ij} = \overline{g_{ji}}$.

Handelt es sich bei $\{e_i\}$ um eine Orthonormalbasis, folgt $g_{ij} = \delta_{ij}$ (mit dem Kronecker δ -Symbol $\delta_{ij} = 1$ für i = j und 0 sonst). In diesem Fall erhalten wir das kanonische Skalarprodukt oder auch Standardskalarprodukt [dot product]:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i} \overline{x_i} y_i \,. \tag{2.17}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dieses Produkt alle angegebenen Eigenschaften erfüllt.

Es sind viele unterschiedliche Notationen für das Skalarprodukt in Gebrauch. Manchmal schreibt man runde Klammern, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, manchmal auch eckige: $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Insbesondere in der Quantentheorie verwendet man meist die Dirac'sche Bra-Ket-Notation: $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$, was

 $^{^{1}}$ In der Informatik und der Mathematik fordert man oft die Linearität im ersten Argument und die Anti-Linearität im zweiten Argument.

KAPITEL 2. VEKTORRÄUME MIT SKALARPRODUKT

ich in Kap. 12 im Zusammenhang mit Hilbert-Räumen ebenfalls machen werde. Das Standardskalarprodukt bei reellen Vektorräumen wird meist durch den Punkt · gekennzeichnet: $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$. Möchte man allerdings betonen, dass dieser Punkt ein Spezialfall der üblichen Matrixmultiplikation ist - und diese verlangt, dass die Anzahl der Spalten des linken Objekts gleich der Anzahl der Zeilen des rechten Objekts ist - schreibt man für das Standardskalarprodukt auch $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y}$ (im reellen) oder $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\dagger} \cdot \boldsymbol{y}$ (im komplexen). Hierbei steht das "T" für transponiert - d.h. \boldsymbol{x}^T ist ein Zeilenvektor - und der "dagger †" für transponiert und komplex konjugiert:

$$\boldsymbol{x}^{T} \cdot \boldsymbol{y} = (x_{1}, x_{2}, ..., x_{n}) \begin{pmatrix} y_{1} \\ y_{2} \\ \vdots \\ y_{n} \end{pmatrix} = \sum_{i} x_{i} y_{i} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{x}^{\dagger} \cdot \boldsymbol{y} = (\overline{x_{1}}, \overline{x_{2}}, ..., \overline{x_{n}}) \begin{pmatrix} y_{1} \\ y_{2} \\ \vdots \\ y_{n} \end{pmatrix} = \sum_{i} \overline{x_{i}} y_{i} .$$
(2.18)

Man sollte allerdings beachten, dass beim Skalarprodukt $g(\cdot, \cdot)$ zwei Vektoren eine Zahl zugeordnet wird, wohingegen die Zeilenvektoren darauf hindeuten, dass hier eine Identifikation von Vektoren mit dualen Vektoren vorgenommen wurde (\boldsymbol{x}^T bzw. \boldsymbol{x}^{\dagger} sind Elemente des dualen Vektorraums; siehe auch Gl. 2.25).

Satz (Cauchy-Schwarz): Für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ gilt

$$|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \sqrt{g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} \quad \text{oder} \quad |g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|.$$
(2.19)



Abbildung 2.1: Beziehungen zwischen den Vektoren im Beweis der Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Beweis: Es sei $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \neq 0$, andernfalls wäre die Ungleichung trivialerweise gültig. Wir definieren den Vektor (vgl. Abb. 2.1)

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \frac{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} \boldsymbol{y}, \qquad (2.20)$$

für den offensichtlich gilt:

$$g(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = g\left(\boldsymbol{x} - \frac{g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\right) = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = 0.$$
(2.21)

z ist also orthogonal zu y. Damit folgt

$$\boldsymbol{x} = \frac{g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$$
(2.22)

und

$$\|\boldsymbol{x}\|^{2} = \frac{|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^{2}}{|g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})|^{2}} \|\boldsymbol{y}\|^{2} + \|\boldsymbol{z}\|^{2} = \frac{|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^{2}}{\|\boldsymbol{y}\|^{2}} + \|\boldsymbol{z}\|^{2} \ge \frac{|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^{2}}{\|\boldsymbol{y}\|^{2}}.$$
 (2.23)



Abbildung 2.2: In einem Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten immer größer als die Länge der dritten Seite.

Multiplizierten wir diese Ungleichung mit $\|\boldsymbol{y}\|^2$, erhalten wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\boldsymbol{z} = 0$, d.h., wenn \boldsymbol{x} und \boldsymbol{y} linear abhängig (also Vielfache von einander) sind.

Auf einem Vektorraum V mit einem Skalarprodukt kann man nach dem sogenannten *Gram-Schmidt-Verfahren* eine Orthonormalbasis konstruieren. Man wählt dazu einen beliebigen Vektor \boldsymbol{x}_1 und normiert ihn. Dann wählt man einen zweiten linear unabhängigen Vektor und bildet den orthogonalen Anteil zu dem ersten Vektor analog zu Gl. 2.20, d.h. man subtrahiert vom zweiten Vektor den Anteil, den er in Richtung des ersten Basisvektors hat. Anschließend normiert man den verbliebenen Anteil. Dies kann man sukzessive fortführen: Man wählt einen Vektor, der linear unabhängig von den bereits orthonormierten Basisvektoren ist, subtrahiert die Anteile dieses neuen Vektors in Richtung der bereits orthonormierten Vektoren und normiert den verbliebenen Anteil. Dieses Verfahren funktioniert auch bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen mit einer (abzählbar) unendlichen Basis (siehe Kap. 12).

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt auch die sogenannte *Dreiecksungleichung* für die aus dem Skalarprodukt definierte Norm (siehe Abb. 2.2):

Satz:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$
 (2.24)

Beweis:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2|g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Ist auf V ein Skalarprodukt $g: V \times V \to \mathbb{K}$ gegeben, kann man eine Abbildung von V nach V^* (und umgekehrt) definieren, d.h. man erhält einen Vektorraumisomorphismus. Einem Element $\boldsymbol{x} \in V$ wird das Element $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{x}} \in V^*$ zugeordnet, sodass gilt

$$\langle \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y} \rangle = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \, \boldsymbol{y} \in V \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{x}}, \cdot \rangle = g(\boldsymbol{x}, \cdot) \,.$$
 (2.25)

Man beachte, dass man auf diese Weise zu einer Basis $\{e_i\}$ von V auch eine Basis $\{g(e_i, \cdot)\}$ von V^{*} konstruieren kann, die sich jedoch im Allgemeinen von der dualen Basis $\{\varepsilon_i\}$ unterscheidet. Nur wenn $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von V ist, also $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ gilt, sind die beiden Basen gleich.

34 KAPITEL 2. VEKTORRÄUME MIT SKALARPRODUKT 2.2 Vektorprodukt, Spatprodukt und Determinante

Neben dem Skalarprodukt (das sich für Vektorräume beliebiger Dimension definieren lässt) betrachten wir noch das Vektorprodukt [vector product] oder auch Kreuzprodukt speziell für Vektoren im \mathbb{R}^3 (gelegentlich als Spezialfall auch für Vektoren im \mathbb{R}^2).² Zu zwei Vektoren \vec{x} und \vec{y} (da es sich um Vektoren im \mathbb{R}^3 handelt, verwende ich hier die Notation mit Vektorpfeilen, außerdem beziehen sich die Indizes immer auf die kanonische Orthonormalbasis im \mathbb{R}^3) definieren wir:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$
(2.26)

An dieser Stelle bietet es sich an, das Levi-Civita-Symbol oder auch ϵ -Symbol einzuführen:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(2.27)

Die geraden Permutationen (man spricht bei drei Indizes auch von den zyklischen Permutationen) von (1, 2, 3) sind: (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2). Die ungeraden (anti-zyklischen) Permutationen sind (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1). Wann immer zwei Indizes gleich sind, ist der Wert des ϵ -Symbols 0. Das Levi-Civita-Symbol ist zunächst nur für drei Indizes definiert, die meist die Werte 1,2 oder 3 annehmen. (Im \mathbb{R}^2 definiert man schon mal das ϵ -Symbol $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij3}$, bei dem *i* und *j* nur die Werte 1 und 2 annehmen.) Mit dieser Notation folgt für das Vektorprodukt von zwei Vektoren \vec{x} und \vec{y} :

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j y_k \,.$$
 (2.28)

Das Kreuzprodukt ist *antisymmetrisch*, also $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, und bilinear, also linear in jedem seiner beiden Argumente.

 $\operatorname{Im} \mathbb{R}^3$ kann man für drei Vektoren noch das sogenannte Spatprodukt [triple product] definieren:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$
(2.29)

$$= x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1.$$
 (2.30)

Anschaulich beschreibt das Spatprodukt das Volumen eines Parallelepipeds, das von den drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannt wird. Das Spatprodukt ist *zyklisch* [*cyclic*]:

$$\vec{z} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y} \cdot (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}).$$
(2.31)

Insbesondere ist das Volumen 0, wenn die drei Vektoren linear abhängig sind, also gar kein Volumen aufspannen. Das Spatprodukt bietet somit einen Test, ob drei Vektoren linear unabhängig sind.

Schreibt man die drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ als Spaltenvektoren nebeneinander, erhält man eine Matrix V. Das Spatprodukt dieser Vektoren ist gleich der *Determinante* [determinant] dieser Matrix:

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \qquad \qquad \det V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) \,. \tag{2.32}$$

Die Determinante von V verschwindet also, wenn die drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear abhängig sind.

 $^{^{2}}$ Es gibt Verallgemeinerungen für höher dimensionale Vektorräume, die hier nicht behandelt werden. Siehe auch Abschnitt 2.7.2 und Kapitel 16.2.

2.3 Adjungierte, normale und selbst-adjungierte Abbildungen

Im Folgenden betrachten wir Vektorräume über einem algebraisch abgeschlossenen kommutativen Körper, hier konkret \mathbb{C} . Die meisten Überlegungen gelten aber auch für Vektorräume über \mathbb{R} . Wann die Einschränkungen auf reelle Zahlen sinnvoll sind, sollte aus dem Zusammenhang offensichtlich werden.

Definition: Es seien V und W Vektorräume jeweils mit den Skalarprodukten g_v bzw. g_w , und A : $V \to W$ sei eine lineare Abbildung von V nach W. Dann ist durch die Bedingung

$$g_{\mathbf{v}}(A^{\dagger}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = g_{\mathbf{w}}(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y}) \qquad \forall \, \boldsymbol{y} \in V, \; \forall \, \boldsymbol{x} \in W$$
(2.33)

eine lineare Abbildung $A^{\dagger}: W \to V$ definiert, die man als die zu A <u>adjungierte Abbildung</u> bezeichnet.

Sei insbesondere V = W und $g_v = g_w = g$, dann erfüllt die adjungierte A^{\dagger} zu einer linearen Abbildung $A: V \to V$ die Bedingung

$$g(A^{\dagger}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V.$$
(2.34)

Bezüglich einer Orthonormalbasis (also $g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$) erhält man die Matrixdarstellung der adjungierten Matrix aus der Matrixdarstellung von A durch die Transposition (Vertauschung von Zeilen und Spalten) und für den Körper \mathbb{C} zusätzlich die komplexe Konjugation:

$$(A^{\dagger})_{ij} = \overline{A_{ji}}. \tag{2.35}$$

Dies folgt unmittelbar aus Gl. 2.34. Daher spricht man in diesem Fall auch schon mal von der hermitesch-konjugierten Abbildung.

Definition: Set $A: V \to V$ eine lineare Abbildung. Man bezeichnet A als <u>selbst-adjungiert</u>, wenn $A^{\dagger} = A$. Etwas allgemeiner bezeichnet man A als <u>normal</u>, wenn $AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$. Man sagt in diesem Fall auch, dass A mit seiner adjungierten Abbildung kommutiert.

Satz 1: Sei A eine normale lineare Abbildung auf einem Vektorraum V. Dann gelten folgende Aussagen:

- 1. A und A^{\dagger} besitzen dieselben Eigenräume. Sei λ ein Eigenwert von A, dann ist $\overline{\lambda}$ der Eigenwert zum selben Eigenraum von A^{\dagger} . Insbesondere sind die Eigenwerte von selbst-adjungierten Abbildungen reell.
- 2. Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- 3. Es gibt eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Beweis: Wir zeigen zunächst zwei Identitäten für normale Abbildungen:

$$g(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = g(A^{\dagger}\boldsymbol{x}, A^{\dagger}\boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$
(2.36)

Hier wird entscheidend benutzt, dass A und A^{\dagger} vertauschen:

$$g(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}, A^{\dagger}A\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}, AA^{\dagger}\boldsymbol{y}) = g(A^{\dagger}\boldsymbol{x}, A^{\dagger}\boldsymbol{y}).$$
(2.37)

Es gilt auch die umgekehrte Aussage: Falls Gl. 2.36 für eine lineare Abbildung A für alle Vektoren \boldsymbol{x} und \boldsymbol{y} erfüllt ist, ist die Abbildung A normal.

Die zweite Identität ist:

$$(A - \lambda \mathbf{1})^{\dagger} = A^{\dagger} - \overline{\lambda} \mathbf{1}.$$
(2.38)

Dies folgt unmittelbar aus der Definition der adjungierten Abbildung und den Eigenschaften des Skalarprodukts. Wir können nun die drei Teile beweisen.

1. Aus den beiden obigen Identitäten folgt:

$$g((A - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{v}, (A - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{v}) = g((A^{\dagger} - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{v}, (A^{\dagger} - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{v}).$$
(2.39)

Falls \boldsymbol{v} Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, gilt $(A - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{v} = 0$. Also verschwindet die linke Seite der Gleichung und damit auch die rechte. Da das Skalarprodukt nicht entartet sein soll, folgt $(A^{\dagger} - \overline{\lambda} \mathbf{1})\boldsymbol{v} = 0$, also ist \boldsymbol{v} ein Eigenvektor von A^{\dagger} zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

Dieses Ergebnis impliziert, dass selbst-adjungierte Abbildungen immer reelle Eigenwerte haben.

2. Es seien v_1 und v_2 Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 . Da nach Teil 1 A und A^{\dagger} dieselben Eigenvektoren zu den jeweils komplex-konjugierten Eigenwerten haben, folgt:

$$g(\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2) = \lambda_2 g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \qquad \text{und} \qquad g(A^{\dagger} \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = g(\overline{\lambda_1} \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \lambda_1 g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2). \quad (2.40)$$

Die beiden linken Seiten sind aber gleich, also müssen auch die rechten Seiten gleich sein. Da aber nach Voraussetzung $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ist das nur möglich wenn $g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$. Die beiden Eigenvektoren sind also orthogonal. Da dies für alle Paare von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten gilt, gilt es auch für die zugehörigen Eigenräume.

3. Dieser Satz wird als Induktionsbeweis über die Dimension n des Vektorraums geführt. Für n = 1 ist die Aussage trivialerweise richtig: In einer Dimension ist jeder Vektor Eigenvektor zu einer linearen Abbildung. Die Aussage sei für alle Dimensionen kleiner oder gleich n - 1 richtig. Wir betrachten nun einen n-dimensionalen Vektorraum. Es gibt immer mindestens einen Eigenvektor \boldsymbol{v} mit $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$. (Hier wird ausgenutzt, dass der Vektorraum über \mathbb{C} ist, also einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Bei selbst-adjungierten Abbildungen gilt der Satz natürlich auch in reellen Vektorräumen.) Es sei $U \subset V$ das orthogonale Komplement von \boldsymbol{v} . Behauptung: A[U] (das Bild von U unter der Abbildung A) ist ein Teilraum von U. Sei $\boldsymbol{x} \in U$, also $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0$, dann gilt

$$g(\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{x}) = g(A^{\dagger}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = \lambda g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0.$$
(2.41)

Also ist auch $A\mathbf{x} \in U$ und somit definiert $A|_U$ (A eingeschränkt auf U) eine normale Abbildung auf U. Da U die Dimension n-1 hat, ist die Behauptung damit bewiesen.

Nach der letzten Eigenschaft gibt es somit eine Basis von V, in der die Matrixdarstellung von A diagonal ist. Da selbst-adjungierte Abbildungen immer reelle Eigenwerte haben, gilt insbesondere die letzte Aussage auch für selbst-adjungierte Abbildungen (d.h. symmetrische Matrizen) in reellen Vektorräumen.

Beispiel: Aus der Mechanik kennen wir den Trägheitstensor. Für eine Massenverteilung $\rho(x)$ gilt:

$$T_{ij} = \int_V \mathrm{d}^3 x \left((\vec{x} \cdot \vec{x}) \delta_{ij} - x_i x_j \right) \rho(\vec{x}) \,. \tag{2.42}$$

Dies ist eine symmetrische Matrix und gehört damit bezüglich des Standardskalarprodukts zu einer selbst-adjungierten Abbildung. Die obigen Sätze besagen, dass die Eigenwerte von T reell sind (die sogenannten Hauptträgheitsmomente) und die zugehörigen Eigenräume - die Hauptachsen - senkrecht aufeinander stehen.

Satz 2: Es seien A und B zwei normale lineare Abbildungen auf einem Vektorraum V. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:
2.3. ADJUNGIERTE ABBILDUNGEN

1. AB = BA

2. V besitzt eine Basis, deren Elemente sowohl Eigenvektoren zu A als auch Eigenvektoren zu B sind. Mit anderen Worten: A und B lassen sich gleichzeitig diagonalisieren.

Beweis:

- 1. Die Richtung $2 \rightarrow 1$ ist trivial: Wenn beide Matrizen in einer Basis Diagonalform haben, kommutieren sie auch in dieser Basis. Wenn Sie aber in einer Basis kommutieren, kommutieren sie auch auf allen Vektoren und damit im gesamten Vektorraum.
- 2. Sei $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu A (eine solche Basis gibt es nach obigem Satz immer). Es seien $\{\lambda_i\}$ die zugehörigen Eigenwerte. Aus AB = BA folgt:

$$0 = g(\boldsymbol{e}_j, (BA - AB)(\boldsymbol{e}_i)) = g(\boldsymbol{e}_j, BA(\boldsymbol{e}_i)) - g(\boldsymbol{e}_j, AB(\boldsymbol{e}_i))$$
(2.43)

$$= g(\boldsymbol{e}_j, BA\boldsymbol{e}_i) - g(A^{\dagger}\boldsymbol{e}_j, B\boldsymbol{e}_i) = (\lambda_i - \lambda_j)g(\boldsymbol{e}_j, B\boldsymbol{e}_i).$$
(2.44)

Für $\lambda_i \neq \lambda_j$ folgt daraus, dass $g(\boldsymbol{e}_j, B\boldsymbol{e}_i) = 0$. Die Matrix von *B* hat also bezüglich des Orthonormalsystems von Eigenvektoren von *A* Blockdiagonalgestalt: Sind die Eigenwerte von *A* verschieden, verschwinden die zugehörigen Matrixelemente von *B*. In den einzelnen Blöcken von *B* ist die Matrix zu *A* proportional zur Einheitsmatrix, da hier alle Eigenwerte von *A* gleich sind. Daher kann *B* in diesem Teilraum diagonalisiert werden (*B* eingeschränkt auf diesen Teilraum ist eine normale Abbildung). Die neuen Basisvektoren (die nun auch Eigenvektoren von *B* sind) sind immer noch Eigenvektoren von *A*.

Insbesondere gilt dieser Satz auch für selbst-adjungierte Abbildungen in reellen Vektorräumen. Für allgemeine normale Abbildungen kann es in einem reellen Vektorraum allerdings vorkommen, dass es keine Eigenvektoren und Eigenwerte gibt (wohl aber in der komplexen Erweiterung).

Beispiel: Die Drehmatrix $R(\theta)$ in 2 Dimensionen,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (2.45)$$

ist eine normale Matrix (die adjungierte Matrix beschreibt die inverse Drehung, siehe Abschnitt 2.5). Das charakteristische Polynom ist

$$\det \left(R(\theta) - \lambda \mathbf{1} \right) = \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 \tag{2.46}$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta = \exp(\pm i\theta).$$
(2.47)

Die Eigenvektoren und die Diagonalform dieser Matrix sind somit:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$
, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $D(A) = \begin{pmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{pmatrix}$. (2.48)

Eine wichtige Anwendung dieses Satzes besteht darin, dass man mit seiner Hilfe auch größere Matrizen häufig diagonalisieren kann. Sei beispielsweise A eine Matrix, die man diagonalisieren möchte, und es sei B eine Matrix, die mit A kommutiert. Falls man B diagonalisieren kann, hat A in der Basis, in der B diagonal ist, zumindest Blockdiagonalgestalt: A muss nur noch auf den Unterräumen diagonalisiert werden, auf denen die Eigenwerte von B noch entartet sind. Oftmals beschreibt B eine Symmetrie der Matrix A.

Beispiel: Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & f & e & c \\ c & e & f & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(2.49)

B beschreibt eine "Spiegelung" der Koordinaten eines Vektors: die erste Koordinate wird mit der vierten vertauscht und die zweite mit der dritten. Dies ist eine Symmetrie der Matrix *A*, wenn man sie sowohl auf die Zeilen als auch Spalten anwendet. Da sich die Matrix *A* unter dieser Spiegelung von Zeilen und Spalten nicht ändert, kommutiert sie mit *B*, d.h. es gilt AB = BA bzw. $A = BAB^{-1}$.

Man kann sich leicht überzeugen, dass B die Eigenwerte+1und -1 hat mit den zugehörigen Eigenvektoren:

$$\boldsymbol{e}_{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{e}_{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_{1,2} = +1$$
(2.50)
$$\boldsymbol{e}_{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{e}_{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_{3,4} = -1.$$

Diese Vektoren haben die Eigenschaft, dass sie unter der genannten Spiegelung - Vertauschung von 1. und 4. sowie 2. und 3. Komponente eines Vektors - bis auf die Multiplikation mit dem Eigenwert in sich selbst übergehen, wie es für die Eigenvektoren einer solchen Spiegelung auch sein sollte: Sie sind symmetrisch (Eigenwert 1) oder antisymmetrisch (Eigenwert -1) unter der Spiegelung.

Ausgedrückt in dieser neuen Basis hat A die Form:

$$A = \begin{pmatrix} (a+d) & (b+c) & 0 & 0\\ (b+c) & (f+e) & 0 & 0\\ 0 & 0 & (f-e) & b-c)\\ 0 & 0 & (b-c) & (a-d) \end{pmatrix}$$
(2.51)

Das Problem wurde somit auf die Diagonalisierung von (2×2) -Matrizen zurückgeführt, die vergleichsweise einfach ist. Es wurde bis zu diesem Punkt auch nicht ausgenutzt, dass A normal bzw. selbst-adjungiert ist, die Elemente a, b, c, d, e, f also reell sind. Der "Trick" lässt sich auch allgemeiner anwenden. Eine Orthonormalbasis, in der A diagonal wird, findet man jedoch in diesem Fall nur für reelle Matrixelemente.

2.4 Projektionen und Spektralzerlegung

Definition: Eine lineare Abbildung P heißt Projektion (oder auch Projektor), wenn $P^2 = P$. Ist P zusätzlich selbst-adjungiert (also $P^{\dagger} = P$), spricht man von einer orthogonalen Projektion.

Wir betrachten im Folgenden nur orthogonale Projektionen ohne dies immer explizit zu erwähnen.

2.4.1 Eigenschaften von Projektoren

Aus $P^2 = P$ folgt, dass auch alle Eigenwerte von P diese Relation erfüllen. Somit hat eine Projektion immer nur die Eigenwerte $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$. Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$ ist der Untervektorraum, auf den P projiziert. Dies folgt unmittelbar aus $P(P(\boldsymbol{x})) = P(\boldsymbol{x})$ (für alle $\boldsymbol{x} \in V$). Mit anderen Worten, entweder ist $P(\boldsymbol{x}) = 0$, dann ist \boldsymbol{x} offenbar ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 0$, oder $P(\boldsymbol{x})$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$. Auf dem Raum dieser Vektoren ist die Wirkung von P die der Einheitsabbildung (verändert diese Vektoren also nicht mehr).

Zu einer gegebenen Projektion P sei $U_0 \,\subset V$ der Unterraum von V zum Eigenwert $\lambda = 0$ und $U_1 \subset V$ der Unterraum von V zum Eigenwert $\lambda = 1$. Da P als selbst-adjungiert angenommen wurde, ist U_0 orthogonal zu U_1 und $V = U_0 \oplus U_1$. Jeder Vektor \boldsymbol{x} lässt sich somit eindeutig in zwei orthogonale Vektoren zerlegen: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{v} \in U_1$ und $\boldsymbol{w} \in U_0$ und es gilt $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$. Außerdem projiziert $P^{\perp} = \mathbf{1} - P$ auf den Unterraum U_0 , d.h. $(\mathbf{1} - P)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}$. Die Spur einer Projektionsmatrix (d.h. die Spur der Matrixdarstellung zu einer Projektion in einer Basis) ist gleich der Dimension des Unterraums, auf den die Projektion projiziert.

Sei $\{e_i\}$ ein Satz von orthonormalen Vektoren (nicht unbedingt eine vollständige Basis), dann ist die Projektion auf den von $\{e_i\}$ aufgespannten Vektorraum durch

$$P(\cdot) = \sum_{i} g(\boldsymbol{e}_{i}, \cdot) \, \boldsymbol{e}_{i} \tag{2.52}$$

gegeben, d.h., es ist

$$P(\boldsymbol{x}) = \sum_{i} g(\boldsymbol{e}_{i}, \boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{e}_{i} \quad \forall \, \boldsymbol{x} \in V$$
(2.53)

Seien U und W orthogonale Unterräume von V und P_U und $P_W = \mathbf{1} - P_U$ die Projektoren auf diese Unterräume. Dann ist $P_U P_W = P_W P_U = 0$.

Beispiel: Der Einheitsvektor $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannt einen 1-dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^2 auf (die Diagonale unter +45°). Die Projektionsmatrix auf diesen Unterraum ist

$$P_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1&1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1&1\\1&1 \end{pmatrix}$$
(2.54)

Die Projektionsmatrix auf den orthogonalen Unterraum (die Diagonale unter -45°) ist

$$P_{-} = \mathbf{1} - P_{+} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
(2.55)

In Gl. 2.54 wurde das sogenannte *dyadische Produkt* verwendet, bei dem ein Spaltenvektor (links) mit einem Zeilenvektor (rechts) so multipliziert wird, dass das Ergebnis eine Matrix ist. Allgemeiner gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) = \begin{pmatrix} x_1y_1 \ x_1y_2 \ \dots \ x_1y_n \\ x_2y_1 \ x_2y_2 \ \dots \ x_2y_n \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ x_ny_1 \ x_ny_2 \ \dots \ x_ny_n \end{pmatrix} \simeq \mathbf{x} g(\mathbf{y}, \cdot)$$
(2.56)

Der hintere Ausdruck $\boldsymbol{x} g(\boldsymbol{y}, \cdot)$ entspricht der koordinatenfreien Notation. Sofern \boldsymbol{x} und \boldsymbol{y} normierte Vektoren sind, handelt es sich bei $P_x = \boldsymbol{x} g(\boldsymbol{y}, \cdot)$ um einen Projektor auf den von \boldsymbol{x} aufgespannten Unterraum, allerdings ist es keine orthogonale Projektion. Nur für $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ ist P symmetrisch und beschreibt somit eine orthogonale Projektion auf den von \boldsymbol{x} aufgespannten Unterraum.

2.4.2 Die Spektralzerlegung

Satz: Sei A eine selbst-adjungierte (oder normale) Abbildung, $\{e_i\}$ ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren von A mit den zugehörigen Eigenwerten λ_i (diese können durchaus entartet sein). Seien weiterhin P_i die Projektionen auf die Eigenräume zum Eigenwert λ_i . Dann besitzt A die Spektralzerlegung:

$$A = \sum_{i} \lambda_i P_i \,. \tag{2.57}$$

Beweis: Für jeden Basisvektor \boldsymbol{e}_k gilt

$$A\boldsymbol{e}_{k} = \sum_{i} \lambda_{i} P_{i}(\boldsymbol{e}_{k}) = \sum_{i} \lambda_{i} \delta_{ik} \boldsymbol{e}_{k} = \lambda_{k} \boldsymbol{e}_{k} , \qquad (2.58)$$

also das richtige Ergebnis. Damit gilt dies auch für eine beliebige Linearkombination der Basisvektoren, also auf ganz V.

2.4.3 Funktionen linearer Abbildungen

Sei f eine Funktion, die durch eine Reihenentwicklung definiert ist, also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,, \tag{2.59}$$

und deren Konvergenzradius größer ist als der maximale Eigenwert einer linearen Abbildung A (nicht notwendigerweise normal), dann ist die Funktion f(A) der linearen Abbildung gegeben durch:

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n , \qquad (2.60)$$

wobei A^n die *n*-fache Hintereinanderschaltung der linearen Abbildung ist (bzw. das *n*-fache Matrixprodukt).

Sei f eine Funktion, die auf den Eigenwerten einer normalen Abbildung A wohldefiniert ist. Dann definieren wir:

$$f(A) = \sum_{i} f(\lambda_i) P_i \,. \tag{2.61}$$

Für normale Abbildungen und konvergente Reihenentwicklungen stimmen die beiden Definitionen überein. Allerdings kann die zweite Definition auch angewandt werden, wenn die Eigenwerte von A außerhalb des Konvergenzradius der Reihenentwicklung liegen.

Beispiel: Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.62}$$

Bestimmt werden soll die Matrix

$$R(\alpha) = \exp(\alpha \mathbf{I}). \tag{2.63}$$

Die Matrix I hat die Eigenwerte $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind:

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ i \end{pmatrix}$$
 und $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ -i \end{pmatrix}$ (2.64)

und die zugehörigen Projektionsmatrizen sind:

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$
 und $P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. (2.65)

Damit erhält man die Spektraldarstellung:

$$\mathbf{I} = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = iP_1 - iP_2.$$
(2.66)

Somit folgt für $\exp(\alpha \mathbf{I})$:

$$\exp(\alpha \mathbf{I}) = \exp(i\alpha)P_1 + \exp(-i\alpha)P_2 \tag{2.67}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)}{2} & \frac{\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)}{2i} \\ -\frac{\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)}{2i} & \frac{\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)}{2} \end{pmatrix}$$
(2.68)

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$
(2.69)

2.5 Unitäre Abbildungen und orthonormale Basistransformationen

Definition: Eine lineare Abbildung $U: V \to V$ (V endlich dimensional) mit der Eigenschaft

$$g(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$$
(2.70)

heißt unitär.³

Eine unitäre Abbildung erhält somit das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren. Aus der obigen Bedingung folgt:

$$g(\boldsymbol{x}, U^{\dagger}U\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$$
(2.71)

und damit

$$U^{\dagger}U = \mathbf{1} \qquad \text{oder} \qquad U^{\dagger} = U^{-1} \,. \tag{2.72}$$

Hierbei handelt es sich zunächst nur um ein Linksinverses. Da U jedoch bijektiv ist und das Linksinverse und das Rechtsinverse einer linearen Abbildung damit gleich sind, handelt es sich bei U^{\dagger} auch um ein Rechtsinverses. Bei unendlich dimensionalen Vektorräumen folgt dies nicht allein aus der Erhaltung des Skalarprodukts. In Kap. 12.8.6 werden wir ein Gegenbeispiel sehen.

Die Eigenschaft einer unitären Abbildung, das Skalarprodukt invariant zu lassen, bedeutet, dass U eine Orthonormalbasis wieder in eine Orthonormalbasis überführt. Es gilt auch das Umgekehrte: Seien $\{e_i\}$ und $\{f_i\}$ zwei Orthonormalbasen eines Vektorraums V, dann gibt es eine (eindeutige, sofern auch die Reihenfolge übereinstimmt) unitäre Abbildung, die diese beiden Basen ineinander überführt; für die also gilt: $f_i = U(e_i)$ für alle i.

Die unitären Abbildungen bilden eine Gruppe, d.h., die Hintereinanderschaltung zweier unitären Abbildungen ist wieder eine unitäre Abbildung, wie man der Definition direkt entnehmen kann. Im Vektorraum \mathbb{C}^N bezeichnet man die Gruppe aller unitärer Abbildungen als U(N) (die unitäre Gruppe in N Dimensionen). Beschränkt man sich auf die Untergruppe der Abbildungen mit Determinante 1, so erhält man die spezielle unitäre Gruppe SU(N).

Für reelle Vektorräume bezeichnet man die unitären Abbildungen auch als orthogonale Abbildungen und die Gruppe aller solchen Abbildungen als O(N), die orthogonale Gruppe in N Dimensionen. Die Untergruppe der Abbildungen mit Determinante 1 bezeichnet man als SO(N), die spezielle orthogonale Gruppe.

 $^{{}^{3}}$ Für unendlich dimensionale Vektorräume muss noch die Bijektivität von U gefordert werden; bei endlich dimensionalen Vektorräumen folgt diese aus der Definition. Streng genommen muss man zwischen isometrischen und unitären Abbildungen unterscheiden.

2.6 Das Tensorprodukt von Vektorräumen

Gegeben seien zwei Vektorräume V und W über demselben Körper aber zunächst ohne weitere Strukturen (insbesondere wird zunächst nicht vorausgesetzt, dass ein Skalarprodukt oder eine Norm definiert ist), dann kann man daraus zwei neue Vektorräume konstruieren: die direkte Summe der Vektorräume und das Tensorprodukt der Vektorräume.

Die direkte Summe, ausgedrückt als $V \oplus W$ (oder auch $V \times W$) besteht aus allen Paaren $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ mit $\boldsymbol{v} \in V$ und $\boldsymbol{w} \in W$; als Menge handelt es sich also um das kartesische Produkt der beiden Vektorräume. Die Summe von zwei solchen Elementen aus $V \oplus W$ ist:

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2), \qquad (2.73)$$

die Multiplikation mit einem Skalar ist:

$$\alpha(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1) = (\alpha \boldsymbol{v}_1, \alpha \boldsymbol{w}_1). \tag{2.74}$$

Beide Verknüpfungen sind also komponentenweise definiert. Die Dimension von $V \oplus W$ ist gleich der Summe der Dimensionen von V und W. Eine Basis von $V \oplus W$ ist die mengentheoretische Vereinigung der Basiselemente von V und W, also: $\{e_i\} \cup \{f_j\}$.

Diese Verknüpfung von zwei Vektorräumen sollte nicht verwechselt werden mit dem Tensorprodukt der Vektorräume. Hier bildet man nicht das kartesische Produkt der Elemente der Vektorräume sondern das kartesische Produkt der Basen der Vektorräume.

Definition: Seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper mit jeweiligen Basisvektoren $\{e_i\}_{i\in I}$ und $\{f_j\}_{j\in J}$ (die Indexmengen I für i und J für j müssen nicht gleich sein, d.h. V und W können verschiedene Dimensionen haben; auch unendlich viele Dimensionen sind möglich). Das <u>Tensorprodukt</u> $V \otimes W$ ist definiert als der Vektorraum, der formal durch die Paare von Basisvektoren $\{(e_i, f_j)\}_{i\in I, j\in J}$ aufgespannt wird. Ein beliebiger Vektor $\mathbf{x} \in V \otimes W$ lässt sich somit immer in der Form

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i,j} x_{ij}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_j) \tag{2.75}$$

darstellen.

Statt $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_j)$ schreibt man oft auch $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j$. Seien $\boldsymbol{v} = \sum_i v_i \boldsymbol{e}_i \in V$ und $\boldsymbol{w} = \sum_j w_j \boldsymbol{f}_j \in W$ Vektoren aus den einzelnen Vektorräumen, dann ist

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} = \left(\sum_{i} v_i \boldsymbol{e}_i\right) \otimes \left(\sum_{j} w_j \boldsymbol{f}_j\right) = \sum_{i,j} v_i w_j \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j\right)$$
(2.76)

das Tensorprodukt dieser beiden Vektoren. Man beachte jedoch, dass sich nicht jeder Vektor in $V \otimes W$ als Tensorprodukt von zwei Vektoren, einer aus V und einer aus W, schreiben lässt. Falls das der Fall ist, bezeichnet man diesen Vektor als *separabel* (oder auch *separierbar*). Ist das nicht möglich, gibt es also zu einem Vektor $\boldsymbol{x} \in V \otimes W$ keine Vektoren $\boldsymbol{v} \in V$ und $\boldsymbol{w} \in W$, sodass $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ gilt, bezeichnet man \boldsymbol{x} als *verschränkt*. Dieser Begriff spielt in der Quantentheorie eine wichtige Rolle. Jeder Vektor in $V \otimes W$ lässt sich aber als Linearkombination von separablen Produktvektoren schreiben.

Im Folgenden seien immer $\boldsymbol{x} = \sum_{ij} x_{ij} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j)$ und $\boldsymbol{y} = \sum_{ij} y_{ij} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j)$ Elemente von $V \otimes W$. Die Linearkombination von zwei solchen Elementen aus $V \otimes W$ ist:

$$\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} = \sum_{ij} (\alpha x_{ij} + \beta y_{ij}) (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j).$$
(2.77)

Haben V und W jeweils die Dimensionen n bzw. m, so hat $V \otimes W$ die Dimension $n \cdot m$.

Beispiel: Ein Beispiel für ein Tensorprodukt hatten wir schon bei der dyadischen Multiplikation kennengelernt: Das dyadische Produkt (Gl. 2.56) beschreibt das Tensorprodukt von einem Vektor mit einem dualen Vektor, was man manchmal auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}^T$$
(2.78)

schreibt. Dieser Vektor ist auch separierbar.

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^2$, dann bilden die Tensorprodukte der Standardbasisvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{e}_{1} \otimes \boldsymbol{e}_{1} = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_{1} \otimes \boldsymbol{e}_{2} = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{e}_{2} \otimes \boldsymbol{e}_{1} = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_{2} \otimes \boldsymbol{e}_{2} = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \qquad (2.79)$$

Alle diese Vektoren sind separierbar. Bildet man jedoch die Summe von je zwei Elementen, so kann man leicht zeigen, dass die zugehörigen Vektoren verschränkt, also nicht separierbar sind, z.B.:

$$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$
(2.80)

Man sollte sich allerdings darüber im Klaren sein, dass die Begriffe ,verschränkt' und ,separierbar' nur sinnvoll sind, wenn eine Tensorproduktstruktur gegeben ist. In diesem Sinne sind $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ und \mathbb{R}^4 nicht äquivalent: Auf $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ ist eine Tensorproduktstruktur definiert und man kann von jedem Vektor sagen, ob er verschränkt ist oder nicht, auf \mathbb{R}^4 ist zunächst keine solche Struktur gegeben.

Es mag unbefriedigend sein, dass das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen über die jeweiligen Basen definiert ist. Es erhebt sich damit unwillkürlich die Frage, ob nicht wesentliche Elemente dieser Tensorproduktstruktur von der Wahl der Basen abhängen. Es gibt abstrakte Möglichkeiten, das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen zu definieren, doch diese eignen sich meist nicht für praktische Rechnungen. Jedenfalls kann man zeigen, dass das Tensorprodukt und wesentliche damit verbundene Strukturen (z.B. die Unterscheidung zwischen separablen und verschränkten Vektoren) nicht von der Wahl der Basisvektoren abhängt.

Seien A_1 ein linearer Operator auf V und A_2 ein linearer Operator auf W, dann ist $A_1 \otimes A_2$ ein linearer Operator auf $V \otimes W$, der folgendermaßen auf die Basisvektoren wirkt:

$$(A_1 \otimes A_2)(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j) = A_1(\boldsymbol{e}_i) \otimes A_2(\boldsymbol{f}_j)$$
(2.81)

Durch diese Definition ist festgelegt, wie ein solcher Operator auf einen beliebigen Vektor im Tensorproduktraum wirkt. Insbesondere kann man sich leicht überzeugen, dass zwei Operatoren, die auf verschiedene Vektorräume wirken, im Tensorprodukt immer kommutieren:

$$(A_1 \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{W}})(\mathbf{1}_{\mathrm{V}} \otimes A_2) = (\mathbf{1}_{\mathrm{V}} \otimes A_2)(A_1 \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{W}})$$
(2.82)

Hier bezeichnet $\mathbf{1}_{V}$ die Identitätsabbildung in Vektorraum V (entsprechend für W). Oft findet man dafür vereinfacht die Schreibweise

$$[A_1, A_2] = 0, (2.83)$$

wobei aber betont werden muss, dass sich die Indizes auf verschiedene Vektorräume beziehen und mit A_1 eigentlich $A_1 \otimes \mathbf{1}_W$ gemeint ist und entsprechend A_2 für $\mathbf{1}_V \otimes A_2$ steht.

Allgemein lässt sich ein Operator B auf $V \otimes W$ immer als eine Linearkombination solcher , Produktoperatoren' schreiben, d.h.

$$B = \sum_{ij} b_{ij} (A_i \otimes A_j) \,. \tag{2.84}$$

Ist auf V ein Skalarprodukt $g_1(\cdot, \cdot)$ und auf W ein Skalarprodukt $g_2(\cdot, \cdot)$ definiert, so kann man auf dem Tensorproduktraum ebenfalls ein Skalarprodukt definieren. Für separierbare Zustände gilt einfach

$$g(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w}_2) = g_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) g_2(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2), \qquad (2.85)$$

für Linearkombinationen wird dann die Bilinearität (bzw. beim Körper \mathbb{C} die Linearität im zweiten und die Antilinearität im ersten Argument) ausgenutzt. In einer Basis gilt beispielsweise:

$$g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j,k,l} \overline{y_{lk}} x_{ij} g_1(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) g_2(\boldsymbol{f}_j, \boldsymbol{f}_l)$$
(2.86)

und, sofern es sich um Orthonormalbasen handelt,

$$g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j} \overline{y_{ji}} x_{ij} \,. \tag{2.87}$$

2.7 Vektoren, Tensoren, Skalare etc.

Der Begriff des Tensors wird innerhalb der Physik nicht immer in derselben Bedeutung verwendet. Manchmal versteht man darunter einfach die Elemente von Tensorprodukträumen (dies wird im folgenden Abschnitt erläutert), manchmal auch bestimmte (meist irreduzible) Darstellungen von Gruppen, wobei es hier meist um die Gruppe SO(3) geht und man dann von *sphärischen Tensoren* spricht (siehe Abschnitt 2.7.5). Häufig wird der Begriff in der Physik auch als Synonym für Tensorfelder verwendet: Beschreibt man den Raum oder die Raumzeit als Mannigfaltigkeit, so lassen sich jedem Punkt des Raums bzw. der Raumzeit solche Tensoren zuordnen und man spricht dann von einem Tensorfeld. Eine besondere Bedeutung haben diese Strukturen in der Differentialgeometrie bzw. in der Mathematik der allgemeinen Relativitätstheorie. In den Kapiteln 8 und ?? werden einige Grundbegriffe hierzu eingeführt.

2.7.1 Tensoren als Elemente von Tensorprodukten

Ist ein Vektorraum V über einem Körper K gegeben, so kann man mehrere weitere Vektorräume definieren: der duale Vektorraum V^* , das Tensorprodukt $V \otimes V$, das Tensorprodukt mit dem dualen Raum $V \otimes V^*$ oder auch $V^* \otimes V$. Man kann auch mehrere Tensorprodukte bilden, z.B. $V \otimes V \otimes V^* \otimes V^*$, etc. Ganz allgemein sind auch Tensorprodukte zwischen verschiedenen Vektorräumen möglich, hier beschränke ich mich jedoch auf einen Vektorraum und seinen Dualraum.

2.7. VEKTOREN, TENSOREN, SKALARE ETC.

Allgemein kann man eine lineare Abbildung $A: V \to V$ als ein Element des Tensorprodukts $V \otimes V^*$ auffassen. Betrachten wir beispielsweise die Elementarmatrizen

$$E(i,j) = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} i$$
(2.88)

Man beachte, dass es sich bei E(i, j) um eine Matrix handelt, deren Matrixelemente durch $E(i, j)_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ gegeben sind. Die Darstellung dieser Matrix als Tensorprodukt von einem Vektor mit einem dualen Vektor zeigt, dass es sich um ein Element aus $V \otimes V^*$ handelt. Jede beliebige Matrix lässt sich nach diesen Matrizen entwickeln und ist somit selbst Element von $V \otimes V^*$:

$$A = \sum_{ij} a_{ij} E(i,j) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
(2.89)

Ein Skalarprodukt $g: V \times V \to \mathbb{K}$ ist ein Element aus $V^* \otimes V^*$ (diese Objekte sind auf zwei Vektoren anzuwenden und das Ergebnis ist ein Element des Körpers, also ein Skalar).

Ganz allgemein bezeichnet man Elemente von solchen Tensorprodukträumen zu einem Vektorraum V (bzw. seinem Dualraum V^*) als *Tensoren*. Um anzudeuten, wie viele "Indizes" die Objekte haben bzw. auf welchen Raum (V oder seinen Dualraum) sich diese Indizes beziehen spricht man auch von *Tensoren der Stufe* (k, l), wobei sich k auf die Anzahl der Vs in dem Tensorprodukt und l auf die Anzahl der V*s bezieht. Ein normaler *Vektor* ist somit ein Tensor der Stufe (1,0), ein dualer Vektor oder auch Kovektor ist ein Tensor der Stufe (0,1). Ein Skalar (also ein Element des Körpers \mathbb{K}) ist ein Tensor der Stufe (0,0) und eine lineare Abbildung von V in sich selbst ist ein Tensor der Stufe (1,1).

Das Skalarprodukt ist ein Tensor der Stufe (0,2). Mithilfe des Skalarprodukts (sofern ein solches definiert ist) kann man die Stufen austauschen: Durch das Skalarprodukt lässt sich ein Vektor - also Tensor der Stufe (1,0) - in einen dualen Vektor umformen, also einen Tensor der Stufe (0,1). Daher spricht man in den Fällen, wo ein Skalarprodukt gegeben ist, oft nur von einem Tensor der k + l-ten Stufe. Es gibt auch Tensoren höherer Stufen, beispielsweise ist der Krümmungstensor in der allgemeinen Relativitätstheorie ein Tensor 4. Stufe, ob (0,4) oder (1,3) etc. hängt davon ab, auf welche Objekte genau man ihn anwenden möchte. Durch das Skalarprodukt kann man zwischen diesen Stufen hin- und her wechseln, allerdings hängen die zugehörigen Tensorelemente in einer Basis von diesen Stufen ab, sofern es sich nicht um eine Orthonormalbasis handelt. Wir werden in Kapitel 8 nochmals auf diese Konzepte eingehen.

2.7.2 Pseudovektoren und Pseudoskalare

In der Physik kennen wir viele Vektoren - den Ortsvektor \boldsymbol{x} , den Geschwindigkeitsvektor \boldsymbol{v} , den Impulsvektor \boldsymbol{p} , das elektrische Feld \boldsymbol{E} . Wie wir sehen werden (Kap. 4.1.2), handelt es sich bei der

Kraft \mathbf{F} bzw. dem Gradienten eines Potenzials ∇U um Elemente des Dualraums, also Tensoren der Stufe (0,1). Den Trägheitstensor kann man als Tensor zweiter Stufe bezeichnen, ebenso den Spannungstensor in Festkörpern. Wir kennen natürlich auch viele skalare Größen (Tensoren 0.ter Stufe): die Temperatur, der Druck, das Potenzial.

Gelegentlich hört man in der Physik den Begriff *Pseudotensor*. Beispielsweise bezeichnet man den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ als *Pseudovektor*, oder das vorzeichenbehaftete Volumen eines durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (also $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$) als *Pseudoskalar*. Der Grund ist, dass es sich hier nur scheinbar um einen Vektor bzw. ein Skalar handelt.

Das Kreuz- bzw. Vektorprodukt

Betrachten wir zunächst den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$. Strenggenommen handelt es sich hierbei nicht um einen Vektor sondern um einen Tensor 2. Stufe. Man erkennt das daran, dass bei einer Raumspiegelung die Vektoren ihre Vorzeichen umkehren - also $\vec{x} \to -\vec{x}$ und $\vec{p} \to -\vec{p}$ - wohingegen $\vec{L} \to \vec{L}$ sein Vorzeichen nicht umdreht. Allgemein ist das Kreuzprodukt eine Abbildung $\times : V \times V \to V \otimes V$, die in beiden Argumenten linear ist, und somit das Ergebnis zunächst ein Tensor 2. Stufe (es handelt sich um eine antisymmetrische, tensorwertige, bilineare Abbildung).

Speziell in drei Dimensionen gibt es jedoch eine Möglichkeit, einen Vektor \boldsymbol{x} durch eine antisymmetrische Matrix X darzustellen, und umgekehrt eine antisymmetrische Matrix durch einen Vektor:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} .$$
(2.90)

In der Indexschreibweise kann diese Beziehung durch das ϵ -Symbol ausgedrückt werden:

$$x_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} X_{jk}$$
 bzw. $X_{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk} x_k$. (2.91)

Eine ähnliche Beziehung gilt in zwei Dimensionen zwischen einer antisymmetrischen Matrix und einem Skalar:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow x.$$
(2.92)

Hier ist das 2-dimensionale ϵ -Symbol der Vermittler zwischen den Komponenten:

$$x = \sum_{ij=1}^{2} \epsilon_{ij} X_{ij} \qquad \text{bzw.} \qquad X_{ij} = \epsilon_{ij} x \,. \tag{2.93}$$

In der Elektrodynamik gibt es den 4-dimensionalen Feldstärketensor, der das elektrische und magnetische Feld, \boldsymbol{E} und \boldsymbol{B} , in einer antisymmetrischen 4 × 4-Matrix zusammenfasst (hier wurden die Einheiten für \boldsymbol{E} und \boldsymbol{B} gleich gewählt, ansonsten sind die Elemente in der ersten Zeile und Spalte noch durch die Lichtgeschwindigkeit c zu dividieren):

$$F\mu\nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_4 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$
(2.94)

2.7. VEKTOREN, TENSOREN, SKALARE ETC.

Mithilfe des 4-dimensionalen ϵ -Symbols:

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\alpha, \beta, \mu, \nu) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3, 4) \\ -1 & (\alpha, \beta, \mu, \nu) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3, 4) \\ 0 & \text{ sonst} \end{cases}$$
(2.95)

lässt sich daraus ein dualer Feldstärketensor bestimmen,

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \tag{2.96}$$

bei dem im Wesentlichen (bis auf Vorzeichen) die Komponenten des E- und B-Felds ausgetauscht werden. Da die Bilinearform in der Relativitätstheorie nicht dem kanonischen Skalarprodukt entspricht (siehe Abschnitt 2.1) muss man in der Relativitätstheorie zwischen oben- und unten stehenden Indizes unterscheiden. Mehr dazu in Abschnitt 2.7.4 und Kap. 8.

Die Determinante

Eng mit dem letzten Abschnitt verknüpft ist der Grund, weshalb es sich bei dem Volumen eines Parallelepipeds, ausgedrückt als Spatprodukt von drei linear unabhängigen Vektoren, um ein Pseudoskalar handelt. Wir hatten ja schon gesehen, dass das Spatprodukt gleich der Determinante einer 3×3 -Matrix ist, deren Spalten den drei Vektoren entsprechen (Abschnitt 2.2). Ganz allgemein ist die Determinante einer $n \times n$ -Matrix eine n-lineare Abbildung vom Vektorraum in seinen Körper: det : $V \otimes V \otimes \ldots \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$. Diese Abbildung ist in jedem Argument linear. Das bedeutet, dass die Determinante zu einer Matrix A eigentlich ein Element des n-fachen Tensorprodukts von V mit sich selbst ist: det $A \in V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$. Eine Basiswechsel in V von der Basis $\{e_i\}$ zur Basis $\{-e_i\}$ (jeder Basisvektor dreht seine Richtung um) ändert somit in ungeraden Dimensionen das Vorzeichen der Determinante. Auch wenn es sich um ein Element des Zahlenkörpers \mathbb{K} handelt, ist die Determinante nur scheinbar ein Skalar, daher Pseudoskalar.

In 3-Dimensionen dient das ϵ -Symbol auch als Vermittler zwischen einem total antisymmetrischen Tensor 3. Stufe (der Determinante) und einem Skalar. Wir können also mithilfe des ϵ -Tensors zwischen Skalaren und antisymmetrischen Tensoren 3. Stufe hin und her wechseln, ebenso zwischen Vektoren und antisymmetrischen Tensoren 2. Stufe. Das gilt ganz allgemein in *n*-Dimensionen: Der verallgemeinerte ϵ -Tensor in *n* Dimensionen stellt eine Beziehung zwischen antisymmetrischen Tensoren *k*-ter Stufe und antisymmetrischen Tensoren (n-k)-ter Stufe her. (In der Mathematik der Differentialformen bezeichnet man das ϵ -Symbol auch als *Hodge-Stern-Operator*).

2.7.3 Nochmals Basistransformationen

Lineare Abbildungen von einem Vektorraum in sich selbst sind bisher in einer Doppelrolle aufgetreten: Als sogenannte *aktive Transformation*, bei denen die Vektoren des Vektorraums auf neue Vektoren abgebildet werden, und als *passive Transformation*, bei denen eine Basis $\{e_i\}$ in eine neue Basis $\{\tilde{e}_i\}$ überführt wird, ohne dass sich die Vektoren ändern. Wir untersuchen zunächst, was dies für die Komponenten der Vektoren bedeutet.

Aktive Transformationen

Sei $\{e_i\}$ eine Basis in einem Vektorraum V (zunächst ohne weitere Strukturen) und

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_j = T(\boldsymbol{e}_j) = \sum_i T_{ji} \boldsymbol{e}_i \tag{2.97}$$

das Bild dieser Basis unter einer Transformation $T: V \to V$, dann gilt für einen Vektor $\boldsymbol{x} = \sum_{i} x_{i} \boldsymbol{e}_{i}$:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = T(\boldsymbol{v}) = T\left(\sum_{i} x_{i}\boldsymbol{e}_{i}\right) = \sum_{i} x_{i}T(\boldsymbol{e}_{i}) = \sum_{i} x_{i}\tilde{\boldsymbol{e}}_{i}.$$
(2.98)

In der neuen Basis sind die Komponenten des neuen Vektors also dieselben, wie die Komponenten des alten Vektors in der alten Basis. Drückt man die Komponenten des neuen Vektors in der alten Basis aus, so folgt:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \sum_{i} x_i \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{ij} x_i T_{ij} \boldsymbol{e}_j = \sum_{j} \left(\sum_{i} x_i T_{ij} \right) \boldsymbol{e}_j \,. \tag{2.99}$$

Es gilt also für die Komponenten:

$$\tilde{x}_j = \sum_i x_i T_{ij} \,. \tag{2.100}$$

Passive Transformationen

Bei der passiven Transformation bleiben die Vektoren unverändert, aber die Basis ändert sich. Die lineare Abbildung T bildet die Basisvektoren $\{e_i\}$ auf die Basisvektoren $\{\tilde{e}_i\}$ ab, deren Entwicklungskoeffizienten bezüglich der alten Basis durch T_{ij} gegeben sind:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T(\boldsymbol{e}_i) = \sum_j T_{ij} \boldsymbol{e}_j \,. \tag{2.101}$$

Die Vektoren selbst bleiben unverändert, lediglich ihre Komponenten ändern sich bei diesem Basiswechsel. Da

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j} x_{j} \boldsymbol{e}_{j} = \sum_{i} \tilde{x}_{i} \tilde{\boldsymbol{e}}_{i} = \sum_{ij} \tilde{x}_{i} T_{ij} \boldsymbol{e}_{j}, \qquad (2.102)$$

folgt für die Komponenten

$$x_j = \sum_i \tilde{x}_i T_{ij} \,. \tag{2.103}$$

Relativ zur aktiven Transformation transformieren sich hier die Komponenten umgekehrt: Die Matrix zu T transformiert die neuen Komponenten in die alten, wohingegen bei der aktiven Transformation die Matrix T die alten Komponenten in die neuen transformiert. Da T eine Bijektion sein soll und somit eine inverse Abbildung T^{-1} existiert, kann man für die passive Transformation auch schreiben

$$\tilde{x}_j = \sum_i x_i T_{ij}^{-1} \,. \tag{2.104}$$

2.7.4 Indexschreibweise und Einstein'sche Summenkonvention

Im Folgenden betrachte ich ausschließlich passive Transformationen, also das Verhalten von Objekten unter einer Basistransformation von V, wobei sich alle Überlegungen auch auf die aktiven Transformationen umdeuten lassen. Wie wir gerade gesehen haben, transformieren sich die Komponenten eines Vektors umgekehrt zu den Basisvektoren selbst: Die Basisvektoren transformieren sich mit T, die Komponenten eines Vektors mit T^{-1} . Ganz allgemein bezeichnet man einen Index an einem Tensor als *kovariant*, wenn er sich wie die Basis transformiert, und als *kontravariant*, wenn er sich entgegen der Basis transformiert.

Dieses unterschiedliche Transformationsverhalten drückt man durch die Tief- bzw. Hochstellung der Indizes aus. Die *Einstein'sche Summenkonvention* besteht darin, dass über doppelt auftretende Indizes auf einer Seite einer Gleichung - einmal oben und einmal unten - automatisch summiert wird, ohne dass das Summenzeichen extra geschrieben wird. In einer korrekt geschriebenen Gleichung sollte dann entweder ein Index zweimal auf einer Seite auftreten, einmal oben und einmal unten, und über diesen Index wird summiert, oder es tritt derselbe Index einmal auf jeder Seite der Gleichung auf, dann sollte er an derselben Position (beide Male oben oder beide Male unten) stehen. Ist das nicht der Fall, liegt ein Fehler (oder eine Fehlinterpretation) vor.

Betrachten wir dazu zunächst die Basis. Hier handelt es sich um Vektoren in V, d.h. sie tragen per definitionem den Index unten. Für sie gilt unter einer Transformation:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T(\boldsymbol{e}_i)$$
 bzw. $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T_i^j \boldsymbol{e}_j$ (Summe über *j* impliziert!). (2.105)

(Die Transformation T ist ein Element von $V \otimes V^*$, daher trägt sie einen Index oben und einen unten - mehr dazu gleich.)

Betrachten wir nun die duale Basis $\{\boldsymbol{\varepsilon}^i\}$ in V^* , definiert durch die Bedingung

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta^i_j \,. \tag{2.106}$$

 δ_j^i bezeichnet wieder das Kronecker-Delta. Damit diese Bedingung unter einer Transformation der Basis $\{e_i\}$ erhalten bleibt, muss sich auch die duale Basis transformieren, allerdings invers relativ zur Basis in V. Daher handelt es sich bei der dualen Basis um kontravariante Vektoren, die den Index oben tragen. Ein beliebiges Element aus V^* , d.h. eine Linearform $\boldsymbol{\omega}$, lässt sich nach dieser Basis entwickeln:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \boldsymbol{\varepsilon}^i \,. \tag{2.107}$$

Die Komponenten von dualen Vektoren tragen die Indizes also unten.

Für die Komponenten eines Vektors gilt:

$$\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_j \,. \tag{2.108}$$

Wie wir schon gesehen haben, transformieren sich die Komponenten umgekehrt zu den Basisvektoren, also kontravariant. Daher tragen die Komponenten von Vektoren (Elementen aus V) den Index immer oben. Sie lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{i}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{i}, x^{j} \boldsymbol{e}_{j} \rangle = x^{j} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{i}, \boldsymbol{e}_{j} \rangle = x^{j} \delta^{i}_{j} = x^{i} .$$
(2.109)

Hier wird deutlich, dass sich die Komponenten wie Elemente des dualen Vektorraums transformieren.

Betrachten wir nun nochmals die Komponenten von T. Dazu bestimmen wir die Entwicklungskoeffizienten der neuen Basisvektoren ausgedrückt in der alten Basis:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{j}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{i} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{j}, T(\boldsymbol{e}_{i}) \rangle = T_{i}^{j}.$$
 (2.110)

Hier erkennt man die Doppeldeutigkeit von T: Wir können T einmal auffassen als eine Abbildung $T: V \to V$ (also als eine Abbildung, die einem Vektor - einem Basiselement - einen Vektor (ein neues Basiselement) zuordnet, wir können T aber auch auffassen als eine Abbildung $T: V \otimes V^* \to \mathbb{K}$, die einem Vektor und einem Kovektor eine Zahl (ein Element des Körpers) zuordnet. Gewöhnlich verwenden wir für einen dualen Vektor die ,transponierte' Schreibweise:

$$T_i^j = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^j, T(\boldsymbol{e}_i) \rangle = T(\boldsymbol{\varepsilon}^j, \boldsymbol{e}_i)$$
 (bisher in der Form $\boldsymbol{e}_j^T T \boldsymbol{e}_i = T_{ji}$). (2.111)

Man kann T daher auch als ein Objekt mit zwei ,Slots' (Leerplätzen für Einträge) auffassen: In den einen Slot wird ein Kovektor und den anderen ein Vektor eingesetzt, das Ergebnis ist eine Zahl. Man beachte, dass diese Beziehungen in einem beliebigen Vektorraum mit gewählter Basis gelten; die Definition eines Skalarprodukts ist dafür nicht notwendig.

Nun sei auf V auch ein Skalarprodukt definiert oder allgemeiner eine bilineare Abbildung $g: V \times V \to \mathbb{K}$. Hierbei handelt es sich um ein Objekt mit zwei Slots, jeweils für Vektoren; das Ergebnis ist eine Zahl, sollte also keinen Index tragen. Es gilt also:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(x^i \boldsymbol{e}_i, y^j \boldsymbol{e}_j) = x^i y^j g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = x^i y^j g_{ij} \qquad \text{mit} \quad g_{ij} = g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j).$$
(2.112)

(Für den Körper der komplexen Zahlen ist beim Skalarprodukt x^i durch $\overline{x^i}$ zu ersetzen.) Dieses Ergebnis deutet an, dass $g \in V^* \otimes V^*$ ist, da die Komponenten von g bezüglich einer Basis ihre Indizes unten tragen.

In den folgenden Kapiteln dieses Skripts wird zunächst weder die konsequente Einhaltung der Indexnotation noch die Einstein'sche Summenkonvention verwendet. Eine Ausnahme bildet Kapitel 8, das einen elementaren Einstieg in die Differentialgeometrie darstellt.

2.7.5 Tensoren als Darstellung einer Gruppe

Dieser Abschnitt gibt nur eine grobe Idee von der zweiten Definition von Tensoren, die über das Verhalten unter Gruppentransformationen definiert sind. Letztendlich handelt es sich um die Darstellungstheorie von Gruppen, die hier nicht behandelt werden soll. Speziell die Darstellungstheorie der Drehgruppe führt dann auf die sogenannten sphärischen Tensoren, die in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle spielen.

Ein Vektorraum V (über \mathbb{K}) ist ein Darstellungsraum der Gruppe $\operatorname{GL}(V, \mathbb{K})$, der Gruppe der invertierbaren linearen Abbildungen von V in sich selbst. Wie wir gesehen haben, induziert eine solche Abbildung auf V auch eine Abbildung auf V^* , die durch die inverse Transformation definiert ist. Allgemein induziert die Aktion von $\operatorname{GL}(\mathbb{K})$ eine Darstellung dieser Gruppe (einen Gruppenhomomorphismus) auf beliebigen Tensorprodukten von V und V^* und wir können die Tensoren der Stufe (k, l)nach diesen Darstellungen klassifizieren.

Ist auf V ein Skalarprodukt $g: V \times V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ definiert, können wir V auch als Darstellungsraum der Gruppe SO(n) bzw. SU(n) ansehen, wobei n die Dimension von V ist. Durch diese Gruppe werden Orthonormalbasen in V wieder in Orthonormalbasen in V abgebildet. Sie bilden also eine Untergruppe der allgemeinen invertierbaren linearen Abbildungen auf V. Und auch diese Untergruppe induziert Darstellungen auf beliebigen Tensorprodukten von V.

Wie wir gesehen haben, transformiert sich ein allgemeiner $(k,l)\mbox{-}{\rm Tensor}\ R$ mit den Komponenten

$$R_{j_1j_2\dots j_l}^{i_1i_2\dots i_k} = R(\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1}, \boldsymbol{\varepsilon}^{i_2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{i_k}, \boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \dots, \boldsymbol{e}_{j_l})$$
(2.113)

in einer ganz spezifischen Weise, die für diesen Tensortyp charakteristisch ist:

$$R^{i_1i_2...i_k}_{j_1j_2...j_l} \longrightarrow R^{m_1m_2...m_k}_{n_1n_2...n_l}(T^{-1})^{i_1}_{m_1}(T^{-1})^{i_2}_{m_2}\cdots(T^{-1})^{i_k}_{m_k}(T)^{n_1}_{j_1}\cdots(T)^{n_l}_{j_l}.$$
 (2.114)

Die transformierten Komponenten eines solchen Tensors werden bei einer Koordinatentransformation also ,gemischt'. Dabei kann es vorkommen, dass bestimmte Komponentengruppen immer nur untereinander gemischt werden, nicht aber mit der komplementären Komponentengruppe. Ein Beispiel kennen wir für die linearen Abbildungen ($n \times n$ -Matrizen): Die Spur einer Matrix ändert sich bei allgemeinen Koordinatentransformationen nicht:

$$\operatorname{Spur} A = A_i^i (\operatorname{Summe!}). \tag{2.115}$$

Die Spur ist also ein Skalar. Dies gilt natürlich auch, wenn wir nur orthonormale Basistransformationen zulassen.

Es kann aber sein, dass weitere Komponentengruppen invariant sind (sich also nur untereinander mischen). In diesen Fällen spricht man davon, dass die zugehörige Darstellung der Gruppe

2.8. AFFINE RÄUME

reduzibel ist. Komponentengruppen, die sich vollständig untereinander mischen (also keine weitere Unterteilung mehr zulassen), bezeichnet man als *irreduzible* Darstellung.

Beispiel: Betrachten wir die $(3 \times 3$ -Matrizen in einem reellen 3-dimensionalen Vektorraum. Sie transformieren sich in der Form $M \to TMT^{-1}$ (bzw., wenn T Element der SO(3) ist, $M \to TMT^{\dagger}$; was für orthogonale Gruppen dasselbe ist), also wie ein Tensor der Stufe (1,1). Es zeigt sich jedoch, dass neben der Spur (die eine spezielle Linearkombination der Elemente von M ist und ein Skalar, also einen Tensor der Stufe (0,0), darstellt) auch die Komponentengruppen des symmetrischen Anteils sowie die des antisymmetrischen Anteils dieser Matrix nur innerhalb ihrer Gruppen gemischt werden. Wir können eine 3×3 -Matrix somit zerlegen:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\text{Spur } M) \mathbf{1} + A + S, \qquad (2.116)$$

 mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$
(2.117)

und

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) - \frac{1}{3}\text{Spur } M \,\delta_{ij} \,. \tag{2.118}$$

Die Matrix A ist antisymmetrisch und hat drei unabhängige Komponenten, die Matrix S ist symmetrisch und spurfrei und hat führ unabhängige Komponenten. Die 9 unabhängigen Komponenten von M werden also in drei Gruppen nach der Gleichung 9=1+3+5 zerlegt. Diese irreduziblen Anteile eines Tensors bezüglich der Drehgruppe bezeichnet man auch als sphärische Tensoren.

2.8 Affine Räume

Sehr oft beschreiben wir den physikalischen Raum durch den Vektorraum \mathbb{R}^3 . Hierbei wurde jedoch diesem Raum eine mathematische Struktur gegeben, die der physikalische Raum zunächst nicht besitzt: Ein Nullpunkt wurde ausgezeichnet und es sind eine Addition von Raumpunkten und eine Multiplikation von Raumpunkten mit reellen Zahlen definiert. Die Definition des Nullpunkts ist physikalisch eine Konvention, doch was soll die Addition bedeuten (was ist "Freiburg plus Frankfurt"?) oder die Multiplikation mit einer Zahl (was ist "5·Freiburg"?). Die Differenz von Raumpunkten ist jedoch eine sinnvolle Größe. Sie entspricht eher dem, was man unter einem Vektor versteht, und sie tritt auch in den meisten physikalischen Formeln (beispielsweise für die Durchschnittsgeschwindigkeit $v = \Delta s / \Delta t$) auf. Ähnliche Bemerkungen gelten für die Zeit, für die ohne die Auszeichnung eines Nullpunkts ebenfalls eine Summe oder Multiplikation mit einer Zahl zunächst nicht definiert sind. Für Zeitdifferenzen bzw. Zeitdauern sind diese Konzepte jedoch sinnvoll. Diesen Überlegungen trägt die mathematische Struktur des *affinen Raums* Rechnung.

Die folgenden Definitionen und Sätze habe ich größtenteils aus [EDM 2000] übernommen.

Definition: Ein affiner Raum ist eine Menge A zusammen mit einem Vektorraum V und einer Operation $+: A \times V \to A$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für jedes $a \in A$ und alle Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ gilt:

$$(a + \mathbf{x}) + \mathbf{y} = a + (\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$
 (2.119)

2. Zu je zwei Elementen $a, b \in A$ gibt es ein Element $\boldsymbol{v} \in V$, sodass

$$a + \boldsymbol{v} = b \,. \tag{2.120}$$

Insbesondere folgt aus diesen Bedingungen auch, dass $a + \mathbf{0} = a$ ist. Außerdem erlaubt Bedingung 2 die Definition einer Differenz $-: A \times A \to V$. Seien $a, b \in A$ und sei \mathbf{v} der Vektor aus V, für den $a + \mathbf{v} = b$ erfüllt ist, dann definieren wir: $b - a = \mathbf{v}$. Dies wird meist in der Form $\overrightarrow{ab} = \mathbf{v}$ geschrieben. Wird insbesondere ein Element $o \in A$ ausgezeichnet, dann kann man jedes andere Element in Adurch einen Vektor ausdrücken: $a = o + \overrightarrow{oa}$. Ist V *n*-dimensional, so bezeichnet man auch A als *n*-dimensional.

Sei $U \subset V$ ein k-dimensionaler Unterraum von V und a ein beliebiges Element aus A, dann spannt die Menge der Elemente b = a + v mit $v \in U$ einen Unterraum des affinen Raums auf, der ebenfalls wieder ein (k-dimensionaler) affiner Raum ist. Je nachdem ob U ein-, zwei- oder mehrdimensional ist, spricht man von Geraden, Ebenen oder Hyperebenen. Zwei affine Unterräume $A_1 = a_1 + U_1 \subset A$ und $A_2 = a_2 + U_2 \subset A$ heißen parallel, wenn $U_1 = U_2$ und $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$, d.h. wenn es keinen Vektor $v_1 \in U_1$ gibt, sodass $a_1 + v_1 = a_2$. Gibt es einen solchen Vektor, so sind die beiden affinen Unterräume gleich (auch dann bezeichnet man sie manchmal als parallel).

2.9 Bezugssysteme

Der Begriff des *Bezugssystems* [reference system oder frame of reference] spielt in der Physik eine wichtige Rolle und ist abzugrenzen von dem Begriff des Koordinatensystems [coordinate system] und des Inertialsystems [inertial reference frame].

Ein Koordinatensystem erlaubt die eindeutige Festlegung eines Punktes durch seine Koordinaten, d.h., durch einen Satz von Zahlen. Im Allgemeinen ist ein Koordinatensystem eine Karte von einer Mannigfaltigkeit, d.h. eine lokal bijektive Abbildung von einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n in die Mannigfaltigkeit. Ein Beispiel sind die Längen- und Breitengrade der Erdoberfläche oder (etwas mathematischer) die Winkelkoordinaten auf der Kugeloberfläche (siehe auch Kap. 8).

Im konkreten Fall der klassischen Mechanik beschreibt man den physikalischen Raum meist durch einen affinen euklidischen Raum. In diesem Fall besteht die Festlegung eines Koordinatensystems in der Wahl eines Ursprungspunkts - dadurch wird der affine Raum zu einem Vektorraum - und in der Wahl einer Basis für diesen Vektorraum.

Ein Bezugssystem besteht aus folgenden Festlegungen:

- der Festlegung eines Zeitursprungs und eines Zeitmaßstabs. Auch die physikalische Zeit wird durch einen affinen (eindimensionalen) reellen Raum beschrieben und man muss willkürlich einen Nullpunkt festlegen. Außerdem muss man eine Skala festlegen, z.B. die Dauer einer Sekunde.
- 2. die Festlegung eines Ursprungspunktes für den Raum (beschrieben zunächst als dreidimensionalen affinen Raum), wodurch dieser Raum zu jedem Zeitpunkt zu einem Vektorraum wird. Außerdem wird zu jedem Zeitpunkt ein Koordinatensystem ausgezeichnet, meist ein Orthonormalsystem von Achsen. Weiterhin wird der Vektorraum in der Physik meist mit einem Skalarprodukt ausgestattet, d.h. wir können Längen und Winkel angeben und es wird eine Einheit, z.B. das Meter, festgelegt.

2.9. BEZUGSSYSTEME

3. Schließlich muss noch angegeben werden, wie man Elemente des affinen Raums zu verschiedenen Zeitpunkten vergleichen kann, d.h., welche Elemente der affinen Räume zu verschiedenen Zeitpunkten demselben Raumpunkt entsprechen sollen. Da wir in der Physik keine Möglichkeiten haben, absolute Raumpunkte bestimmen zu können, sondern immer nur Raumpunkte relativ zu anderen Bezugspunkten angeben können, bedeutet dies im Wesentlichen die Festlegung von solchen Bezugspunkten.

Ein *Intertialsystem* ist ein spezielles Bezugssystem, bei dem der Ursprungspunkt und die Koordinatenachsen so gewählt werden, dass kräftefreie Bewegungen durch eine geradlinige und gleichförmige Bewegungen beschrieben werden.

Kapitel 3

Grundlagen der Analysis

Für diesen Abschnitt setze ich voraus, dass der Begriff der Abbildung bzw. der Funktion sowie die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv bekannt sind. Auch dieses Kapitel wiederholt im Wesentlichen in knapper Form die Begriffe, die in der Analysis I behandelt wurden, allerdings werden die Konzepte soweit möglich auf mehrdimensionale (Vektor-)Räume erweitert.

3.1 Topologische Räume und offene Mengen

Definition: Eine Menge M zusammen mit einer Abbildung $d: M \times M \to \mathbb{R}$ heißt <u>metrischer Raum</u>, wenn d folgende Bedingungen erfüllt:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) \ge 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{3.1}$$

$$\forall x, y \in M \quad : \quad d(x, y) = d(y, x) \tag{3.2}$$

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z) \qquad Dreiecksungleichung \tag{3.3}$$

Auf einem normierten Vektorraum V (mit der Norm $\|\cdot\|$) ist durch $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ eine Metrik definiert.

Definition: Sei ein metrischer Raum (M, d) gegeben, dann bezeichnet man zu einem Element $x \in M$ die Menge

$$B_r(x) = \{ y \in M | d(x, y) < r \}$$
(3.4)

als den offenen Ball vom Radius r um das Element x.

Insbesondere gilt für einen normierten Vektorraum $V: B_r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in V | \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r\}.$

Es folgen zwei Definitionen von "Topologie". Die erste Definition ist sehr allgemein, sie erfordert keinen metrischen Raum und umfasst die zweite Definition als Spezialfall. Die zweite Definition ist für die Physik wichtiger. Alle Eigenschaften, die sich aus der ersten Definition ableiten lassen, gelten auch bezüglich der zweiten Definition.

Definition (Topologie) 1: Eine Menge $\mathscr{T} = \{U_i\}$ von Teilmengen $U_i \subseteq M$ einer Menge M bezeichnet man als Topologie auf M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1. Die leere Menge und M selbst sind Elemente von $\mathscr{T}: \emptyset \in \mathscr{T} \land M \in \mathscr{T}$.
- 2. Beliebige Vereinigungen von Elementen $U_i \in \mathscr{T}$ sind wieder ein Element von $\mathscr{T}: \bigcup_i U_i \in \mathscr{T}$.

3. Endliche Durchschnitte von Elementen aus \mathscr{T} sind wieder in $\mathscr{T}: \forall U, V \in \mathscr{T}: U \cap V \in \mathscr{T}.$ (Wenn der Durchschnitt von zwei Elementen aus \mathscr{T} wieder in \mathscr{T} ist, ist auch der Durchschnitt von endlich vielen Elementen aus \mathscr{T} wieder in \mathscr{T} .)

Man bezeichnet die Elemente aus \mathscr{T} als offene Mengen von M.

Definition: Eine Teilmenge von M heißt geschlossen, wenn sie das Komplement zu einer offenen Menge ist: $V \subset M$ geschlossen $\Longrightarrow \exists U \in \mathscr{T} : V = M \setminus U$.

Definition (Topologie) 2: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt <u>offen</u>, wenn jedes Element $x \in U$ einen offenen Ball $B_{\epsilon}(x) \subset M$ mit $\epsilon > 0$ besitzt, sodass $B_{\epsilon}(x) \subset U$. Die so definierte Menge aller offenen Mengen von M bezeichnet man als (von der Metrik d induzierte) Topologie auf M.

Anmerkungen:

- 1. Wie schon erwähnt, ist die zweite Definition etwas einschränkender als die erste Definition, da sie eine Metrik bzw. eine Abstandsfunktion voraussetzt. In vielen Fällen kann man aber zu einer Topologie (nach Definition 1) eine geeignete Metrik finden, die diese Topologie nach Definition 2 induziert. Zum Beispiel definiert die Menge aller Teilmengen (die Potenzmenge) einer Menge M eine Topologie bezüglich der ersten Definition, die man als die *diskrete Topologie* oder Punkttopologie bezeichnet: Jedes Element von M bildet eine offene Menge und beliebige Teilmengen von M sind offen. Damit ist jede Teilmenge von M sowohl offen als auch geschlossen. Diese Topologie erhält man aus der diskreten Metrik - d(x, y) = 0 für x = y und d(x, y) = 1sonst.
- 2. Man bezeichnet eine Topologie \mathscr{T}_1 als *feiner* als eine Topologie \mathscr{T}_2 , wenn jedes Element von \mathscr{T}_2 auch ein Element von \mathscr{T}_1 ist. Allerdings enthält \mathscr{T}_1 Elemente, die nicht in \mathscr{T}_2 sind. Die diskrete Topologie ist die feinste Topologie, die eine Menge M haben kann. Ist \mathscr{T}_1 feiner als \mathscr{T}_2 , so bezeichnet man umgekehrt \mathscr{T}_2 als gröber als \mathscr{T}_1 . Die gröbste Topologie auf einer Menge M besteht nur aus M selbst und der leeren Menge \emptyset . Man bezeichnet sie als die *indiskrete* oder auch triviale Topologie.
- 3. Die zweite Definition schließt wegen der echten Ungleichung $\epsilon > 0$ die diskrete Topologie in vielen Fällen aus (z.B. auf den Vektorräumen \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n , sofern man dort die durch die Standardnorm induzierten Metriken verwendet).

Um auch Topologien ausschließen zu können, die zu grob sind, verlangt man oft zusätzlich sogenannte Trennungsaxiome von einer Topologie. Das bekannteste Trennungsaxiom ist das Hausdorff-Axiom. Die zugehörige Topologie bezeichnet man auch als Hausdorff-Topologie und eine Menge mit einer Hausdorff-Topologie nennt man Hausdorff-Raum:

Definition: Eine Menge M mit einer Topologie \mathscr{T} heißt <u>Hausdorff-Raum</u>, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in M$ eine offene Umgebung $U \in \mathscr{T}$ von x (also $x \in U$) und eine offene Umgebung $V \in \mathscr{T}$ von y gibt, sodass $U \cap V = \emptyset$.

Die durch die Standardnormen $\|\cdot\|$ definierten Topologien auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n erfüllen die Hausdorff-Bedingung. Wenn im Folgenden von einem topologischen Raum die Rede ist, wird immer vorausgesetzt, dass es sich um einen Hausdorff-Raum handelt. Das Gleiche gilt für metrische Räume: Die Metriken seien immer von der Art, dass die induzierte Topologie eine Hausdorff-Topologie ist.

3.2 Folgen und ihre Konvergenz

Definition: Eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to M$ heißt eine Folge [sequence] von Elementen aus M. Wir schreiben für eine Folge oft $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wobei $x_i = x(i)$.

In vielen Fällen - sofern der Zusammenhang eindeutig ist - lasse ich die Bezeichnung der Indexmenge auch weg und schreibe einfach (x_i) .

Definition: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Ein Element $x \in M$ heißt <u>Häufungspunkt</u> [limit point] einer Folge (x_i) , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ ein x_i mit i > N gibt, sodass $d(x, x_i) < \epsilon$.

Anders ausgedrückt kann man auch sagen: x ist Häufungspunkt der Folge (x_i) , wenn sich in jeder offenen Umgebung von x ein Term der Folge befindet (und damit befinden sich in jeder offenen Umgebung auch unendlich viele Terme der Folge).

Es folgen zwei Definitionen von Konvergenz:

Definition: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_i) heißt konvergent mit <u>Grenzwert</u> $x \in M$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $i \ge N$ gilt: $\overline{d(x, x_i)} < \epsilon$.

Definition: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_i) heißt <u>Cauchy-konvergent</u>, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $i, j \geq N$ gilt: $d(x_i, x_j) < \overline{\epsilon}$.

Die Definition der Cauchy-Konvergenz hat den Vorteil, dass der Grenzwert x nicht bekannt sein muss bzw. dieser Grenzwert nicht Element von M sein muss. Ein bekanntes Beispiel sind die rationalen Zahlen \mathbb{Q} : Es gibt Folgen in \mathbb{Q} , die Cauchy-konvergent sind, deren Grenzwert aber nicht in den rationalen Zahlen liegt. Konvergenz impliziert Cauchy-Konvergenz, und wenn der Grenzwert x ein Element der Menge M ist gilt auch die Umkehrung.

Definition: Ein metrischer Raum (M,d) heißt vollständig, wenn der Grenzwert jeder Cauchykonvergenten Folge in M auch Element von M ist.

Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig. Die reellen Zahlen sind vollständig. Man kann die reellen Zahlen sogar über die rationalen Zahlen definieren, indem man die rationalen Zahlen um sämtliche Grenzwerte von Cauchy-konvergenten Folgen in \mathbb{Q} erweitert.

- 1. Gegeben seien zwei Cauchy-konvergente Folgen (a_n) und (b_n) eines normierten Vektorraums (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}). Dann ist auch die Folge $(\alpha a_n + \beta b_n)$ Cauchy-konvergent. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann hat die Folge $(\alpha a_n + \beta b_n)$ den Grenzwert $\alpha a + \beta b$ (für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$). Dies bedeutet, dass die Cauchy-konvergenten Folgen einen Vektorraum bilden.
- 2. Zu zwei Folgen (a_n) und (b_n) reeller (oder komplexer) Zahlen mit den Grenzwerten a bzw. b hat die Folge $(a_n \cdot b_n)$ den Grenzwert $a \cdot b$.
- 3. Zu zwei Folgen (a_n) und (b_n) reeller (oder komplexer) Zahlen mit den Grenzwerten a bzw. $b \neq 0$ hat die Folge (a_n/b_n) (für alle n > N, sodass $b_n \neq 0$) den Grenzwert a/b.

3.3 Definitionen und Sätze zu metrischen Räumen

Im Folgenden sei (M, d) ein metrischer Raum bzw. (M, \mathscr{T}) ein topologischer Raum. Allgemein spricht man bei einer Menge nur dann von einem *Raum*, wenn auf dieser Menge eine Topologie definiert ist. Die Elemente von Räumen bezeichnet man dann auch als *Punkte*. **Definition:** Eine Menge $N \subset M$ heißt <u>Umgebung</u> [neighborhood] eines Punkts $x \in M$, wenn es eine offene Menge $U \subset M$ gibt, sodass $x \in U$ und $U \subset N$.

Eine Umgebung N von einem Punkt x muss also nicht unbedingt offen oder abgeschlossen sein, allerdings muss es eine offene Umgebung von x geben, die ganz in N liegt.

Definition: Es sei $E \subset M$ eine Teilmenge von M. Ein Punkt x heißt <u>Häufungspunkt</u> [limit point] von E, wenn jede offene Umgebung U von x außer x noch weitere Elemente von E enthält.

Zu jeder noch so kleinen Umgebung von x (z.B. zu jedem offenen Ball um x mit beliebig kleinem r > 0) gibt es somit außer x noch weitere Elemente in E. Der Punkt x muss dabei selbst nicht Element von E sein. Das Konzept des Häufungspunkts bei einer Folge ist zwar ähnlich zum Häufungspunkt einer Menge, aber nicht gleich: Die Folge $a_n = (-1)^n$ hat sowohl +1 als auch -1 als Häufungspunkt, die Menge $\{+1, -1\}$ (aufgefasst als Teilmenge von \mathbb{R}) hat aber keine Häufungspunkte.

Satz: Eine Menge $E \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Das impliziert unter anderem, dass eine abgeschlossene Menge alle Grenzwerte von Folgen aus Elementen in ihr enthält.

Definition: Set $E \subset M$ eine Teilmenge von M. Ein Punkt x heißt <u>innerer Punkt</u> [interior point] von E, wenn E eine Umgebung von x ist (wenn es also eine offene Umgebung von x gibt, die ganz in E liegt).

Definition: Die Vereinigung einer Teilmenge $E \subset M$ mit all ihren Häufungspunkten ist eine abgeschlossene Menge \overline{E} , die man den <u>Abschluss</u> [closure] von E nennt.

Satz: Eine Menge ist offen, wenn sie Umgebung zu all ihren Elementen ist.

Definition: Ein <u>Randpunkt</u> [boundary point] einer Menge $E \subset M$ ist ein Punkt, bei dem jede offene Umgebung sowohl Elemente aus E als auch Elemente aus dem Komplement von E in M enthält. Der <u>Rand</u> [boundary] einer Menge E besteht aus der Menge der Randpunkte.

Man kann die Randpunkte einer Menge E auch als alle Häufungspunkte von E charakterisieren, die keine inneren Punkte sind. Eine andere Definition beschreibt den Rand von E als die Menge $\overline{E} \cap \overline{M \setminus E}$, also als die Schnittmenge des Abschlusses von E mit dem Abschluss des Komplements von E.

Definition: Eine Teilmenge $E \subset M$ heißt <u>dicht</u> [dense], wenn sich jedes Element $x \in M$ als Grenzwert einer Folge aus E darstellen lässt. Alternativ kann man auch sagen, E ist dicht, wenn jede Umgebung eines Elements $x \in M$ auch Elemente aus E enthält.

3.4 Reihen und ihre Konvergenz

Definition: Sei (x_i) eine Folge mit Elementen in einem normierten Vektorraum: $x_i \in V$. Die (formale) Reihe

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \tag{3.5}$$

3.4. REIHEN UND IHRE KONVERGENZ

heißt konvergent, wenn der Grenzwert der Folge (S_n) der Partialsummen

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i \tag{3.6}$$

existiert. Man bezeichnet $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ als die Summe der Reihe. Man nennt eine Reihe absolut konvergent, wenn der Grenzwert der Partialsummen \hat{S}_n der Absolutwerte von x_i ,

$$\hat{S}_n = \sum_{i=1}^n \|x_i\|, \qquad (3.7)$$

existient.

Bei einer absolut konvergenten Reihe kann man die Reihenfolge der Terme in der Summe beliebig umstellen, das Ergebnis ändert sich dadurch nicht. Ist eine Reihe jedoch nicht absolut konvergent (Konvergenz alleine reicht nicht!), darf man die Terme nicht umstellen. Nach dem *Riemann'schen Umordnungssatz* [*Riemann series theorem*] kann man bei nicht absolut konvergenten Reihen immer Permutationen der Terme in der Reihe finden, sodass man als Summe (im Sinne des Grenzwerts der Partialsummen) jeden beliebigen vorgegebenen Wert erhält.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die wichtigsten Konvergenzkriterien von Reihen - Majorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium, Leibniz-Kriterium - bekannt sind; ebenso das Minorantenkriterium, wenn man zeigen möchte, dass eine Reihe divergent ist. Für absolut konvergente Reihen gilt auch: (1) Die Summe von zwei absolut konvergenten Reihen existiert und ihr Wert ist gleich der Summe der einzelnen Reihen, (2) das Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen ist konvergent und ihr Wert ist gleich dem Produkt der Einzelwerte. Hierbei ist das Produkt folgendermaßen definiert:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right) \qquad \text{mit} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \,. \tag{3.8}$$

Definition: Gegeben eine Funktion g(x). Eine Folge von Funktionen $(f_n(x))$ konvergiert punktweise gegen g(x) in einem Gebiet U, wenn es für jeden Punkt $x \in U$ zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $||f_k(x) - g(x)|| < \epsilon$ für alle k > N. Die Folge $(f_n(x))$ konvergiert gleichmäßig gegen g(x) in einem Gebiet U, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $x \in U$ gilt: $||f_k(x) - g(x)|| < \epsilon$ für alle k > N. Hier kann man auch fordern, dass $\sup_{x \in U} ||f_n(x) - g(x)|| < \epsilon$ für alle k > N.

Bekannte Reihendarstellungen von Funktionen:

Sint

Exponential function
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
 (3.9)

as-Funktion
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
 (3.10)

Kosinus-Funktion
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
(3.11)

Logarithmus
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$
 (3.12)

geometrische Reihie
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1.$$
 (3.13)

Der Konvergenzradius solcher Reihen ist der Wert $z \ge 0$, sodass die Reihe für alle x < z absolut konvergent ist. Natürlich gibt es auch Reihen, deren Konvergenzradius 0 ist, d.h., die für keine reelle (oder komplexe) Zahl ungleich Null konvergent sind. Ein Beispiel ist die Reihe $\sum_n n! x^n$.

3.5 Stetigkeit

Die allgemeinste Definition von Stetigkeit einer Abbildung ist Folgende:

Definition (Umgebungsstetigkeit): Eine Abbildung $f: M_1 \to M_2$ von einem topologischen Raum (M_1, T_1) in einen topologischen Raum (M_2, T_2) heißt stetig [continuous], wenn das Urbild jeder offenen Menge in M_2 wieder eine offene Menge in M_1 ist.

Diese Definition ist so allgemein, dass sie in der Physik nur selten angewandt werden kann oder muss. Die folgenden zwei Definitionen sind spezifischer.

Definition (Folgenstetigkeit): Eine Funktion $f: M_1 \to M_2$ von einem metrischen Raum (M_1, d_1) in einen metrischen Raum (M_2, d_2) heißt stetig in einem Punkt $x \in M_1$, wenn für jede in M_1 konvergente Folge (x_i) mit Grenzwert x die Folge $(f(x_i))$ konvergent in M_2 mit Grenzwert f(x) ist.

Definition (ϵ - δ -**Stetigkeit**): Eine Funktion $f: M_1 \to M_2$ von einem metrischen Raum (M_1, d_1) in einen metrischen Raum (M_2, d_2) heißt stetig in einem Punkt $x \in M_1$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $y \in M_1$ mit $d_1(x, y) < \delta$ gilt: $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Eine Funktion $f: M_1 \to M_2$ heißt stetig in einem Gebiet $U \subset M_1$, wenn sie in allen Punkten $x \in U$ stetig ist. Das setzt natürlich voraus, dass die Funktion an allen Punkten $x \in U$ auch definiert ist. Beispielsweise ist die Funktion $f(x) = 1/x^2$ am Punkt x = 0 nicht stetig, obwohl man argumentierten könnte, dass für jede Folge $x_i \to 0$ gilt $f(x_i) \to f(0)$; allerdings ist die Folge der Funktionswerte nicht konvergent und daher ist f(x) dort auch nicht stetig. Das ϵ - δ -Kriterium ist hier klarer als das Folgenkriterium.

Da die Definition von Stetigkeit auch in der Physik von großer Bedeutung ist, wir andererseits aber auch praktisch nur Funktionen von einem \mathbb{R}^n (oder \mathbb{C}^n) in einen \mathbb{R}^m (oder \mathbb{C}^m) betrachten, wobei auf diesen Vektorräumen die übliche (euklidische) Norm definiert sein soll, folgen hier nochmals die Definitionen von Stetigkeit speziell für solche Funktionen. (In den Kap. 10–12 beschäftigen wir uns mit unendlich dimensionalen normierten Vektorräumen, unter anderem sogenanten Banach-Räumen; manche der hier erwähnten Eigenschaften gelten dort nicht.)

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ (\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m)$ ist <u>stetig</u> im Punkte $x \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- 1. Für jede Folge (x_i) mit $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ gilt $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(x)$.
- 2. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $||x y|| < \delta$ gilt $||f(x) f(y)|| < \epsilon$.

Für Funktionen auf komplexen Räumen gelten die entsprechenden Definitionen.

Es seien $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen auf U. Dann gilt: f + g ist stetig, αf ist stetig für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ (das macht die stetigen Funktionen zu einem Vektorraum), ||f|| ist stetig und f/g ist stetig, sofern g in U keine Nullstelle hat. Das Gleiche gilt für Funktionen über bzw. in die komplexen Zahlen.

Definition: Eine Funktion $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es eine Zahl $0 \leq L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$||f(x) - f(y)|| \le L ||x - y|| \quad \forall x, y \in U.$$
(3.14)

Anschaulich bedeutet dies, dass die Steigung der Verbindungslinie zwischen zwei Punkten im Graphen von f nirgendwo größer als L werden kann. Das bedeutet auch, dass die Steigungen von Tangenten an f niemals größer als L werden können.

Definition: Eine Funktion $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt gleichmäßig stetig [uniformly continuous] auf U, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in U$ mit $||x - y|| < \delta$ gilt $||f(x) - f(y)|| < \epsilon$.

Im Gegensatz zum Epsilon-Delta-Kriterium für Stetigkeit, bei dem die ϵ - δ -Vorschrift nur für ein gegebenes $x \in U$ erfüllt sein muss, sollte bei der gleichmäßigen Stetigkeit dasselbe ϵ - δ -Kriterium für alle $x \in U$ gelten. Offenbar ist eine Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmäßig stetig, denn wenn $||f(x) - f(y)|| < \epsilon$ gelten soll, ist dies offensichtlich für $||x - y|| < \delta = \epsilon/(2L)$ erfüllt. Allgemein gilt: Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit impliziert Stetig-keit.

Es gilt der Satz von Heine: Auf einem kompakten Gebiet impliziert die Stetigkeit in jedem Punkt die gleichmäßige Stetigkeit. (Zur Erinnerung: Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n heißt kompakt, wenn jede Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt, bzw. wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.) Weiterhin gilt: Sei $(f_n(x))$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f(x)konvergiert, dann ist auch f(x) stetig. Dies gilt nicht mehr, wenn die Funktionen nicht gleichmäßig gegen f(x) konvergieren. In Kap. 12 werden wir dazu Gegenbeispiele sehen.

3.6 Die *O*- und *o*-Notation

Die \mathcal{O} - und *o*-Notation (manchmal spricht man auch von den Landau-Symbolen, benannt nach dem Zahlentheoretiker Edmund Landau (1877–1938)) dienen häufig dazu, das asymptotische Verhalten von Folgen oder Funktionen qualitativ abzuschätzen oder anzugeben. Wir betrachten zunächst das Verhalten von Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für große Werte von n, im nächsten Abschnitt beschreibe ich die Notation dann für Funktionen.

3.6.1 \mathcal{O} und *o* für Folgen

Mit der \mathcal{O} -Notation kann man zum Ausdruck bringen, dass sich eine Folge für große Werte von n"ähnlich verhält wie" eine andere, meist einfachere Folge. Damit kann man sowohl charakterisieren, wie eine Folge divergiert (sofern sie keinen Grenzwert hat bzw. nicht beschränkt ist) als auch, wie rasch eine Folge gegen ihren Grenzwert konvergiert.

Definition (O-Notation): Definition der O-Notation: Eine Folge (a_n) verhält sich wie O(f(n)), wenn es eine natürliche Zahl n_0 und eine Konstante C gibt, sodass für alle $n > n_0$ gilt: $|a_n|/|f(n)| < C$ (bzw. äquivalent $|a_n| < C|f(n)|$).

Äquivalent können wir auch sagen, dass der Quotient $|a_n|/|f(n)|$ eine obere Schranke haben soll. Außerdem dient die Einschränkung "es gibt eine natürliche Zahl n_0 , sodass für alle $n > n_0$ " nur dem Fall, dass f(n) an manchen Stellen 0 werden kann; das sollte aber ab einem n_0 nicht mehr passieren. Falls also $f(n) \neq 0$, kann man die Schranke C auch für alle n fordern. Handelt es sich bei f(n) um eine Nullfolge, impliziert diese Definition, dass auch (a_n) eine Nullfolge sein muss. Beispiele: Die Folge (x_n) mit $x_n = (-1)^n$ ist zwar nicht divergent, sie konvergiert aber auch nicht gegen einen Grenzwert. Von dieser Folge kann man sagen, sie ist $\mathcal{O}(1)$. Die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{1}{2n+1}$ ist eine Nullfolge, um aber anzugeben, wie rasch diese Folge gegen 0 geht, kann man sagen, die Folge ist $\mathcal{O}(1/n)$. Insbesondere kann man diese Notation auch nutzen um anzugeben, wie schnell eine Folge divergiert. Sei beispielsweise $\pi(n)$ die Primzahlfunktion, die angibt, wie viele Primzahlen es gibt, die kleiner sind als n. Von Gauß stammte die Vermutung (später von Hadamard und de la Vallée Poussin unabhängig voneinander bewiesen), dass $\pi(n)$ ansteigt wie $O(n/\ln n)$.

Definition (o-Notation): Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verhält sich wie o(f(n)) (wobei o.E.d.A. $\forall n : f(n) \neq 0$), wenn $\lim_{n \to \infty} a_n/f(n) = 0$.

Im Gegensatz zur \mathcal{O} -Notation, die angibt, dass der Quotient $a_n/f(n)$ beschränkt ist, besagt die o-Notation somit, dass dieser Quotient für n gegen unendlich eine Nullfolge darstellt. Mit der o-Notation bringen wir also zum Ausdruck, dass etwas *schwächer* als eine andere Funktion ansteigt bzw. stärker abfällt.

Zusammenfassend können wir also sagen, dass die O-Notation angibt, dass der Quotient aus der Folge und ihrer Abschätzung beschränkt ist, wohingegen die o-Notation verlangt, dass dieser Quotient eine Nullfolge ist.

3.6.2 *O* und *o* für Funktionen

Funktionen g(x) unterscheiden sich von Folgen lediglich dadurch, dass wir einerseits den Grenzwert für x festlegen müssen, für den wir die Abschätzung vornehmen wollen, andererseits verlangen wir dann, dass die Abschätzung für *jede* Folge von x-Werten gilt, die diesen Grenzwert hat.

Beispielsweise können wir sagen, dass sich eine Funktion mit Funktionswerten g(x) für große Werte von x wie die Funktion f(x) verhält. Das drücken wir durch g(x) ist $\mathcal{O}(f(x))$ " aus und meinen damit, dass für jede Folge (x_n) mit $x_n \to \infty$ die Folge $(g(x_n)/f(x_n))$ beschränkt ist. (Eventuell müssen wir fordern, dass es ein n_0 gibt, ab dem für alle $n > n_0$ die Folge $g(x_n)/f(x_n)$ beschränkt ist, falls die Funktion f(x) bei einem x_i eine Nullstelle hat.)

Sehr oft interessiert uns aber auch das Verhalten einer Funktion für $x \to 0$. Die Aussage "g(x) verhält sich für x gegen null wie $\mathcal{O}(x^2)$ " bedeutet also, dass $g(x)/x^2$ für genügend kleine Werte von x beschränkt ist ("es gibt ein $x_0 > 0$ und eine Konstante C, sodass für alle x mit $0 < |x| < x_0$ gilt: $g(x)/x^2 < C$ ").

Für die *o*-Notation bei Funktionen gilt das Entsprechende. Wenn g(x) sich für $x \to 0$ wie o(x) verhält, bedeutet dies, dass g(x) schneller als x gegen Null geht, oder genauer: $\lim_{x\to 0} g(x)/x = 0$.

Die \mathcal{O} - und o-Notation werden bei Funktionen sehr oft verwendet, um die Güte von Näherungen an Funktionen anzugeben. Beispielsweise gilt

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \tag{3.15}$$

oder auch

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).$$
(3.16)

Die \mathcal{O} -Notation wird meist verwendet, wenn man den Korrekturterm der nächsten Ordnung kennt, wohingegen die *o*-Notation (mit einer schwächeren Bedingung) meist verwendet wird, wenn die genaue Bedingung nicht bekannt oder nicht wichtig ist. Wir hätten, da die Potenzreihenentwicklung für die Sinus-Funktion bekannt ist, in der zweiten Gleichung auch $\mathcal{O}(x^5)$ schreiben können.

3.7 Die Ableitung einer Funktion

Wir wollen nun den Begriff der Ableitung einer Funktion einführen. Dazu betrachten wir zunächst reellwertige Funktionen über der reellen Achse. Dieser Fall sollte aus der Analysis I bekannt sein. Die Verallgemeinerung auf mehrere Variablen erfolgt im nächsten Kapitel.

Es sei $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf einem offenen Gebiet U der reellen Zahlen. Wir nehmen an, die Funktion sei in U stetig (oder zumindest an den Punkten, bei denen wir die Ableitung definieren möchten).

Wir definieren nun die Ableitung [*derivative*] f'(x) dieser Funktion an der Stelle x durch einen Grenzwert:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
(3.17)

Wie immer ist dieser Grenzwert $h \to 0$ im Sinne von "für jede beliebige Nullfolge (h_n) " zu verstehen. Das setzt voraus, dass dieser Grenzwert überhaupt existiert und dass er für jede beliebige Nullfolge auch derselbe ist (wobei hier nur Nullfolgen betrachtet werden, für die $h_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$). Die Stetigkeit ist zwar eine notwendige Voraussetzung für die Existenz und Eindeutigkeit der Ableitung, aber keine hinreichende Voraussetzung. Die Funktion f(x) = |x| ist bei x = 0 stetig, doch die Ableitung ist nicht eindeutig.¹ Die Funktion

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}, \qquad (3.18)$$

wobei sgn(x) die Vorzeichenfunktion (+1 für x > 0, -1 für x < 0 und 0 für x = 0) ist, ist ebenfalls bei x = 0 wohl definiert und stetig (allerdings nicht Lipschitz-stetig), doch in diesem Fall gibt es keinen endlichen Grenzwert für die Ableitung.

Manchmal schreibt man statt f'(x) auch

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \equiv Df(x) \,. \tag{3.19}$$

Eine andere (im vorliegenden Fall äquivalente) Formulierung der Ableitung lautet: f'(x) ist die Ableitung von f(x) an der Stelle x, wenn

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + o(h).$$
(3.20)

3.7.1 Ableitungsregeln

Aus der Definition der Ableitung können wir Ableitungsregeln herleiten. Dabei folgt die *Summenregel* [*sum rule*] (hier zusammengefasst mit der *Faktorregel* [*factor rule*]) unmittelbar aus der Definition:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'. \tag{3.21}$$

Die Ableitung einer Linearkombination von Funktionen ist gleich der Linearkombination der Ableitungen. Dies kennzeichnet die Ableitung als eine lineare Abbildung auf dem Vektorraum der (ableitbaren) Funktionen.

Ist eine Funktion das Produkt von zwei anderen Funktionen, gilt für die Ableitung die Produktregel:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \tag{3.22}$$

¹Ist der Grenzwert in Gl. 3.17 für jede positive Nullfolge derselbe, spricht man von einer rechtseitigen Ableitung; entsprechend ist eine linksseitige Ableitung definiert als der Grenzwert für jede Folge $\{h_n\}$ die sich von links (also mit negativen Werten für h) der Null nähert. Dementsprechend hat die Funktion f(x) = |x| bei x = 0 keine wohldefinierte Ableitung, aber die rechtseitige Ableitung ist +1 und die linksseitige -1.

Handelt es sich bei einer Funktion um die Hintereinanderschaltung von zwei Funktionen,

$$F(x) = f(g(x))\,,$$

gilt für die Ableitung die Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \,. \tag{3.23}$$

Manchmal schreibt man für die Kettenregel auch

$$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\Big|_{g=g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

und bringt damit zum Ausdruck, dass zunächst die Ableitung von f nach ihrem natürlichen Argument zu bilden ist; anschließend ist in die Funktion, die man so erhält, das spezielle Argument g = g(x) einzusetzen.

Für den Quotienten von zwei Funktionen gilt die Quotientenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \,. \tag{3.24}$$

3.7.2 Bahnkurven und ihre Geschwindigkeit

In der Physik möchte man häufig die Bahnkurve eines physikalischen Körpers - meist beschrieben durch seinen Schwerpunkt oder idealisiert als Punktteilchen - beschreiben. Zur mathematischen Darstellung der Bahnkurve gibt man zu jedem Zeitpunkt t den Ort $\boldsymbol{x}(t)$ des Objekts an. Bei einer parametrisierten Bahnkurve [parametrized trajectory] γ handelt es sich um eine Abbildung

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto \boldsymbol{x}(t) \,. \tag{3.25}$$

Das Intervall $I \subset \mathbb{R}$ bezeichnet man allgemein als Parameterintervall und in der Physik, sofern t der Zeit entspricht, als Zeitintervall.

Die Geschwindigkeit [velocity] des Teilchens zu einem Zeitpunkt t ergibt sich aus der Ableitung dieser Bahnkurve nach der Zeit:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \,. \tag{3.26}$$

Diese Gleichung darf man komponentenweise verstehen, d.h., die *i*-te Kompontente der Geschwindigkeit ergibt sich aus der Ableitung der *i*-ten Komponente der Bahnkurve nach der Zeit:

$$v_i(t) = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} \,. \tag{3.27}$$

 $\boldsymbol{v}(t)$ bezeichnet man auch als die Momentangeschwindigkeit [momentary velocity] des Teilchens zum Zeitpunkt t. Demgegenüber ist die Durchschnittsgeschwindigkeit [average velocity] zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 durch

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\boldsymbol{x}(t_2) - \boldsymbol{x}(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{3.28}$$

gegeben. Wenn wir physikalisch die Geschwindigkeit eines Objekts messen, bestimmen wir meist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei sehr nahe beieinanderliegenden Zeitpunkten. Man beachte, dass dies auch der mathematischen Definition der Ableitung entspricht: Der Grenzwert von Differenzenquotienten entspricht dem Grenzwert von Durchschnittsgeschwindigkeiten.

3.8. INTEGRATION UND INTEGRATIONSREGELN

Wir haben hier das Konzept der Ableitung auf Funktionen des Typs $\boldsymbol{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ verallgemeinert. Die Ableitung einer solchen Funktion ist definiert als:

$$D\boldsymbol{f}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(x+\epsilon) - \boldsymbol{f}(x)}{\epsilon}$$
(3.29)

Durch die Fettschrift wird hier angedeutet, dass es sich bei f(x) um Vektoren in einem \mathbb{R}^n handelt und im Zähler des Differenzenquotienten die Differenz von Vektoren steht. Die Definition der Ableitung ist unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems im \mathbb{R}^n . Falls jedoch ein Koordinatensystem (eine Basis) gegeben ist, kann man die Ableitung komponentenweise ausführen; daher handelt es sich nicht um ein neues Konzept.

3.8 Integration und Integrationsregeln

Wie schon bei der Ableitung von Funktionen betrachten wir zunächst Integrale über Funktionen von einem (reellen) Argument.

Gegeben sei eine stetige Funktion $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (das Integral lässt sich auch für stückweise stetige Funktionen definieren, dann beziehen sich die folgenden Bemerkungen immer auf stetige Abschnitte). Zur Bestimmung der Fläche unter dieser Kurve (definiert durch den Graph dieser Funktion) zwischen zwei Werten x = a und x = b unterteilen wir die Strecke [a, b] in N gleiche Abschnitte der Breite Δx , sodass $(b - a) = N \cdot \Delta x$. Die Punkte dieser Unterteilung seien $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, ...$ bis $x_N = b$. Dann gilt für die Fläche unter der Kurve näherungsweise:

$$F = \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \cdot \Delta x \,. \tag{3.30}$$



Abbildung 3.1: Die Fläche unter einer (stückweise stetigen) Funktion ist näherungsweise durch die Summe der N schmalen Rechtecke gegeben. Für den Grenzfall $N \to \infty$ spielt es keine Rolle, ob man jeweils die linke (Abb. links) oder die rechte (Abb. rechts) Höhe eines Rechtecks betrachtet. Die Differenz zwischen beiden Flächen (Abb. Mitte) ist gleich $\Delta A = \Delta x (f(b) - f(a))$ und verschwindet für $\Delta x \to 0$.

Unter den genannten Voraussetzungen kann man die Grenzwerte $N \to \infty$ und gleichzeitig $\Delta x \to 0$ betrachten, wobei $N \cdot \Delta x = (b-a)$ konstant bleiben soll. Man erhält in diesem Grenzfall die

Fläche unter der Kurve. Dafür schreibt man:

$$A = \int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} f(x_{n}) \cdot \Delta x \qquad (3.31)$$
$$(N \cdot \Delta x = b - a \text{ fest}),$$

und bezeichnet A als das Integral [*integral*] über die Funktion f auf dem Intervall [a, b]. Konkret spricht man auch von einem *Riemann-Integral*. In Kap. 7 werde ich im Zusammenhang mit der Maßtheorie eine verallgemeinerte Definition für Integrale einführen.

Aus der Interpretation (und Definition) des Integrals als Fläche ergibt sich unmittelbar folgende Identität:

$$A = \int_{a}^{c} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{b}^{c} f(x) \, \mathrm{d}x \tag{3.32}$$

für alle a < b < c.

Die folgenden beiden Beziehungen folgen ebenfalls aus der Definition des Integrals:

$$\int_{a}^{b} (f(x) + g(x)) \, \mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{a}^{b} g(x) \, \mathrm{d}x \tag{3.33}$$

$$\int_{a}^{b} \alpha \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ konstant}).$$
(3.34)

Diese beiden Bedingungen kennzeichnen die Bildung des Integrals als sogenannte "lineare Abbildung". Dabei ist der Vektorraum, für den diese Linearität gilt, der Vektorraum der stetigen (bzw. stückweise stetigen) Funktionen. Da das Bild dieser Abbildung eine reelle Zahl ist, handelt es sich bei dem bestimmten Integral um ein Element des Dualraums dieses Vektorraums.

Ist f(x) negativ, wird auch der Beitrag zur Fläche negativ. Ist man an dem Betrag einer Fläche unter einer Kurve interessiert, muss man entweder über |f(x)| integrieren, oder (was zu demselben Ergebnis führt) zunächst die Nullstellen von f(x) bestimmen sowie die Bereiche, in denen f(x) positiv bzw. negativ ist, und dann die Beiträge dieser Bereiche entsprechend addieren oder subtrahieren.

Außerdem wird definiert, dass der Wert des bestimmten Integrals sein Vorzeichen umkehrt, wenn man die Integrationsgrenzen vertauscht:

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_{b}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x \,. \tag{3.35}$$

Es gilt der Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int_{a}^{b} f'(x) \, \mathrm{d}x = f(b) - f(a) \,. \tag{3.36}$$

Für die Stammfunktion einer Funktion f(x) schreibt man manchmal auch ein *unbestimmtes Integral* [*indefinite integral*] (ein Integral ohne Grenzen):

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = F(x) + c \,. \tag{3.37}$$

Die freie Konstante c fällt bei der Ableitung wieder heraus. Die Stammfunktion ist daher nur bis auf diese Konstante c eindeutig.

3.8. INTEGRATION UND INTEGRATIONSREGELN

Die folgenden Stammfunktionen sollten bekannt sein:

$$\int x^{y} dx = \frac{1}{y+1} x^{y+1} + c \quad (y \neq -1)$$
(3.38)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \tag{3.39}$$

$$\int e^{\lambda x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + c \tag{3.40}$$

$$\int \cos \omega x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega} \sin \omega x + c \tag{3.41}$$

$$\int \sin \omega x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x + c \,. \tag{3.42}$$

Die folgende Identität bezeichnet man als partielle Integration:

$$\int_{a}^{b} f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = -\int_{a}^{b} f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x + f(b)g(b) - f(a)g(a) \,. \tag{3.43}$$

Die Substitutionsregel kann häufig angewendet werden, wenn sich eine Funktion g(x) als Hintereinanderschaltung von zwei Funktionen schreiben lässt: g(x) = g(y(x)), wobei y(x) im Integrationsbereich umkehrbar sein soll. Dann gilt:

$$\int_{a}^{b} g(y(x)) \,\mathrm{d}x = \int_{y=x(a)}^{y=x(b)} g(y) \,\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y} \,\mathrm{d}y \,. \tag{3.44}$$

Hierbei ist x(y) als die Umkehrfunktion von y(x) zu verstehen. Man beachte, dass die Ableitung $\frac{dx(y)}{dy}$ im Integrationsbereich ihr Vorzeichen nicht ändert (wegen der Umkehrbarkeit von y(x)). Falls diese Ableitung negativ ist, gilt x(b) < x(a) (sofern b > a). Manchmal (das ist insbesondere bei mehrdimensionalen Integralen der Fall) schreibt man daher den Absolutbetrag dieser Ableitung in obiger Gleichung, allerdings werden dann die Grenzen in ihrer natürlichen Folge (kleinere Grenze am unteren Ende des Integrationsbereichs) genommen.

Die folgenden Formeln folgen aus der Substitutionsregel und finden in der Physik häufig Anwendung:

$$\int_{a}^{b} f(x^{n})x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int_{a^{n}}^{b^{n}} f(y) dy$$
(3.45)

speziell
$$\int_{a}^{b} f(x^{2})x \, dx = \frac{1}{2} \int_{a^{2}}^{b} f(y) \, dy$$
 (3.46)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\cos\theta) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = -\int_{\cos\alpha}^{\cos\beta} f(y) \,\mathrm{d}y \tag{3.47}$$

$$\int_{a}^{b} f(\lambda x + c) \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a + c}^{\lambda b + c} f(y) \,\mathrm{d}y$$
(3.48)

speziell
$$\int_{a}^{b} \frac{1}{(\lambda x + c)} dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a + c}^{\lambda b + c} \frac{1}{y} dy = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\lambda b + c}{\lambda a + c}\right).$$
 (3.49)

Kapitel 4

Ableitungen und Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen

4.1 Richtungsableitung und totale Ableitung

Wir betrachten nun reellwertige Funktionen in mehreren reellen Variablen, also $f(x_1, ..., x_n)$ bzw. $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Außerdem nehmen wir an, dass die Funktionen an den Stellen, wo die Ableitungen bestimmt werden sollen, immer stetig sind.

4.1.1 Partielle Ableitung und Richtungsableitung

Wir können zunächst die *partielle Ableitung* [*partial derivative*] definieren, indem wir die Definition der Ableitung einer Funktion von einer Variablen einfach auf ein bestimmtes Argument anwenden (bei partiellen Ableitungen verwendet man statt des Symbols ,d' das Symbol , ∂^{i}):

$$\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \epsilon, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\epsilon} \,. \tag{4.1}$$

Äquivalent gilt

$$f(x_1, ..., x_i + \epsilon, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) + \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \epsilon + o(\epsilon).$$
(4.2)

Eine Verallgemeinerung der partiellen Ableitung ist die *Richtungsableitung* [directional derivative]; sie ist unabhängig von einer Koordinatenwahl in \mathbb{R}^n :

Definition: Set $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_n) \neq 0$ ein beliebiger n-komponentiger Vektor (ungleich dem Nullvektor). Wir definieren die Richtungsableitung $D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x})$ durch:

$$D_{\boldsymbol{h}}f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\epsilon}$$
(4.3)

bzw.

$$f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) \epsilon + o(\epsilon) .$$
(4.4)

Wählt man für eine gegebene Basis des \mathbb{R}^n den Vektor h speziell als Einheitsvektor zu einem Basisvektor, $h = e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, so wird die Richtungsableitung zur partiellen Ableitung:

$$D_{\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \,. \tag{4.5}$$

Oft fordert man, dass es sich bei h um einen normierten Vektor handeln soll (also ||h|| = 1). Das hat den Vorteil, dass die Richtungsableitung wirklich nur von der Richtung und nicht auch vom Betrag von h abhängt.

4.1.2 Die totale Ableitung und der Gradient

Definition: Wenn es eine lineare Abbildung $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, sodass für jede beliebige Nullfolge $\mathbf{h} \to 0$ n-komponentiger Vektoren \mathbf{h} die folgende Gleichung erfüllt ist,

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle + o(\|\boldsymbol{h}\|), \qquad (4.6)$$

bezeichnet man $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ als die totale Ableitung [total derivative] (manchmal auch das totale Differential, wobei dieser Begriff mehrdeutig ist) der Funktion f an der Stelle \mathbf{x} . Äquivalent kann man auch sagen: Wenn die Richtungsableitung $D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x})$ eine lineare Abbildung für das Argument \mathbf{h} ist, sich also in der Form $D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{D}f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle$ schreiben lässt, wobei $\langle \mathbf{D}f(\mathbf{x}), \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 \rangle = \langle \mathbf{D}f(\mathbf{x}), \mathbf{h}_1 \rangle + \langle \mathbf{D}f(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2 \rangle$ gelten soll ($\forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$), bezeichnet man $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ als die totale Ableitung von f an der Stelle \mathbf{x} .

Anmerkungen:

- 1. $Df(\mathbf{x})$ ist eine lineare Abbildung, die auf einen Vektor \mathbf{h} anzuwenden ist, und das Ergebnis ist eine reelle Zahl. Das kennzeichnet $Df(\mathbf{x})$ als einen dualen Vektor. Man beachte, dass Gl. 4.6 nicht von einer Basis im \mathbb{R}^n abhängt.
- 2. Manchmal schreibt man für Gl. 4.6 auch

$$f(\boldsymbol{x} + \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) + o(\|\boldsymbol{h}\|)$$
(4.7)

 mit

$$df(\boldsymbol{x}) = \sum_{i} \frac{\partial f}{\partial x_{i}} dx_{i}$$
(4.8)

und bezeichnet df als totales Differential.

3. Wie schon erwähnt, gilt: Wenn die lineare Abbildung Df(x) existiert, ist die Richtungsableitung zu einem nicht-verschwindenden Vektor h durch

$$D_{\boldsymbol{h}}f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle.$$
(4.9)

gegeben. Es gibt jedoch Fälle, in denen die Richtungsableitungen zwar für alle Vektoren h existieren, jedoch keine lineare Abbildung für h definieren und somit keine totale Ableitung. Nur wenn die Richtungsableitungen in einer offenen Umgebung des Punkts x stetig sind, gibt es auch die totale Ableitung.

Zu dem letzten Punkt gibt es bekannte Gegenbeispiele: Sei beispielsweise

$$f(x,y) = \begin{cases} +\sqrt{x^2 + y^2} & y > 0\\ x & y = 0\\ -\sqrt{x^2 + y^2} & y < 0 \end{cases}$$
(4.10)

Diese Funktion ist im Punkt (x, y) = (0, 0) stetig. Die Richtungsableitung existiert für jeden Vektor $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, aber sie definiert keine lineare Abbildung. Sofern nicht anders erwähnt soll im Folgenden die totale Ableitung immer existieren.

4.1.3 Der Gradient und seine geometrische Bedeutung

Ist auf dem \mathbb{R}^n ein Skalarprodukt $g(\cdot, \cdot)$ gegeben, so verstehen man unter dem *Gradienten* [gradient] $\nabla f(\mathbf{x})$ den dualen Vektor zu $Df(\mathbf{x})$, d.h. den Vektor, für den gilt: $g(\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h}) = \langle Df(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle$. Bezieht man die Komponenten eines Vektors \mathbf{x} auf eine Orthonormalbasis (ein kartesisches Koordinatensystem), dann sind die Komponenten des Gradienten durch $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$ gegeben. Kapitel 8 beschreibt etwas ausführlicher, wie die Komponenten des Gradienten in allgemeinen Koordinatensystemen ausgedrückt werden können.

Zur Veranschaulichung des Gradienten betrachten wir einen Spezialfall in Gl. 4.6: \boldsymbol{v} sei ein Einheitsvektor (also $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = 1$) und die Nullfolge sei durch $\boldsymbol{h} = \epsilon \boldsymbol{v} \ (\epsilon \to 0)$ gegeben. Wir stellen uns nun die Frage, für welchen Vektor \boldsymbol{v} (zu genügend kleinem aber festem ϵ) der Ausdruck

$$\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle = g(\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}) \tag{4.11}$$

maximal wird. Das ist dann der Fall, wenn \boldsymbol{v} parallel zu ∇f steht. Andererseits wird die linke Seite von Gl. 4.6 maximal, wenn \boldsymbol{v} in die Richtung zeigt, in die die Funktion f am stärksten zunimmt. Der Gradient zeigt also in die Richtung, in die f am stärksten zunimmt. Insbesondere steht ∇f senkrecht auf allen Äquipotenziallinien bzw. -flächen von f, also auf den Richtungen am Punkt \boldsymbol{x} , in die sich die Funktion f nicht ändert.

4.1.4 Das ∇ -(Nabla-)Symbol

In der Physik wird manchmal auch die Notation $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})$ verwendet. Das Symbol ∇ – genannt "Nabla" – wird wie ein Vektor behandelt, dessen Komponenten in der Standardbasis $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ die Operationen der partiellen Ableitungen sind. (Trotzdem soll nochmals betont werden, dass die Definition des Gradienten unabhängig vom Koordinatensystem ist - der Gradient ist ein geometrisches Konzept. Wie der Gradient in anderen Koordinatensystemen zu berechnen ist, werden wir noch untersuchen; vgl. Abschnitt 8.7.1.) Das Nabla-Symbol wird auch in entsprechender Bedeutung für andere Ableitungen verwendet, die wir später noch kennenlernen werden.

Besonders wichtige Beispiele in der Physik sind Gradienten von Funktionen, die nur vom Betrag des Ortsvektors abhängen, also z.B. $U(|\boldsymbol{x}|)$. In diesem Fall erhält man für die Komponenten des Gradienten nach der Kettenregel:¹

$$\frac{\partial U(|\boldsymbol{x}|)}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\partial r}{\partial x_i}, \qquad (4.12)$$

und da

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$
(4.13)

folgt

$$\boldsymbol{\nabla}U = U'(r)\,\frac{\boldsymbol{x}}{r}\,.\tag{4.14}$$

Der Gradient zeigt also in radialer Richtung und hat die "Länge" U'(r).

4.1.5 Die Richtungsableitung als Ableitung entlang eines Weges

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Außerdem betrachten wir einen stetigen Weg $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, den wir in der parametrisierten Form $\boldsymbol{x}(t)$ darstellen. Wenn das Bild des

¹Wir haben die Kettenregel zwar nur für den Fall $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bewiesen, doch sie gilt ganz allgemein für Abbildungen zwischen reellen und komplexen Vektorräumen beliebiger Dimensionen (sofern der Definitionsbereich der zweiten Abbildung im Bildraum der ersten Abbildung enthalten ist). Der Beweis ist ganz analog.

Weges in U liegt, können wir die kombinierte Abbildung: $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten, also die Funktion $f(\boldsymbol{x}(t))$. Bei dieser Funktion handelt es sich um eine gewöhnliche Funktion von einem Parameter t.

Diese Funktion können wir nach der Kettenregel ableiten und erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_{i}} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)} \frac{\mathrm{d}x_{i}(t)}{\mathrm{d}t} = \langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{v}(t) \rangle = g(\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{v}(t)) \,. \tag{4.15}$$

Ganz rechts steht das Skalarprodukt des Gradienten von f an der Stelle $\boldsymbol{x}(t)$ mit dem "Geschwindigkeitsvektor" $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$.

Dieser Ausdruck entspricht in seiner Bedeutung Gleichung 4.6, allerdings wurde der Vektor \boldsymbol{h} hier mit $\boldsymbol{v}(t)$ bezeichnet. Die "Geschwindigkeit" $\boldsymbol{v}(t)$ kennzeichnet somit die Richtung, in welche die Ableitung von f vorgenommen wird.

4.2 Allgemeine Ableitung

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es handelt sich also um eine *m*komponentige Funktion von *n* Variablen. Dieser Fall bringt nichts Neues, da wir jede Komponente von *f* als eine reellwertige Funktion im Sinne des letzten Abschnitts betrachten können. (In diesem Abschnitt verwende ich keine Fettschreibweise für Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ oder $f(x) \in \mathbb{R}^m$ mehr; speziell für Vektoren im \mathbb{R}^3 schreibe ich meist \vec{x} .)

Auch hier bietet sich jedoch die koordinaten- bzw. basis
unabhängige Definition der Ableitung als "beste lineare Näherung" an. Für eine beliebige Nullfolge von n-komponentigen Vektoren h sei

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + o(||h||).$$
(4.16)

Nun ist Df(x) eine lineare Abbildung, $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die einen Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ auf einen Vektor $Df(x)(h) \in \mathbb{R}^m$ abbildet. In der Standardbasis ist Df(x) eine $m \times n$ -Matrix mit den Komponenten $\partial f_j(x)/\partial x_i$. Man bezeichnet diese Matrix auch als *Jacobi-Matrix* der Abbildung f (benannt nach Carl Gustav Jacobi (1804–1851)).

Typische Beispiele in der Physik sind vektorwertige Felder, beispielsweise das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ oder das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$.

Im Prinzip lässt sich jede Feldkomponente nach jeder Ortskomponente ableiten, man erhält so die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x_1} & \frac{\partial E_1}{\partial x_2} & \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} & \frac{\partial E_2}{\partial x_2} & \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x_1} & \frac{\partial E_3}{\partial x_2} & \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} & \frac{\partial B_1}{\partial x_2} & \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} & \frac{\partial B_2}{\partial x_2} & \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_3}{\partial x_1} & \frac{\partial B_3}{\partial x_2} & \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad .$$
(4.17)

4.2.1 Divergenz und Rotation

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, lassen sich die ersten Ableitungen eines Vektorfeldes nach den Komponenten im Urbildraum in Form einer Matrix schreiben. Einige spezielle Kombinationen dieser Ableitungen spielen jedoch eine besondere Rolle, dazu zählen insbesondere die Divergenz und die Rotation.

Ich definiere in diesem Abschnitt die Divergenz und die Rotation durch die Komponten der Ableitungen in einem kartesischen Koordinatensystem. Später werde ich eine allgemeinere Definition angeben, die eine koordinatenunabhängige Definition von Divergenz und Rotation ermöglicht.
4.3. HÖHERE ABLEITUNGEN

Die *Divergenz* [divergence] eines Vektorfeldes $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ich spezifiziere im Folgenden nicht immer, ob die Urbildmenge der ganze \mathbb{R}^3 oder nur eine offene Teilmenge davon ist) ist:

div
$$\vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x_i}.$$
 (4.18)

Man beachte, dass das Ergebnis eine skalare Funktion ist, d.h., jedem Punkt im \mathbb{R}^3 wird eine Zahl zugewiesen. Oftmals vereinfacht man in der Physik noch die Notation der partiellen Ableitung und schreibt einfacher:

$$\partial_i E_j := \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \,. \tag{4.19}$$

Damit lässt sich die Divergenz auch schreiben als

$$\operatorname{div}\vec{E} = \sum_{i} \partial_{i}E_{i} \,. \tag{4.20}$$

Entsprechend definieren wir die *Rotation* [rotation] eines Vektorfeldes $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als den Vektor:

$$\operatorname{rot} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$
(4.21)

Mit dem in Abschnitt 2.2 definierten Levi-Civita-Symbol können wir auch schreiben:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \,\partial_j E_k \,. \tag{4.22}$$

Die hier definierte Rotation lässt sich nur für Vektorfelder angeben und das Ergebnis ist wieder ein Vektorfeld.

4.3 Höhere Ableitungen

Wenn die erste Ableitung einer Funktion selbst wieder stetig ist, können wir die zweite Ableitung als die Ableitung der ersten Ableitung definieren:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \,. \tag{4.23}$$

Dafür schreibt man auch $f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

Ist die physikalische Interpretation des Arguments der Funktion f die Zeit t, so schreibt man für die Ableitung oft:

$$\dot{f}(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \,. \tag{4.24}$$

Entsprechend ist die zweite Ableitung $\ddot{f}(t)$. Aus der Geschwindigkeit eines Teilchens $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ erhält man durch eine erneute Ableitung nach der Zeit die Beschleunigung [acceleration]:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$
 (4.25)

Auch hier verwendet man oft die Notation $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$.

Für die dritte Ableitung $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ einer Funktion schreibt man manchmal auch f'''(x). Die höheren Ableitungen schreibt man gelegentlich durch einen in Klammern gesetzten Hochindex n:

$$f^{(n)}(x) := \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} \,. \tag{4.26}$$

Bei Funktionen von mehreren Argumenten, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kann man die höheren Ableitungen nach verschiedenen Argumenten bilden. Für die zweiten Ableitungen erhält man auf diese Weise eine Matrix von Ableitungen, die man auch als *Hesse-Matrix* [hessian] bezeichnet:

$$H(f)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \, \partial x_j} \tag{4.27}$$

bzw.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$
(4.28)

Sofern die zweiten Ableitungen existieren und stetig sind, spielt die Reihenfolge der Ableitung keine Rolle, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}.$$
(4.29)

Dies bezeichnet man manchmal auch als den *Satz von Schwarz*. Damit diese Eigenschaft erfüllt ist, darf die Reihenfolge, in der die Grenzwerte gebildet werden, keine Rolle spielen:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{h_i \to 0} \left[\lim_{h_j \to 0} \left(\frac{f(\dots, x_i + h_i, \dots, x_j + h_j, \dots) - f(\dots, x_i + h_i, \dots, x_j, \dots)}{h_i h_j} \right) - \lim_{h_j \to 0} \left(\frac{f(\dots, x_i, \dots, x_j + h_j, \dots) - f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)}{h_i h_j} \right) \right]$$

$$= \lim_{h_j \to 0} \left[\lim_{h_i \to 0} \left(\frac{f(\dots, x_i + h_i, \dots, x_j + h_j, \dots) - f(\dots, x_i, \dots, x_j + h_j, \dots)}{h_i h_j} \right) - \lim_{h_i \to 0} \left(\frac{f(\dots, x_i + h_i, \dots, x_j, \dots) - f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)}{h_i h_j} \right) \right].$$

$$(4.30)$$

Genau das ist aber der Fall, wenn die zweiten Ableitungen existieren und stetig sind.

Dieses Ergebnis überträgt sich entsprechend auch auf die höheren Ableitungen: Sind alle Ableitungen einer Funktion f mindestens k-mal stetig differenzierbar, spielt die Reihenfolge, in der die k Ableitungen ausgeführt werden, keine Rolle.

4.3.1 Extrempunkte und stationäre Punkte

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt x_0 heißt: lokales Maximum von f, wenn es eine Umgebung V von x_0 gibt, sodass $f(x_0) - f(x) > 0$ für alle $x \in V$. Ein Punkt x_0 heißt globales Maximum in U, wenn für alle $x \in U$ gilt: $f(x_0) - f(x) > 0$. Entsprechend heißt ein Punkt x_0 lokales Minimum von f, wenn es eine Umgebung V von x_0 gibt, sodass $f(x_0) - f(x) < 0$ für alle $x \in V$. Und ein Punkt x_0 heißt globales Minimum in U, wenn für alle $x \in U$ gilt: $f(x_0) - f(x) < 0$.

- 1. lokales Minimum [local minimum (point)]: Es gibt eine (offene) Umgebung X von x_0 , sodass für alle $x \in X$ gilt $f(x_0) \leq f(x)$.
- 2. globales Minimum [global minimum (point)]: Es gilt für alle $x \in U$: $f(x_0) \leq f(x)$.
- 3. lokales Maximum [local maximum (point)]: Es gibt eine Umgebung X von x_0 , sodass für alle $x \in X$ gilt $f(x_0) \ge f(x)$.
- 4. globales Maximum [global maximum (point)]: Es gilt für alle $x \in U$: $f(x_0) \ge f(x)$.



Abbildung 4.1: Bei x = a, c liegen lokale Minima vor, ein globales Minimum ist nur bei x = a. Bei x = b befindet sich ein lokales Maximum. Ein globales Maximum gibt es nicht.

Zusammenfassend bezeichnet man Punkte, bei denen eine Funktion ein (lokales oder globales) Minimum oder Maximum hat, als (lokale bzw. globale) *Extrempunkte* [*extremal points*].

Zur Existenz von Extrempunkten auf kompakten Mengen sollte der Satz von Weierstraß bekannt sein: Eine stetige Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ ist auf einem kompakten Gebiet $K \subset M$ immer beschränkt und nimmt dort immer ihr Maximum und ihr Minimum an. Zur Erinnerung: Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n heißt kompakt, wenn jede Folge in dieser Menge mindestens einen Häufungspunkt besitzt, bzw. wenn sie abgeschlossen (d.h. die Grenzwerte aller Folgen liegen in dieser Menge) und beschränkt ist (d.h., es gibt eine Kugel mit endlichem Radius, die diese Menge enthält).

Der Satz von Fermat besagt, dass für eine differenzierbare Funktion an einem lokalen Extrempunkt immer gilt $Df(x_0) = 0$, d.h., die erste Ableitung verschwindet. Bei einer Funktion über den reellen Zahlen bedeutet dies einfach $f'(x_0) = 0$, bei einer Funktion über dem \mathbb{R}^n heißt das $\nabla f(x_0) = 0$, also in Koordinaten $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=x_0} = 0 \quad \forall i$. Dieses Kriterium für einen Extrempunkt ist allerdings nur ein notwendiges Kriterium.

Bei Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (also Funktionen über den reellen Zahlen) kann man auch die hinreichenden Bedingungen leicht charakterisieren, sofern die höheren Ableitungen der Funktion existieren:

- 1. Verschwinden die ersten n Ableitungen einer Funktion f and der Stelle x_0 und ist n ungerade und gilt für die n + 1-te Ableitung $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so liegt bei x_0 ein lokales Maximum vor. Ist $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
- 2. Verschwinden die ersten n Ableitungen einer Funktion f an der Stelle x_0 und ist n gerade und gilt für die n + 1-te Ableitung $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, dann hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt [inflection point].

Verschwindet der Gradient einer Funktion über dem \mathbb{R}^n , so spricht man allgemein von einem stationären Punkt [stationary point]. Hier kann ein Maximum (oder Hochpunkt) oder auch ein Minimum (Tiefpunkt) vorliegen, es kann sich aber auch um einen (verallgemeinerten) Sattelpunkt [saddle *point*] handeln.² Zur Charakterisierung eines solchen Punktes benötigt man die Matrix der zweiten Ableitungen, also die Hesse-Matrix.

Für zweimal stetig ableitbare Funktionen ist die Hesse-Matrix symmetrisch. Wir benötigen nun einen Satz, der in Abschnitt 2.3 bewiesen wurde: Eine selbst-adjungierte $n \times n$ -Matrix H (beim kanonischen Skalarprodukt in reellen Vektorräumen sind dies genau die symmetrischen Matrizen) erlaubt die Definition von n orthonormalen Vektoren f_i (i = 1, ..., n), sodass $Hf_i = \lambda_i f_i$ ist. Die Vektoren f_i bilden einen Satz von orthogonalen Eigenvektoren und charakterisieren die sogenannten Hauptachsen. Die Zahlen λ_i sind reell und heißen die Eigenwerte von H.

Diesen Satz können wir auf die Hesse-Matrix einer zweimal stetig ableitbaren Funktion anwenden. Falls alle Eigenwerte der Hesse-Matrix einer Funktion f, für die $\nabla f(x_0) = 0$ ist, an einer Stelle x_0 positiv sind, handelt es sich um ein lokales Minimum von f. Sind alle Eigenwerte an dieser Stelle negativ, handelt es sich um ein lokales Maximum von f. Andernfalls spricht man von einem Sattelpunkt (d.h., in manche Richtungen nimmt die Funktion zu, in andere Richtungen ab). Verschwinden Eigenwerte der Hesse-Matrix, so muss man entlang der zugehörigen Hauptachsen die höheren Ableitungen untersuchen.

4.3.2 Laplace- und d'Alembert-Operator

Ein besonderer Ableitungsoperator, der die zweiten Ableitungen einer Funktion von mehreren Argumenten enthält, ist der *Laplace-Operator* [*laplacian*]:

$$\Delta f(x) = \sum_{i} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}.$$
(4.32)

Besonders wichtig ist der Laplace-Operator für die drei Raumkoordinaten, wenn wir Felder über dem dreidimensionalen Raum betrachten:

$$\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_3^2} \,. \tag{4.33}$$

Hat das Feld mehrere Komponten (beispielsweise das elektrische oder magnetische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ bzw $\vec{B}(\vec{x})$), wirken die Ableitungen auf jede Komponente des Feldes getrennt, das Ergebnis ist also wieder ein entsprechend mehrkomponentiges Feld.

Man beachte, dass diese Definition zunächst nur für orthonormale (kartesische) Koordinaten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ gilt. Wir werden später sehen, wie diese Ableitungsoperatoren in anderen Koordinaten aussehen.

Ebenfalls ein wichtiger Ableitungsoperator in der Physik ist der Wellenoperator [wave operator] oder d'Alembert-Operator [d'Alembertian, d'Alembert operator], der beispielsweise in der Theorie des Elektromagnetismus oder auch der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie auftritt. Bei ihm tritt noch die zweite Ableitung nach der Zeit auf, allerdings sind die Vorzeichen zu den räumlichen Ableitungen entgegengesetzt:

$$\Box f(\vec{x},t) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)f(\vec{x},t)$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\vec{x},t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(\vec{x},t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f(\vec{x},t)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f(\vec{x},t)}{\partial x_3^2}.$$

$$(4.34)$$

²In der Schule versteht man unter einem Sattelpunkt meist einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Allgemeiner ist ein Sattelpunkt ein stationärer Punkt - der Gradient verschwindet -, bei dem eine Funktion in manche Richtungen zunimmt und in andere Richtungen abnimmt.

4.3.3 Ableitungsidentitäten

Die Rotation lässt sich nur auf Vektorfelder anwenden. Da der Gradient eines skalaren Feldes $\Phi(\vec{x})$ jedoch ein Vektorfeld ist, können wir die Rotation eines Gradientenfeldes bestimmen. Wir erhalten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) = 0. \tag{4.35}$$

Beweis: Wir berechnen die i-te Komponente der Rotation des Gradientenfeldes

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}))_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi(\vec{x}) = 0.$$
(4.36)

Der Grund für das Verschwinden der rechten Seite liegt darin, dass $\partial_j \partial_k$ symmetrisch in den Indizes jund k ist (dieses Argument setzt voraus, dass die Funktion $\Phi(\vec{x})$ mindestens zweimal stetig nach ihren Argumenten differenzierbar ist), wohingegen der ϵ -Tensor total antisymmetrisch ist. Die einzelnen Terme heben sich also paarweise weg.

Aus demselben Grund verschwindet auch die Divergenz einer Rotation:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = 0. \tag{4.37}$$

Beweis:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = \sum_{ijk} \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(\vec{x}) = 0.$$
(4.38)

Für die Rotation einer Rotation erhalten wir:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right) - \Delta \vec{A} \,. \tag{4.39}$$

Für den Beweis benötigen wir die folgende Identität für das Produkt zweier ϵ -Tensoren:³

$$\sum_{k} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \,. \tag{4.40}$$

Zum Beweis von Gl. 4.39 berechnen wir wieder die *i*-te Komponente der Rotation der Rotation (das Argument \vec{x} lasse ich der Einfachheit halber weg):

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k \\ &= \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\ &= \sum_{jlm} \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) \partial_j \partial_l A_m \\ &= \sum_j \left(\partial_j \partial_i A_j - \partial_j \partial_j A_i \right). \end{aligned}$$

Der erste Term entspricht dem Gradienten der Divergenz und der zweite Term dem Laplace-Operator angewandt auf die *i*-te Komponente von \vec{A} .

4.4 Die Taylor-Entwicklung

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf reellwertige Funktionen über \mathbb{R} . Sie gelten aber mit entsprechenden Verallgemeinerungen auch für mehrkomponentige Funktionen über dem \mathbb{R}^n .

³Diese Identität folgt aus der sogenannten Graßmann-Identität für beliebige drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (siehe Anhang A1.1).

Ist eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in ihrem Definitionsbereich k-mal stetig ableitbar, können wir die Funktion in einer Umgebung eines Punktes x durch ein Polynom approximieren:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k + o(h^k)$$
(4.41)

(der Restterm verschwindet für $h \to 0$ also schneller als die Funktion h^k). Diese Reihe bezeichnet man auch als *Taylor-Reihe* [*Taylor series*] oder *Taylor-Entwicklung* [*Taylor expansion*] (nach dem englischen Mathematiker Brook Taylor (1685–1731)).

Zum Beweis benötigt man ein Zwischenergebnis: Wenn zwei Funktionen f(x) und g(x) an einer Stelle x_0 zusammen mit ihren ersten k Ableitungen übereinstimmen, also

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \quad \forall \ 0 \le n \le k \,.$$
(4.42)

gilt:

$$f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = o(h^k).$$
(4.43)

Im nächsten Schritt zeigt man, dass das Polynom auf der rechten Seite von Gl. 4.41 bis zur Ordnung k dieselben Ableitungen nach h hat, wie die Funktion f(x + h) (aufgefasst als eine Funktion von h bei festgehaltenem Wert x).

In vielen Fällen sind Funktionen in der Physik unendlich oft stetig differenzierbar, dann gilt:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k} h^k + R(h), \qquad (4.44)$$

wobei der Restterm R(h) schneller als jede Potenz von h verschwindet, also

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h^n} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \,. \tag{4.45}$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite von Gl. 4.44 bezeichnet man manchmal auch als die *Maclaurin-Reihe* [*Maclaurin series*] der Funktion f(x), benannt nach dem schottischen Mathematiker Colin Maclaurin (1698–1746).

Dass die genannten Restterme manchmal notwendig sind, zeigt folgendes Beispiel: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0\\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
(4.46)

hat die Eigenschaft, dass sämtliche Ableitungen an der Stelle x = 0 verschwinden. Die Taylor- bzw. Maclaurin-Entwicklung dieser Funktion um den Punkt x = 0 ist also das Polynom P(x) = 0; sie verschwindet also identisch. Trotzdem ist die Funktion außer bei x = 0 von null verschieden. Die Korrekturterme sind jedoch im Grenzfall $x \to 0$ kleiner als jede Potenz in x und tragen daher zu einer Potenzreihenentwicklung nicht bei.

Ist eine Funktion in ihrem Definitionsbereich gleich ihrer Taylor-Entwicklung, verschwindet also der Restterm, bezeichnet man sie als *reell-analytisch* [*real analytic*]. Die meisten Funktionen, die in der Physik von Bedeutung sind, haben diese Eigenschaft.

4.4.1 Der Satz von L'Hospital

Betrachtet man den Quotienten von zwei Funktionen, q(x) = f(x)/g(x), an einer Stelle x_0 , an der sowohl die Funktion im Nenner wie auch die Funktion im Zähler eine Nullstelle haben, also $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so ist dieser Quotient dort zunächst nicht definiert. Man kann aber untersuchen, ob sich die Funktion q(x) an dieser Stelle stetig fortsetzen lässt, d.h., ob es einen Wert $q(x_0)$ gibt, sodass die Funktion

$$q(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & x \neq x_0 \\ q(x_0) & x = 0 \end{cases}$$
(4.47)

(hier wurde angenommen, dass g(x) außer x_0 keine weiteren Nullstellen hat) stetig ist. Wenn sowohl f(x) als auch g(x) eine Taylor-Entwicklung um den Punkt x_0 zulassen, können wir diese Taylor-Entwicklung im Zähler und Nenner einsetzen und q(x) in der Umgebung von x_0 betrachten:

$$q(x_0+h) = \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3...}{g(x_0) + g'(x_0)h + \frac{1}{2}g''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^3...}$$
(4.48)

Da $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gelten soll, folgt:

$$q(x_0+h) = \frac{f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3...}{g'(x_0)h + \frac{1}{2}g''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^3...}$$
(4.49)

$$= \frac{h(f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^2...)}{h(g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)h + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^2...)}$$
(4.50)

$$= \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^2...}{g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)h + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^2...}$$
(4.51)

Sofern $g'(x_0) \neq 0$, existiert diese Funktion bei x_0 und hat den Wert

$$q(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$
(4.52)

Es kann vorkommen, dass auch die beiden ersten Ableitungen der Funktionen f und g an der Stelle x_0 verschwinden, dann kann man das Verfahren einen Schritt weiter führen:

$$q(x_0+h) = \frac{\frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3...}{\frac{1}{2}g''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^3...}$$
(4.53)

$$= \frac{\frac{1}{2}h^2(f''(x_0) + \frac{1}{2!}f'''(x_0)h...)}{\frac{1}{2}h^2(g''(x_0) + \frac{1}{2!}g'''(x_0)h...)}$$
(4.54)

$$= \frac{f''(x_0) + \frac{1}{2!} f'''(x_0) h...}{g''(x_0) + \frac{1}{2!} g'''(x_0) h...}$$
(4.55)

Falls also $g(x_0) = f(x_0) = 0$ und $g'(x_0) = f'(x_0) = 0$, folgt

$$q(x_0) = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}.$$
(4.56)

Dies führt uns zu dem Satz von L'Hopital (benannt nach dem Mathematiker Guillaume Francois Antoine, Marquis de L'Hospital (1661-1704)): Der Grenzwert für den Quotient zweier Funktionen, die beide an einer Stelle x_0 verschwinden und deren ersten n-1 Ableitungen ebenfalls an dieser Stelle verschwinden, ist durch

$$q(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)} \tag{4.57}$$

gegeben, wobei $f^{(n)}$ bzw. $g^{(n)}$ die *n*-te Ableitung von f bzw. g bezeichnen.

Ein Beispiel, das in der Physik gelegentlich auftritt, ist die Funktion

$$q(x) = \frac{\sin kx}{x} \quad (x \neq 0) \tag{4.58}$$

mit

$$q(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k.$$
(4.59)

4.4.2 Einige spezielle Funktionen

Als abschließende Anwendung der Inhalte dieses Kapitels betrachten wir nochmals die Exponentialfunktion sowie die Sinus- und Kosinus-Funktionen.

Wir hatten für die Exponentialfunktion die Reihenentwicklung

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.60}$$

angegeben. Bilden wir die Ableitung dieser Reihe, so erhalten wir sofort:

$$\frac{\mathrm{d}\exp(x)}{\mathrm{d}x} = \exp(x)\,.\tag{4.61}$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist also wieder gleich der Exponentialfunktion. Verlangt man umgekehrt, dass die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ergeben soll und dass $\exp(0) = 1$ ist, ergibt sich die Reihe 4.60 als die Taylor-Entwicklung dieser Funktion.

Aus den Ableitungsregeln für den Sinus und Kosinus,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x) \qquad \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x), \qquad (4.62)$$

sowie den speziellen Werten $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$ folgen die Taylor-Entwicklungen dieser Funktionen um den Punkt x = 0:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
(4.63)

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} .$$
(4.64)

Dass die Taylor-Entwicklungen dieser Funktionen keinen Restterm haben, muss allerdings erst bewiesen werden. Der einfachere Weg, die Äquivalenz von trigonometrischer Definition und Reihenentwicklung zu zeigen, erfolgt über die Ableitungen. Sowohl aus der Trigonometrie als auch aus der Reihenentwicklung folgen nämlich die Beziehungen

$$\frac{d^2 \sin(x)}{dx^2} = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \cos(x)}{dx^2} = -\cos(x).$$
(4.65)

Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
(4.66)

lässt sich ebenfalls über die Taylor-Entwicklung ableiten (wenn man einen komplizierten Beweis möchte). Sehr hilfreich sind auch oft die folgenden Entwicklungen:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$$
(4.67)

und

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \,. \tag{4.68}$$

Für x=1erhalten wir die alternierende harmonische Reihe und damit die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2.$$
(4.69)

Kapitel 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung [differential equation] ist eine Gleichung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen, die an jedem Punkt des Definitionsbereichs erfüllt sein soll. Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung [ordinary differential equation] hängt die Funktion nur von einem Argument $t \in \mathbb{R}$ ab (in der Physik handelt es sich dabei oft um die Zeit). Bei einer partiellen Differentialgleichung [partial differential equation] kann die gesuchte Funktion von mehreren Argumenten abhängen und dementsprechend handelt es sich um eine Beziehung zwischen der Funktion und ihren partiellen Ableitungen. In diesem Kapitel geht es nur um gewöhnliche Differentialgleichungen; partielle Differentialgleichungen werden in der Physik meist im Rahmen der Elektrodynamik sowie der Quantenmechanik behandelt. Den Grad der höchsten Ableitung, die in der Gleichung auftritt, bezeichnet man als die Ordnung [order] der Gleichung.

Die Newton'schen [Newton's equations of motion] Bewegungsgleichungen (für ein einzelnes Teilchen der Masse m) haben die Form

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{x}(t), \vec{v}(t), t), \qquad (5.1)$$

wobei $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ die Kraft bezeichnet, die zum Zeitpunkt t auf ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t)$ am Ort \vec{x} wirkt. Diese Kraft bezeichnet im Allgemeinen ein Feld für alle Orte und Geschwindigkeiten, in vielen Fällen hängt sie jedoch nur vom Ort ab (die Lorentz-Kraft ist ein Beispiel für eine geschwindigkeitsabhängige Kraft). Die gesuchte Bahnkurve $\vec{x}(t)$ sollte dann die obige Differentialgleichung zu jedem Zeitpunkt t erfüllen. Bei der Newton'schen Bewegungsgleichung handelt es sich somit um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Da es sich bei der Bahnkurve $\vec{x}(t)$ eigentlich um drei Funktionen handelt (die drei Komponenten $x_i(t)$) und die Kraft für jede dieser Komponenten von den anderen Komponenten abhängen kann, spricht man auch von einem gekoppelten System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Man beachte, dass sich bei Differentialgleichungen die Beziehungen zwischen der Funktion und ihren Ableitungen immer auf denselben Ort bzw. denselben Zeitpunkt beziehen und an jedem Ort bzw. Zeitpunkt gelten müssen. Dies drückt für physikalische Systeme eine *lokale Kausalität* [*local causality*] aus: Ereignisse an einem Ort zu einem bestimmten Zeitpunkt beeinflussen nur Ereignisse in unmittelbarer Umgebung und in unmittelbarer Zeitnähe weitere Ereignisse. In der Physik gibt es (vermutlich) keine nachweisbaren *Fernwirkungen* [*action at a distance*], weder räumlich noch zeitlich. Modelle, welche solche Beziehungen beschreiben, sind meist phänomenologischer Natur und vernachlässigen die Mechanismen der Wirkungsübertragung.

5.1 Zwei Beispiele

Ich beginne dieses Kapitel mit zwei Beispielen für Differentialgleichungen, bei denen die Lösungen schon bekannt sind bzw. leicht "erraten" werden können. Die an den Beispielen gewonnenen Erkenntnisse können wir später entsprechend verallgemeinern.

5.1.1 Die Zerfalls- bzw. Wachstumsgleichung

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \,. \tag{5.2}$$

Die Ableitung der Funktion (zum Zeitpunkt t) ist also proportional zu der Funktion selbst (zum selben Zeitpunkt).

Für $\lambda > 0$ hat die Ableitung dasselbe Vorzeichen wie die Funktion, d.h., ist die Funktion positiv, ist auch die Ableitung positiv und die Funktion wird noch größer. Ist die Funktion negativ, gilt dies auch für die Ableitung; die Funktion bleibt negativ, ihr Betrag nimmt aber zu. Für positive Werte von λ beschreibt die Differentialgleichung exponentielles Wachstum. Entsprechend beschreibt die Gleichung für $\lambda < 0$ den exponentiellen Zerfall.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist schon bekannt:

=

$$x(t) = A \exp(\lambda t) \,. \tag{5.3}$$

A ist eine Konstante, die durch die Differentialgleichung nicht festgelegt ist. Man bezeichnet eine solche Konstante als Integrationskonstante [integration constant]. Sie wird erst durch eine Bedingung an die Lösung festgelegt, beispielsweise die Anfangsbedingung [initial condition] x(0). Im vorliegenden Fall gilt

$$x(t) = x(0)\exp(\lambda t).$$
(5.4)

Im Hinblick auf die spätere Diskussion zur Existenz und Eindeutigkeit von Differentialgleichungen soll hier ein konstruktives Verfahren zur Lösung der Gleichung gezeigt werden. Dieses Verfahren bezeichnet man allgemein als *Verfahren von Picard und Lindelöf*. Dazu integrieren wir beide Seiten der Differentialgleichung:

$$\int_0^t \dot{x}(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \lambda \int_0^t x(\tau) \,\mathrm{d}\tau \tag{5.5}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) - x(0) = \lambda \int_0^t x(\tau) \,\mathrm{d}\tau \,, \tag{5.6}$$

oder

$$x(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x(\tau) \,\mathrm{d}\tau \,.$$
 (5.7)

Die offene Integrationskonstante wurde hier durch die Anfangsbedingung festgelegt, denn zum Zeitpunkt t = 0 verschwindet das Integral auf der rechten Seite. Allgemeiner hätte man auch

$$x(t) = x(t_0) + \lambda \int_{t_0}^t x(\tau) \,\mathrm{d}\tau$$
(5.8)

schreiben können.

Gleichung 5.7 bezeichnet man als Integralgleichung [*integral equation*]. Allgemein drückt eine Integralgleichung eine Beziehung zwischen dem Wert einer Funktion und einem Integral über diese Funktion (sowie eventuell Ableitungen dieser Funktion) aus. Hier ist sie äquivalent zur Differentialgleichung, enthält aber zusätzlich noch die Information zu der gewählten Anfangsbedingung.

5.1. ZWEI BEISPIELE

Wir ersetzen nun die Integralgleichung durch eine iterative Gleichung [iterative equation]:

$$x_{n+1}(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau \,.$$
(5.9)

Die Idee ist, mit dieser iterativen Gleichung eine Folge von Funktionen $x_n(t)$ zu konstruieren, die gegen die gesuchte Lösung der Integralgleichung konvergiert.

Als Startfunktion setzen wir $x_0(t) = x(0)$. (Wir hätten auch mit der Funktion $x_0(t) = 0$ beginnen können, dann wäre $x_1(t) = x(0)$; die Folge wäre somit dieselbe, nur der Index wäre um 1 verschoben.) Es folgt

$$x_1(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x(0) \,\mathrm{d}\tau = x(0) + \lambda x(0)t \,, \tag{5.10}$$

und

$$x_2(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x_1(\tau) \,\mathrm{d}\tau = x(0) + \lambda x(0)t + \frac{1}{2}\lambda^2 x(0)t^2 \,.$$
(5.11)

Man kann nun leicht zeigen (beispielsweise durch vollständige Induktion), dass

$$x_n(t) = x(0) \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} \,.$$
(5.12)

Offenbar ist

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t) = x(0) \exp(\lambda t).$$
(5.13)

5.1.2 Der harmonische Oszillator

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \,. \tag{5.14}$$

Es handelt sich um die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators.

Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind die Sinusfunktion $sin(\omega t)$ und die Kosinusfunktion $cos(\omega t)$. Die allgemeine Lösung ist eine beliebige Linearkombination dieser beiden speziellen Lösungen:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t.$$
(5.15)

Wir können dies als Überlagerung von zwei Schwingungen (mit Phasenunterschied $\pi/2$) mit den Amplituden *a* und *b* deuten. Wir können die allgemeine Lösung aber auch in der Form

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{5.16}$$

schreiben, wobei A nun die Interpretation der Amplitude hat und φ_0 die Phase zum Zeitpunkt t = 0 ist. Den Bezug zwischen beiden Lösungen sieht man, wenn man das Additionstheorem für die Kosinus-Funktion ausnutzt:

$$x(t) = A(\cos \omega t \cdot \cos \varphi_0 - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_0).$$
(5.17)

Es gilt also $a = A \cos \varphi_0$ und $b = -A \sin \varphi_0$.

Wir können die Integrationskonstanten auch durch Anfangsbedingungen ersetzen, beispielsweise indem wir zum Zeitpunkt t = 0 die Anfangslage x(0) und die Anfangsgeschwindigkeit v(0)festlegen. Offenbar folgt aus Gl. 5.15:

$$x(0) = a$$
 und $\dot{x}(0) = v(0) = \omega b$ (5.18)

und damit

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t.$$
(5.19)

(Diese Gleichung hat unter anderem auch den Vorteil, dass wir in sinnvoller Weise den Grenzwert $\omega \to 0$ untersuchen können und zur Lösung der freien Bewegung x(t) = x(0) + v(0)t gelangen.)

Es erhebt sich die Frage, ob wir ähnlich wie im letzten Abschnitt eine Lösung explizit über eine Integralgleichung konstruieren können. Dazu formen wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung zunächst in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung um:

$$\dot{x}(t) = v(t)$$
 $\dot{v}(t) = -\omega^2 x(t)$. (5.20)

Die linke Gleichung ist einfach die Definition der Geschwindigkeit und die rechte Gleichung beinhaltet die eigentliche Differentialgleichung, nämlich dass die Ableitung der Geschwindigkeit (die Beschleunigung) gleich $-\omega^2 x$ ist.

Wir integrieren beide Gleichungen und erhalten:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau) \,\mathrm{d}\tau \qquad v(t) = v(0) - \omega^2 \int_0^t x(\tau) \,\mathrm{d}\tau \,. \tag{5.21}$$

Nun ersetzen wir diese beiden gekoppelten Integralgleichungen wieder durch iterative Gleichungen:

$$x_{n+1}(t) = x(0) + \int_0^t v_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau \qquad v_{n+1}(t) = v(0) - \omega^2 \int_0^t x_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau \,. \tag{5.22}$$

 mit

$$x_0(t) = x(0)$$
 und $v_0(t) = v(0)$. (5.23)

Die ersten beiden Iterationen liefern:

$$x_{1}(t) = x(0) + v(0)t v_{1}(t) = v(0) - \omega^{2}x(0)t (5.24)$$

$$x_{2}(t) = x(0) + v(0)t - \frac{1}{2}\omega^{2}x(0)t^{2} v_{2}(t) = v(0) - \omega^{2}x(0)t - \frac{1}{2}\omega^{2}v(0)t^{2}$$

und allgemein erhält man (hier sind nur die Lösungen für gerade Schritte angegeben, entsprechende Lösungen erhält man auch für ungerade Schritte):

$$x_{2n}(t) = x(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\omega t)^{2k} + \frac{v(0)}{\omega} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\omega t)^{2k+1}$$
(5.25)

$$v_{2n}(t) = v(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\omega t)^{2k} - \omega x(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\omega t)^{2k+1}.$$
 (5.26)

Im Grenzfall $n \to \infty$ konvergieren diese Folgen gleichmäßig gegen die schon bekannten Lösungen:

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t$$
(5.27)

$$v(t) = v(0)\cos\omega t - \omega x(0)\sin\omega t.$$
(5.28)

Abschließend möchte ich noch anmerken, dass man die Lösung für x(t) auch dadurch erhält, dass man die Differentialgleichung 5.14 zweimal integriert,

$$\dot{x}(t) = v(0) - \omega^2 \int_0^t x(t') dt'$$
(5.29)

$$x(t) = x(0) + v(0)t - \omega^2 \int_0^t \left(\int_0^{t'} x(\tau) \,\mathrm{d}\tau \right) \,\mathrm{d}t', \qquad (5.30)$$

5.2. DAS VERFAHREN VON PICARD UND LINDELÖF

und nun zu einer Iterationsgleichung übergeht:

$$x_{n+1}(t) = x(0) + v(0)t - \omega^2 \int_0^t \left(\int_0^{t'} x_n(\tau) \,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t' \,.$$
 (5.31)

Auch hier kann man mit $x_0(t) \equiv 0$ beginnen und erhält im ersten Schritt $x_1(t) = x(0) + v(0)t$. Für $x_2(t)$ folgt nun:

$$x_2(t) = x(0) + v(0)t - \omega^2 \int_0^t \left(\int_0^{t'} (x(0) + v(0)\tau \,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t'$$
(5.32)

$$= x(0) + v(0)t - \omega^2 \int_0^t \left(x(0)t' + \frac{1}{2}v(0)t'^2 \right) dt'$$
(5.33)

$$= x(0) + v(0)t - \omega^2 \left(\frac{1}{2}x(0)t^2 + \frac{1}{3!}v(0)t^3\right)$$
(5.34)

$$= x(0)\left(1 - \frac{1}{2}\omega^{2}t^{2}\right) + v(0)\left(t - \frac{1}{3!}\omega^{2}t^{3}\right)$$
(5.35)

$$= x(0)\left(1 - \frac{1}{2}\omega^{2}t^{2}\right) + \frac{v(0)}{\omega}\left(\omega t - \frac{1}{3!}\omega^{3}t^{3}\right)$$
(5.36)

Man erkennt nun an den beiden Ausdrücken in Klammern die ersten Terme der Reihenentwicklung der Kosinus- und der Sinus-Funktion. In *n*-ter Ordnung findet man (Beweis z.B. durch vollständige Induktion)

$$x_n(t) = x(0) \left(\sum_{n=0}^n \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\omega t)^{2n} \right) + \frac{v(0)}{\omega} \left(\sum_{n=0}^n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\omega t)^{2n+1} \right)$$
(5.37)

und damit im Grenzfall $n \to \infty$ das bekannte Ergebnis

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t.$$
(5.38)

Das Verfahren führt sogar schneller zum Ziel.

5.2 Das Verfahren von Picard und Lindelöf

Typischerweise hat eine gewöhnliche Differentialgleichung die Form

$$f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), ...) = 0.$$
(5.39)

Es handelt sich also um eine Beziehung zwischen einer Funktion x(t) und ihren Ableitungen $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots$ zu einem gegebenen Zeitpunkt t. Diese Beziehung soll für alle Zeitpunkte t (in einem vorgegebenen Definitionsbereich) erfüllt sein. Letztendlich handelt es sich also um unendlich viele Bedingungen (für jeden Zeitpunkt t eine) an eine Funktion x(t). Gesucht ist die Funktion x(t), die diese Bedingungen erfüllt.

Damit die Lösungen zu vorgegebenen Anfangsbedingungen existieren und eindeutig sind, verlangen wir für f meist Lipschitz-Stetigkeit (siehe Ende dieses Abschnitts). In der Physik setzen wir die notwendigen Stetigkeits- und Ableitbarkeitsbedingungen im Allgemeinen voraus, sodass ich diese im Folgenden nicht immer explizit erwähne. Wie ersichtlich, kann die Funktion f auch explizit von t abhängen (ausgedrückt durch das erste Argument). Falls f nicht explizit von t abhängt (sondern nur implizit über x(t) und seine Ableitungen), bezeichnet man die Differentialgleichung als *autonom* [*autonomous*]. In vielen Fällen kann man die Gleichung nach dem Term mit der höchsten Ableitung (im folgenden Beispiel die zweite Ableitung) auflösen:

$$\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)).$$
(5.40)

Wie schon erwähnt, sind Differentialgleichungen dieser Form typisch für Newton'sche Bewegungsgleichungen, die nach dem zweiten Netwon'schen Gesetz zum Ausdruck bringen, dass die Beschleunigung eines Teilchens proportional zur Kraft auf dieses Teilchen ist. Für die folgenden Überlegungen muss F(t, x, v) ebenfalls Lipschitz-stetig in seinen Argumenten sein. Ich beschränke mich im Folgenden im Wesentlichen auf die Behandlung von Differentialgleichungen (maximal) zweiter Ordnung, aber es sollte offensichtlich sein, wie sich die Überlegungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung verallgemeinern lassen.

In Gl. 5.40 kann x(t) beispielsweise auch für die drei Koordinaten eines Teilchens stehen oder auch für die Koordinaten von mehreren Teilchen, wobei die "Kraft" F nun entsprechend viele Komponenten hat:

$$\ddot{x}_i(t) = F_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots).$$
(5.41)

Ich verwende in diesem Kapitel weiterhin die "Vektornotation" $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ...), dh. x(t)$ kann für (endlich viele) Komponenten stehen.

Zunächst kann man jede Differentialgleichung höherer Ordnung durch einen Satz von Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen, indem man mehr Variable einführt. Beispielsweise ist Gl. 5.40 äquivalent zu folgenden zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = v(t) \tag{5.42}$$

$$\dot{v}(t) = F(t, x(t), v(t)).$$
 (5.43)

Da wir ohnehin mehrkomponentige Variable zulassen, reicht es somit, sich für die folgende Diskussion auf Gleichungen von dem Typ

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))$$
 (5.44)

zu beschränken. In obigem Fall (Gl. 5.42) steht x(t) eigentlich für (x(t), v(t)) und die zugehörigen Komponenten der "Kraft" sind $F_x(t, x, v) = v$ und $F_v(t, x, v) = F(t, x, v)$. (Man beachte, dass sowohl x(t) als auch v(t) selbst nochmals mehrere Komponenten haben können.)

Bei dem Verfahren von Picard-Lindelöf, das wir bei den Beispielen angewandt haben, wird dieser Satz von Differentialgleichungen in einen Satz von Integralgleichungen überführt, indem beide Seiten der Gleichungen integriert werden:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau, x(\tau)) \,\mathrm{d}\tau \,.$$
(5.45)

Die Werte $x(t_0)$ bezeichnen die Anfangsbedingungen der Lösung. Da es sich im Allgemeinen um mehrere gekoppelte Gleichungen handelt (x(t) kann mehrere Komponenten haben!), erhält man auch entsprechend viele Anfangsbedingungen. Ganz allgemein bezeichnet man den Raum der möglichen Anfangsbedingungen einer Differentialgleichung als *Phasenraum* [*phase space*].

Im nächsten Schritt des Picard-Lindelöf-Verfahrens werden diese Integralgleichungen durch iterative Gleichungen ersetzt:

$$x_{n+1}(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau, x_n(\tau)) \,\mathrm{d}\tau \,.$$
(5.46)

Als Startfunktion kann man wieder $x_0(t) = x(t_0)$ (eine von t unabhängige Konstante) wählen. (Dieses Verfahren, eine Differentialgleichung durch eine äquivalente Integralgleichung zu ersetzen und diese

dann interativ zu lösen, wird in der Physik sehr oft verwendet, wenn Gleichungen nicht exakt lösbar sind und eine sogenannte *Störungsreihe* oder Störungsentwicklung [*perturbation expansion*] konstruiert wird.)

In der Mathematik interessiert nun die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Differentialgleichungen. Der Satz von Picard und Lindelöf besagt, dass die angegebene Folge von stetigen Funktionen $x_n(t)$ zumindest in einem ausreichend kleinen Intervall um t_0 gleichförmig gegen einen Grenzwert konvergiert, und wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist diese Grenzwertfunktion wieder stetig. Genauer lautet die Aussage: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass in dem Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ die Folge $x_n(t)$ gleichmäßig konvergent ist. Zum Beweis (siehe z.B. [Hildebrandt 2006]) schreibt man

$$x_n(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \dots + (x_n(t) - x_{n-1}(t))$$
(5.47)

und beweist nun, dass für genügend kleine t gilt: $||x_n(t_0+t) - x_{n-1}(t_0+t)|| \le c|t|^n$ (für diesen Schritt benötigt man die Lipschitz-Stetigkeit von F). Dann kann man die Reihe durch eine geometrische Reihe abschätzen und hat die Konvergenz bewiesen. Daraus folgt auch die Existenz einer Lösung.

Für die Eindeutigkeit der Lösung benötigt man ebenfalls wieder die Lipschitz-Stetigkeit (ein ausführlicher Beweis findet sich in [Kuwert 2008a]). Man nimmt zunächst an, dass es zwei Lösungen x(t) und y(t) mit denselben Anfangsbedingungen gibt. Dann betrachtet man die Funktion u(t) =||x(t) - y(t)|| (für die u(0) = 0 gilt) und zeigt, dass $|\dot{u}(t)| \leq C ||u(t)||$ (mit einer Konstanten C). In einem nächsten Schritt zeigt man, dass die einzige Lösung zur Anfangsbedingung u(0) = 0 die Funktion u(t) = 0 ist und damit x(t) = y(t) gelten muss.

5.3 Lineare Differentialgleichungen

Eine spezielle und für die Physik besonders wichtige Klasse von Differentialgleichungen sind die sogenannten *linearen Differentialgleichungen* [*linear differential equations*]. Bei diesen treten die Funktion und ihre Ableitungen immer nur in der ersten Potenz (und niemals als Produkte voneinander) auf.

5.3.1 Allgemeine Eigenschaften

Auch wenn ich in dieser Vorlesung nur gewöhnliche Differentialgleichungen betrachte, gelten viele der folgenden Überlegungen auch für partielle Differentialgleichungen.

Eine lineare Differential
gleichung von der Ordnung \boldsymbol{n} hat die Form:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(t) x^{(k)}(t) = F(t) , \qquad (5.48)$$

wobei $x^{(k)}(t)$ die k-te Ableitung von x(t) nach ihrem Argument t bezeichnet und $x^{(0)}(t) = x(t)$ die Funktion selbst ist. Die Funktion F(t) beschreibt in der Physik meist eine äußere Kraft, "Störung" bzw. einen Quellterm des Systems.

Hängen die Koeffizientenfunktionen nicht explizit von t ab – gilt also $c_k(t) = c_k$ – handelt es sich wieder um eine autonome Differentialgleichung. Für $F(t) \equiv 0$ bezeichnet man die Differentialgleichung als homogen [homogeneous], andernfalls als inhomogen [inhomogeneous].

Lineare homogene Differentialgleichungen

Für lineare homogene Differentialgleichungen gilt das Superpositionsprinzip: Zu je zwei Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Differentialgleichung ist auch die Superposition $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ eine Lösung. Das erkennt man sofort, indem man diese Summe in die homogene Differentialgleichung einsetzt. Die Menge der Lösungen bildet also einen Vektorraum. Man bezeichnet einen Satz von Funktionen $y_k(x)$ $(1 \le k \le n)$ als *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k y_k(x) = 0 \tag{5.49}$$

für alle x im Definitionsbereich nur die Lösungen $a_k = 0$ (für alle k) zulässt.

Für eine lineare Differentialgleichung der Ordnung n gibt es genau n linear unabhängige Lösungen und die allgemeinste Lösung ist eine Linearkombination dieser linear unabhängigen Lösungen. Die Dimension des Vektorraums der Lösungen ist somit n. Die Koeffizienten sind die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung und können so bestimmt werden, dass beispielsweise die Anfangsbedingungen erfüllt werden. Als Anfangsbedingung kann man die Funktion x(t) zusammen mit ihren ersten n - 1 Ableitungen zu einem festen Zeitpunkt t_0 vorgeben. Der Raum dieser möglichen Anfangsbedingungen ist wieder der Phasenraum der Differentialgleichung.

Die beiden Beispiele zu Beginn dieses Kapitels waren von diesem Typ. Für die Gleichung des harmonischen Oszillators sind die Sinus- und die Kosinus-Funktion die beiden linear unabhängigen Lösungen und die allgemeinste Lösung ist die Superposition dieser beiden Funktionen (Gl. 5.15 bzw. 5.19).

Lineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Lösungen einer inhomogenen Gleichung bilden keinen Vektorraum. Allerdings gilt folgender Satz:

Sei $x_s(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und sei $x_0(t)$ die allgemeine ne Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, dann ist die allgemeinste Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch $x(t) = x_s(t) + x_0(t)$ gegeben.

Der Beweis ist offensichtlich: Seien $x_{s1}(t)$ und $x_{s2}(t)$ zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung, dann ist die Differenz $x_{s2}(t) - x_{s1}(t)$ offensichtlich eine Lösung der homogenen Gleichung. Damit erhält man eine beliebige Lösung immer aus der Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und einer Lösung der homogenen Gleichung. Anders ausgedrückt: Für die allgemeinste Lösung der inhomogenen Gleichung reicht es somit, die allgemeinste Lösung der homogenen Gleichung und eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu kennen. Die Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum und der zugehörige Vektorraum (vgl. 2.8) besteht aus den Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

Wir können diese Aussage noch verallgemeinern: Falls sich der inhomogene Term als Summe oder Integral schreiben lässt,

$$F(t) = \sum_{m} f_m(t) \qquad \text{bzw.} \quad F(t) = \int f(y, t) \mathrm{d}y, \qquad (5.50)$$

ist die allgemeinste Lösung eine Summe (bzw. Integral) von speziellen Lösungen jeweils zu den Funktionen $f_m(t)$ (bzw. f(y,t)) und der allgemeinen Lösungen zu der homogenen Gleichung. Seien also $\{x(m,t)\}$ die Lösungen von

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(t) x^{(k)}(m,t) = f_m(t) , \qquad (5.51)$$

dann ist

$$x(t) = \sum_{m} x(m, t) + x_0(t)$$
(5.52)

5.3. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(t) x^{(k)}(t) = \sum_m f_m(t) = F(t) .$$
(5.53)

Lineare inhomogene Differentialgleichungen löst man meist mithilfe von sogenannten Green'schen Funktionen [Green's functions oder Green functions], auf die in Kap. 11 näher eingegangen wird. Auch dabei wird ausgenutzt, dass man jeden Quellterm F(t) nach einer geeigneten "Basis" entwickeln kann (speziell wählt man dafür die sogenannten δ -Distributionen, siehe Kap. 10) und sucht nach Lösungen zu dieser speziellen Basis. Abschnitt 5.3.4 betrachtet ein Beispiel aus der Mechanik, bei dem ein etwas anderes Verfahren angewandt wird.

5.3.2 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sowohl die Differentialgleichung zum Wachstums- bzw. Zerfallsgesetz als auch die Differentialgleichung zum harmonischen Oszillator hatten konstante Koeffizienten. Das wird in vielen Fällen in der Physik der Fall sein. Es zeigt sich, dass homogene lineare Gleichungen dieser Art allgemein mit einem einfachen Ansatz gelöst werden können.

Beispiel: Der gedämpfte Oszillator

Wir betrachten zunächst als weiteres und etwas komplizierteres Beispiel die Differentialgleichung zum gedämpften harmonischen Oszillator:

$$m\ddot{x}(t) = -\mu \dot{x}(t) - kx(t).$$
(5.54)

Hierbei sind m die Masse, μ ein Reibungskoeffizient und k die Federkonstante (bzw. allgemeiner die Konstante der rücktreibenden Kraft). Nach Division durch m folgt:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{5.55}$$

mit $2\gamma = \mu/m$ und $\omega_0^2 = k/m$ (ω_0 bezeichnet die Frequenz des ungedämpften Oszillators – also zu $\gamma = 0$).

Gleichungen dieser Art löst man häufig durch den sogenannten *Exponentialansatz.* Man "vermutet", dass spezielle Lösungen die Form

$$x(t) = e^{i\alpha t} \tag{5.56}$$

haben mit einer zunächst noch unbekannten Größe a. Dieser Ansatz führt auf die Gleichung:

$$-\alpha^2 x(t) + i2\gamma \alpha x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$
 (5.57)

Da die Lösung x(t) nicht identisch verschwinden soll, kann man x(t) ausklammern (lax gesprochen "durch x(t) dividieren") und erhält folgende Bedingung für α :

$$\alpha^2 - i2\gamma\alpha - \omega_0^2 = 0 \tag{5.58}$$

oder:

$$\alpha_{\pm} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \,. \tag{5.59}$$

Wir können nun drei Fälle unterscheiden:

- $\omega_0^2 > \gamma^2$: Mit $\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ist

$$\alpha_{\pm} = i\gamma \pm \omega \,. \tag{5.60}$$

Wir haben also zwei spezielle Lösungen gefunden:

$$\widetilde{x}_1(t) = e^{-\gamma t} e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \widetilde{x}_2(t) = e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}.$$
(5.61)

Statt dieser beiden komplexen Lösungen können wir ebensogut die reellen Real- und Imaginärteile dieser Funktionen betrachten (beliebige Linearkombinationen sind ja wieder Lösungen, inbesondere auch der Realteil $(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)/2$ und der Imaginärteil $(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)/(2i)$):

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \cos \omega t$$
 und $x_2(t) = e^{-\gamma t} \sin \omega t$. (5.62)

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(a \cos \omega t + b \sin \omega t \right)$$
(5.63)

oder, äquivalent:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi).$$
(5.64)

Die abfallende Exponentialfunktion beschreibt die Dämpfung der Schwingung und ω (etwas kleiner als die Frequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung) charakterisiert die Frequenz der Schwingung. Die freien Integrationskonstanten lassen sich wieder mit den Anfangsbedingungen in Beziehung setzen:

$$x(0) = a \qquad \text{und} \qquad v(0) = -a\gamma + \omega b, \qquad (5.65)$$

bzw.

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x(0) \cos \omega t + \frac{x(0)\gamma + v(0)}{\omega} \sin \omega t \right).$$
(5.66)

Diesen Fall bezeichnet man auch als gedämpfte Schwingung oder Schwingungsfall.

- $\omega_0^2 < \gamma^2$:

Nun ist α (Gl. 5.59) rein imaginär, $\alpha_{\pm} = i(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})$, und wir erhalten eine reine Dämpfung (exponentiellen Abfall):

$$x(t) = a e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + b e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}.$$
(5.67)

Man beachte, dass im vorliegenden Fall $\tau_{\pm}^{-1} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ immer positiv ist, sodass beide Anteile der Lösung eine abklingende Bewegung beschreiben. τ_{\pm} sind Zeitkonstanten, die angeben, nach welcher Zeitspanne die Lösung auf 1/e abgeklungen ist. Da $\tau_{-} = (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})^{-1}$ die größere Zeitkonstante ist, beschreibt sie das Abfallverhalten für große Zeiten.

- $\omega_0^2 = \gamma^2$:

Diesen Fall bezeichnet man als *aperiodischen Grenzfall*. Die Lösung zu $\alpha = i\gamma$ beschreibt ebenfalls eine reine Dämpfung:

$$x_1(t) = e^{-\gamma t}$$
. (5.68)

Damit haben wir jedoch nur eine Lösung gefunden. Nach den allgemeinen Überlegungen muss es aber noch eine zweite, linear unabhängige Lösung geben, die wir offensichtlich durch den Exponentialansatz nicht gefunden haben. Betrachten wir jedoch in der allgemeinen Lösung 5.66 den Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ (was dem aperiodischen Grenzfall entspricht), so erhalten wir:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x(0) + (x(0)\gamma + v(0))t \right).$$
(5.69)

Die beiden speziellen Lösungen sind somit:

$$x_1(t) = e^{-\gamma t}$$
 und $x_2(t) = t e^{-\gamma t}$. (5.70)

Allgemeiner Fall

Eine Differentialgleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^{(k)}(t) = 0 \tag{5.71}$$

kann man durch einen Exponentialansatz zumindest teilweise lösen. Ein solcher Ansatz führt (vgl. den Weg zu Gl. 5.58) auf die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} (\mathbf{i})^{k} \alpha^{k} c_{k} = 0.$$
(5.72)

Dies ist eine Polynomgleichung für α , von der wir nach dem Fundamentalsatz der Algebra wissen, dass sie n Lösungen besitzt.

Sind alle Lösungen $\{\alpha_i\}$ dieser Gleichung paarweise verschieden (d.h. Nullstellen erster Ordnung von Gl. 5.72), haben wir *n* linear unabhängige Lösungen gefunden:

$$x_i(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i t} \,. \tag{5.73}$$

Ist eine Lösung α_i *p*-fach entartet, sind folgende Lösungen linear unabhängig:

$$x_q(t) = t^q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i t} \,, \tag{5.74}$$

wobei q die Werte q = 0, 1, ..., p-1 annehmen kann. Die allgemeinste Lösung der homogenen Gleichung ist eine Linearkombination dieser Lösungen:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t) , \qquad (5.75)$$

wobei die Integrationskonstanten a_i beispielsweise durch die Anfangsbedingungen $x^{(k)}(t_0)$ $(0 \le k < n)$ festgelegt werden können.

5.3.3 Weshalb Exponentialansatz?

Man wird sich vermutlich fragen, was den Exponentialansatz gegenüber anderen Funktionen auszeichnet, dass dieser (zumindest im allgemeinen Fall) zu den linear unabhängigen speziellen Lösungen führt.

Der unmittelbare Grund ist die Eigenschaft der Exponentialfunktion, unter der Operation der Ableitung sich selbst zu reproduzieren, also die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\exp(\alpha t)}{\mathrm{d}t} = \alpha \exp(\alpha t) \,. \tag{5.76}$$

(Dabei spielt es keine Rolle, ob α reell oder komplex angenommen wird.) Da dies auch für die höheren Ableitungen gilt, wird in jedem Term der Differentialgleichung dieselbe Funktion reproduziert. Da die Gleichung für alle t (im Definitionsbereich) gelten soll, können wir somit diese Funktion herauskürzen und erhalten eine algebraische Gleichung für den offenen Parameter α . Genau dies haben wir im letzten Kapitel gemacht.

Es steckt aber noch ein tieferer Grund hinter dem Exponentialansatz für homogene lineare Differentialgleichungen: Eine solche Differentialgleichung ist *invariant unter Zeittranslationen*. Das bedeutet, mit jeder Lösung x(t) ist auch $x(t + t_0)$ eine Lösung (für beliebige Werte von t_0). Der mathematische Grund ist, dass die Koeffizienten nicht explizit von t abhängen. Physikalisch bedeutet

KAPITEL 5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

dies, dass es keine Rolle spielt, zu welchem Zeitpunkt ein Experiment durchgeführt wird – die physikalischen Gesetze sind dieselben. Und damit spielt es auch für die Lösungen der Differentialgleichung (z.B. die Bahnkurven) keine Rolle, zu welchem Zeitpunkt sie "beginnen". Da sich die allgemeinste Lösung aber als Linearkombination der speziellen Lösungen schreiben lässt, muss sich die Funktion $x(t + t_0)$ als Linearkombination der speziellen Lösungen $x_i(t)$ schreiben lassen:

$$x(t+t_0) = \sum_{i} c_i(t_0) x_i(t)$$
(5.77)

(wobei die Entwicklungskonstanten c_i von t_0 abhängen dürfen).

Bei einer Differentialgleichung erster Ordnung ist die Exponentialfunktion dadurch schon festgelegt, denn wenn

$$x(t+t_0) = c(t_0) x(t)$$
(5.78)

gelten muss, bleibt nur noch die Exponentialfunktion übrig. Bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung muss zumindest gelten:

$$x(t+t_0) = c_1(t_0)x_1(t) + c_2(t_0)x_2(t), \qquad (5.79)$$

wobei $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die speziellen Lösungen sind. Die Exponentialfunktionen (zu verschiedenen Dämpfungs- bzw. Schwingungsfaktoren) erfüllen diese Bedingung ebenfalls, daher ist der Exponentialansatz immer noch gerechtfertigt, aber auch Exponentialfunktionen multipliziert mit cos- und sin-Funktionen erfüllen diese Bedingung (das war beim gedämpften harmonischen Oszillator der Fall). Schließlich erfüllen auch die Funktionen $\exp(\alpha t)$ und $t \exp(\alpha t)$ diese Bedingungen, kommen daher ebenfalls als Lösungen in Betracht. Im Fall von Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt es entsprechend mehr linear unabhängige Lösungen, somit kommen dort auch Funktionen der Form $t^q \exp(\alpha t)$ in Frage, wobei q immer kleiner als die Ordnung der Differentialgleichung sein muss.

Ganz allgemein muss der Vektorraum der Lösungen also unter Zeittranslationen in sich selbst abgebildet werden. Anders ausgedrückt: Eine Zeittranslation um einen beliebigen Wert t_0 definiert eine lineare Abbildung des Lösungsraums auf sich selbst. Mathematisch sucht man also nach sogenannten linearen Darstellungen der Translationsgruppe auf endlich-dimensionalen Funktionenräumen. Die Ausarbeitung dieser Bemerkungen würde hier zu weit führen, aber bei den genannten Darstellungen spielen eben die Exponentialfunktionen eine besondere Rolle, weil sie selbst schon die geforderten Transformationseigenschaften erfüllen.

Man kann dieselbe Argumentation auch aus einem anderen Blickwinkel betrachten: Wenn $x(t+t_0)$ für jeden Wert von t_0 eine Lösung einer zeittranslationsinvarianten Differentialgleichung ist, dann muss in einer Taylor-Entwicklung

$$x(t+t_0) = x(t) + \dot{x}(t)t_0 + \frac{1}{2}\ddot{x}(t)t_0^2 + \ldots + \frac{1}{k!}x^{(k)}(t)t_0^k + \ldots$$
(5.80)

jeder Term, also jede beliebige Ableitung $x^{(k)}(t)$, eine Lösung der Differentialgleichung sein. Wir erhalten also unendlich viele Lösungen. Da es jedoch nur eine begrenzte Anzahl linear unabhängiger Lösungen gibt, müssen sich höhere Ableitungen als Kombination der niedrigeren Ableitungen schreiben lassen. Genau das bringt die Differentialgleichung aber zum Ausdruck.

5.3.4 Der getriebene gedämpfte Oszillator

Als Beispiel für eine inhomogene Differentialgleichung betrachten wir

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F \cos \omega_e t \,. \tag{5.81}$$

Diese Gleichung beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator, der zusätzlich von einer periodischen äußeren Kraft getrieben wird.

Um wieder mit einem Exponentialansatz Erfolg zu haben, zerlegen wir die Kosinus-Funktion in ihre Exponentialanteile (dies ist eine Anwendung der allgemeinen Überlegungen, Gl. 5.50 bis 5.53):

$$\cos\omega_{e}t = \frac{1}{2} \left(e^{i\omega_{e}t} + e^{-i\omega_{e}t} \right)$$
(5.82)

und lösen zunächst die Gleichungen

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{2} e^{\pm i\omega_e t} .$$
(5.83)

Die Lösung für die Kosinusfunktion ist dann gleich der Summe dieser beiden Lösungen.

Diesmal lässt der Exponentialansatz für die Lösungen,

$$x_{\pm}(t) = A_{\pm} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega_{\mathrm{e}}t} \,, \tag{5.84}$$

nicht die Winkelfrequenz $\omega_{\rm e}$ offen, diese ist nun extern vorgegeben und nach genügend langer Zeit sollte der Oszillator mit derselben Frequenz wie der externe Quellterm schwingen. Wir erwarten somit keine Gleichung für die Frequenz sondern eine für die Amplituden $A_{\pm}(\omega_{\rm e})$. (Diese waren im homogenen Fall nicht bestimmt sondern die freien Integrationskonstanten.)

Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung führt auf die Bedingungen:

$$(-\omega_{\rm e}^2 \pm 2\gamma i\omega_{\rm e} + \omega_0^2)A_{\pm} = \frac{F}{2}$$
(5.85)

bzw.

$$A_{\pm}(\omega_{\rm e}) = \frac{F}{2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_{\rm e}^2 \pm 2\gamma i\omega_{\rm e})} \,. \tag{5.86}$$

Bei der Amplitude handelt es sich also um eine komplexe Zahl. Die (spezielle) Lösung von Gl. 5.81 lautet somit:

$$x(t) = A_{+}(\omega_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_{\mathrm{e}}t} + A_{-}(\omega_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{e}}t}.$$
(5.87)

Da $A_+(\omega_e) = A_-(\omega_e)$, ist diese Lösung reell. Aus ihr folgen die Resonanzphänomene, die hier aber nicht diskutiert werden sollen.

5.4 Gekoppelte lineare Differentialgleichungen

Sehr oft haben wir es in der Physik mit gekoppelten Differentialgleichungen zu tun. Das bedeutet, das Verhalten von einem Freiheitsgrad (einer Koordinate) hängt von den anderen Freiheitsgraden (Koordinaten) ab. Auch hier bilden lineare Differentialgleichungen wieder einen besonderen Fall, da sie sich in vergleichsweise allgemeiner Form lösen lassen. Wir betrachten zwei Spezialfälle: lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung und lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung (ohne Dämpfungen) mit jeweils konstanten Koeffizienten. Der erste Fall dient hauptsächlich dazu zu zeigen, wie sich Konzepte der linearen Algebra hier anwenden lassen. Der zweite Fall ist für die Physik der wichtigere. Die Verallgemeinerung auf nicht-konstante Koeffizienten tritt in der Physik zwar gelegentlich auf, erfordert aber spezielle Verfahren, die in den entsprechenden Vorlesungen behandelt werden.

5.4.1 Gekoppelte lineare homogene Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \,. \tag{5.88}$$

x(t) beschreibt eine mehrkomponentige Variable, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$, und A ist eine konstante $n \times n$ Matrix, durch die diese Variablen gekoppelt werden. In Komponenten lautet also obige Differentialgleichung:

$$\dot{x}_{1} = a_{11}x_{1}(t) + a_{12}x_{2}(t) + \dots = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_{i}(t)$$

$$\dot{x}_{2} = a_{21}x_{1}(t) + a_{22}x_{2}(t) + \dots = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_{i}(t)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\dot{x}_{n} = a_{n1}x_{1}(t) + a_{n2}x_{2}(t) + \dots = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_{i}(t).$$
(5.89)

Wir haben nun zwei Möglichkeiten, dieses Differentialgleichungssystem zu lösen. Formal können wir die Lösung wie im eindimensionalen Fall als Exponentialfunktion schreiben:

$$x(t) = \exp(At) x(0) . (5.90)$$

 $\exp(At)$ ist nun eine $n \times n$ Matrix, die man z. B. durch eine Reihendarstellung definieren kann:

$$\exp(At) = \mathbf{1} + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^kt^k.$$
 (5.91)

Diese $n \times n$ Matrix $\exp(At)$ kann man auf den Vektor der Anfangsbedingungen $x(0) = (x_1(0), x_2(0), ...)^T$ anwenden und erhält so die Lösung x(t). Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die so erhaltene Lösung tatsächlich das Differentialgleichungssystem (5.89) erfüllt. Dazu bildet man die Ableitung der Reihendarstellung von $\exp(At)$:

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + \dots = A\exp(At).$$
(5.92)

Die Matrix $\exp(At)$ erfüllt also ebenfalls die obige Differentialgleichung. Somit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(At)x(0) = A\exp(At)x(0) = Ax(t).$$
(5.93)

In Abschnitt 1.5.3 wurde gezeigt, wie man solche Funktionen von Matrizen berechnen kann.

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, letztendlich zu derselben Lösung zu gelangen, die in der Praxis oft etwas einfacher ist. Diese besteht darin, die Matrix A durch eine geeignete Koordinatentransformation auf Normalgestalt zu bringen. Sei R eine invertierbare $n \times n$ Matrix. Dann kann man Gl. 5.88 von links mit R multiplizieren und zwischen die Matrix A und den Vektor x(t) die Identität $\mathbf{1} = R^{-1}R$ schieben,

$$R\dot{x}(t) = RAR^{-1}Rx(t),$$
 (5.94)

und erhält für die neuen Koordinaten y(t) = Rx(t):

$$\dot{y}(t) = RAR^{-1}y(t)$$
. (5.95)

Nun kann R so gewählt werden, dass RAR^{-1} Normalform hat. Sofern die Eigenwerte von A paarweise verschieden sind, kann A durch eine solche Koordinatentransformation sogar auf Diagonalgestalt gebracht werden. Falls die Matrix zu A nur auf eine Jordan'sche Normalform gebracht werden kann, treten zusätzlich Lösungen vom Typ Gl. 5.74 auf. Hat man die Lösungen y(t) gefunden, erhält man durch eine inverse Transformation wieder die gesuchten Lösungen $x(t) = R^{-1}y(t)$.

Der letzte Schritt von Gl. 5.94 zu Gl. 5.95 setzt voraus, dass die Transformationsmatrix R nicht von dem Argument t abhängt. Falls jedoch die Koeffizienten der Gleichung, also die Elemente von A, zeitabhängig sind, muss auch R(t) zeitabhängig gewählt werden und die Bedingung $\dot{y}(t) = R\dot{x}(t)$ gilt nicht mehr.

5.4.2 Gekoppelte lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Sehr oft entwickelt man in der Physik ein System um seine Gleichgewichtslage. Wie wir sehen werden, beschreibt man dadurch näherungsweise kleine Schwingungen. Da dieser Fall sehr oft auftritt, soll er etwas ausführlicher behandelt werden.

Entwicklung Newont'scher Bewegungsgleichungen um eine Gleichgewichtslage

Wir betrachten die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu konservativen Kräften (d.h., die Käfte lassen sich als Gradient einer potenziellen Energie schreiben):

$$\ddot{x}(t) = -\nabla U(x_1(t), ..., x_n(t))$$
 bzw. $\ddot{x}_i(t) = -\frac{\partial U(x_1(t), ..., x_n(t))}{\partial x_i}$. (5.96)

(Ich habe hier angenommen, dass alle Teilchen dieselbe Masse m haben, die ich der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt habe. Sollte das nicht der Fall sein, kann man neue Argumente $y_i(t) = \sqrt{m_i}x_i(t)$ wählen, sodass die neue Differentialgleichung für $y_i(t)$ von der obigen Form ist.)

Nun stellen wir uns vor, dass es für dieses System einen Gleichgewichtszustand gibt, bei dem also alle Teilchen in Ruhe sind. Es soll also einen Vektor \hat{x} geben, sodass der Gradient von U an der Stelle \hat{x} (in allen Komponenten) verschwindet:

$$\left. \frac{\partial U(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right|_{x=\hat{x}} = 0.$$
(5.97)

Befinden sich die Teilchen des Systems an diesem Punkt (bzw. den durch \hat{x} beschriebenen Punkten), verschwinden alle Kräfte auf die Teilchen und sie sind in Ruhe. Man stelle sich beispielsweise einen Kristall oder ein Molekül vor, bei dem es solche Ruhelagen gibt (im Rahmen einer quantenmechanischen Beschreibung muss diese Aussage noch präzisiert werden).

Nun betrachtet man eine kleine Störung um diese Ruhelage, d.h. wir betrachten die Freiheitsgrade:

$$z_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i \,. \tag{5.98}$$

Dann folgt für die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{z}_i(t) = -\frac{\partial U(z_1(t) + \hat{x}_1, \dots, z_n(t) + \hat{x}_n)}{\partial z_i}.$$
(5.99)

Da Gl. 5.98 nur eine zeitunabhängige Verschiebung der Koordinate x_i darstellt, gilt

$$\ddot{x}_i(t) = \ddot{z}_i(t)$$
 und $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(z+\hat{x})}{\partial z_i}$. (5.100)

Da z_i "klein" sein soll (in welchem Sinne, wird noch geklärt) können wir U nach Potenzen von z entwickeln:

$$U(\hat{x}+z) = U(\hat{x}) + \sum_{i} \left. \frac{\partial U(\hat{x}+z)}{\partial z_{i}} \right|_{z=0} z_{i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^{2}U}{\partial z_{i} \partial z_{j}} \right|_{z=0} z_{i} z_{j} + \dots$$
(5.101)

Der Gradient verschwindet aber nach Voraussetzung an der Stelle \hat{x} , da \hat{x} ein stationärer Punkt (Gleichgewichtslage) von U sein soll. Also erhalten wir

$$U(\hat{x} + z) = U(\hat{x}) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \, \partial z_j} \right|_{z=0} z_i z_j + o(||z||^2)$$
(5.102)

Bilden wir nun von dieser Funktion die partiellen Ableitungen nach z, so folgt für die Kräfte (daher das Minus-Zeichen):

$$F_i = -\frac{\partial U(\hat{x}+z)}{\partial z_i} = -\sum_j \left. \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \, \partial z_j} \right|_{z=0} z_j + \ldots = -\sum_j K_{ij} z_j + \ldots$$
(5.103)

Die symmetrische(!) Matrix K_{ij} ist nun zeitlich konstant, d.h. genauer gilt:

$$K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U(\hat{x} + z)}{\partial z_i \, \partial z_j} \right|_{z=0} \tag{5.104}$$

(man beachte, dass z = 0 gleichbedeutend ist mit $x = \hat{x}$). K_{ij} ist also die Hesse-Matrix (vgl. Abschnitt 4.3) der potenziellen Energie um die Gleichgewichtslage \hat{x} .

Gekoppelte Oszillatoren

Die Entwicklung für kleine Störungen um eine Gleichgewichtslage führte uns also in führender Ordnung auf folgendes Gleichungssystem:

$$\ddot{x}(t) = -Kx(t)$$
 bzw. $\ddot{x}(t)_i = -\sum_{j=1}^n K_{ij}x(t)_j$ (5.105)

(statt der Koordinate z verwende ich nun wieder die Bezeichnung x.)

Da es sich bei der Matrix K um eine symmetrische Matrix handeln soll, gibt es sogar eine Rotationsmatrix R (d.h., diese Matrix beschreibt eine einfache Drehung des Koordinatensystems; die Koordinatenachsen bleiben orthogonal), sodass $RKR^T = D$, und D ist eine Diagonalmatrix:

$$D = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}.$$
 (5.106)

Åhnlich wie im letzten Abschnitt bedeutet dies, dass das Gleichungssystem in den gedrehten Koordinaten y(t) = Rx(t) entkoppelt:

$$\ddot{y}(t) = -Dy(t)$$
 bzw. $\ddot{y}_i(t) = -k_i y_i(t)$. (5.107)

Hierbei sind k_i die Eigenwerte von K bzw. die Diagonalelemente der Matrix D. Ist $k_i > 0$ können wir $k_i = \omega_i^2$ schreiben und die Lösungen der Gleichungen sind harmonische Schwingungen der Form $y_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)$. In diesem Fall bleiben "kleine" Auslenkungen um die Gleichgewichtslage $y_i = 0$ auch klein, wobei "klein" bedeutet, dass die Abweichungen von der harmonischen Schwingung vernachlässigbar sind (diese Schranke wird letztendlich durch die Messgenauigkeit festgelegt, mit der die Schwingung beobachtet wird). Ist jedoch $k_i < 0$, lauten die speziellen Lösungen $y_i(t) = \exp(\pm \sqrt{|k_i|}t)$. Entweder für sehr große positive oder negative Zeiten wird diese Auslenkung sehr groß und die harmonische Näherung ist nicht für alle t gültig.

Letztendlich bedeutet $k_i < 0$, dass das Potenzial für diese Koordinate zwar einen Extrempunkt annimmt, aber kein Minimum. Insofern handelt es sich bei \hat{x} in diesem Fall auch nicht um eine stabile Gleichgewichtslage. Der Fall $k_i = 0$ bedeutet für die zugehörige Bewegungsgleichung $\ddot{y}_i(t) = 0$ und beschreibt somit eine kräftefreie Bewegung.

5.5 Spezielle Lösungsverfahren

Es gibt nur wenige nicht-lineare Differentialgleichungen, bei denen sich die Lösungen zum Anfangswertproblem allgemein finden lassen. Meist handelt es sich dabei um Differentialgleichungen in einer Variablen. Wir betrachten zwei Klassen solcher Differentialgleichungen, bei denen eine allgemeine Lösung möglich ist. Ich sollte allerdings betonen, dass "lösen" hier allgemeiner zu verstehen ist, nämlich "bis auf ein Integral", d.h., es kann sein, dass sich die Lösung als ein Integral schreiben lässt oder in einem Integral auftritt, das aber selbst nicht in elementarer Form angebbar ist.

5.5.1 Trennung der Variablen

Die erste Klasse von Differentialgleichungen, die sich geschlossen lösen lässt, hat die Form:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)g(x(t))\,. \tag{5.108}$$

Die gesuchte Funktion x(t) ist nun einkomponentig. Die allgemeinen Sätze zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen verlangen, dass f(t) und, wie wir gleich sehen werden, 1/g(x) Lipschitz-stetig sind.

Das Integrationsverfahren (man spricht in diesem Zusammenhang auch schon mal von der "Quadratur" der Differentialgleichung) trennt die Variablen t und x in folgender Weise:

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = f(t)\,\mathrm{d}t\,,\tag{5.109}$$

und nun werden beide Seiten in ihren Variablen integriert:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int_{t_0}^t f(\tau) \,\mathrm{d}\tau \,.$$
 (5.110)

Man sollte allerdings betonen, dass der Schritt (Gl. 5.109) nur eine "Eselsbrücke" darstellt und diese Gleichung im strengen Sinne nicht definiert ist. Formal teilt man Gleichung 5.108 durch g(x(t)),

$$\frac{1}{g(x(t))}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t) \tag{5.111}$$

und integriert beide Seiten dieser Gleichung nach dem Argument t:

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{g(x(\tau))} \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^t f(\tau) \,\mathrm{d}\tau \,. \tag{5.112}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung kann man nun die Substitutionsregel anwenden und das Integrationsargument τ durch $x(\tau)$ substituieren (vgl. Gl. 3.44). Die neuen Integrationsgrenzen sind damit $x(t_0)$ und x(t). Das führt auf Gl. 5.110.

Auf der linken Seite von Gl. 5.110 erhält man die Stammfunktion G(x) von 1/g(x) und auf der rechten Seite die Stammfunktion F(t) von f(t):

$$G(x(t)) - G(x(t_0)) = F(t) - F(t_0).$$
(5.113)

Diese Gleichung kann man im Prinzip nach x(t) auflösen. Die freie Wahl von t_0 entspricht der freien Integrationskonstanten einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Beispiel: $\dot{x} = \alpha x^2$

Als erstes Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \alpha x^2 \,. \tag{5.114}$$

Trennung der Variablen führt auf

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x^2} dx = \alpha \int_{t_0}^t = \alpha(t - t_0).$$
(5.115)

Die linke Seite können wir leicht integrieren und erhalten:

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = \alpha(t - t_0)$$
(5.116)

bzw.

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x(t_0)} - \alpha(t - t_0)}.$$
(5.117)

Diese Lösung divergiert bei $t \to t_0 + 1/(\alpha x(t_0))$, also nach einer endlichen Zeit. Eine Wachstumsgleichung der Form 5.114 hat also nach endlicher Zeit zu einem unendlich großen Wachstum geführt. Solche Modelle sind natürlich unphysikalisch (oder unbiologisch), sie sind aber ein Beispiel dafür, dass auch scheinbar sehr "harmlose" Differentialgleichungen Lösungen haben können, die nur in einem begrenzten Zeitintervall existieren.

Beispiel: $\dot{x} = \alpha \sqrt{x(t)}$

Diese Gleichung ist (für reelle Lösungen) nur sinnvoll, solange $x(t) \ge 0$. Insbesondere sei $\alpha > 0$ und $x(t_0) \ge 0$. Das Verfahren der Trennung der Variablen führt auf die Gleichung

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \alpha \int_{t_0}^t \mathrm{d}\tau$$
(5.118)

mit der Lösung:

$$2\sqrt{x(t)} - 2\sqrt{x(t_0)} = \alpha(t - t_0) \tag{5.119}$$

bzw.

$$x(t) = \frac{1}{4} \left(\alpha(t - t_0) + 2\sqrt{x(t_0)} \right)^2 \,. \tag{5.120}$$

Für $t \ge t_0$ (und $x(t_0) \ge 0$) bleibt die rechte Seite positiv, sodass die Lösung sinnvoll ist.

Interessant ist der Fall $x(t_0) = 0$. In diesem Fall lautet die Lösung

$$x(t) = \frac{\alpha^2}{4} (t - t_0)^2 \,. \tag{5.121}$$

Man kann sich leicht durch Ableiten dieser Funktion überzeugen, dass sie die Differentialgleichung erfüllt. Es gibt aber noch eine zweite Lösung zu der Anfangsbedingung $x(t_0) = 0$, nämlich die Funktion x(t) = 0, die offenbar ebenfalls die Differentialgleichung erfüllt. Wir haben zu derselben Anfangsbedingung zwei (unabhängige) Lösungen gefunden. Der Grund ist offensichtlich: \sqrt{x} ist bei x = 0 nicht Lipschitz-stetig. Daher gilt der Satz von der Eindeutigkeit der Lösung in diesem Fall nicht.

100

5.5.2 Beispiel: Die logistische Differentialgleichung

Das letzte Beispiel soll etwas ausführlicher behandelt werden, da man hier auch einige andere Verfahren (Stabilitätsanalyse und Flusslinien) sehr schön beschreiben kann.

Unter der *logistischen Differentialgleichung* [*logistic differential equation*] versteht man die folgende Gleichung (wiederum nur in einer Komponente):

$$\dot{x} = rx(t)(1 - x(t)).$$
 (5.122)

Diese Gleichung tritt unter anderem in der Biologie als Beispiel für ein begrenztes Wachstum auf: Für sehr kleine Werte von x(t) verhält sich die Lösung näherungsweise wie ein exponentieller Anstieg, doch für große Werte von x(t) ("groß" bedeutet hier: nahe bei 1) wird das Wachstum gedämpft. Als Beispiel wählt man gerne eine Population, bei der die Ressourcen zu knapp werden, wenn die Dichte dieser Population zu groß wird.

Trennung der Variablen führt auf die Gleichung

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x(1-x)} \, \mathrm{d}x = r \int_{t_0}^t \, \mathrm{d}t = r(t-t_0) \,. \tag{5.123}$$

Die linke Seite lässt sich ebenfalls leicht integrieren, wenn man die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$
(5.124)

verwendet:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x(1-x)} \, \mathrm{d}x = \ln x - \ln(1-x) \Big|_{x(t_0)}^{x(t)} = \ln \left(\frac{x(t)(1-x(t_0))}{(1-x(t))x(t_0)} \right) \,. \tag{5.125}$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$\ln\left(\frac{x(t)(1-x(t_0))}{(1-x(t))x(t_0)}\right) = r(t-t_0)$$
(5.126)

bzw.:

$$\frac{x(t)}{(1-x(t))} = \frac{x(t_0)}{1-x(t_0)} \exp(r(t-t_0)), \qquad (5.127)$$

oder aufgelöst nach x(t):

$$x(t) = \frac{1}{1 + c \exp(-r(t - t_0))}$$
(5.128)

mit

$$c = \frac{1 - x(t_0)}{x(t_0)} \,. \tag{5.129}$$

Die Konstante c lässt sich also durch die Anfangsbedingungen ausdrücken. Je nach gewählter Anfangsbedingung lassen sich verschiedene Fälle unterscheiden:

 $0 < x(t_0) < 1$

Im Hinblick auf die Interpretation als Wachstumsgleichung sind nur Werte von $0 < x(t_0) < 1$ sinnvoll. In diesem Fall ist c > 0. Für $x(t_0) \to 0$ gilt $c \to \infty$, für $x(t_0) \to 1$ findet man $c \to 0$. Da die Exponentialfunktion für alle Argumente positiv ist, wird der Nenner nie null und x(t) ist für alle Werte von t eine wohl-definierte Funktion (siehe Abb. 5.1).

Die Funktion 5.128 spielt (mit vollkommen anderer Interpretation der Konstanten und Variablen) auch in der Festkörperphysik eine große Rolle als Fermi-Verteilung.



Abbildung 5.1: Die Lösung der logistischen Differentialgleichung für Anfangswerte $0 < x(t_0) < 1$.

Die "physikalischen bzw. biologischen" Anfangsbedingungen sind $0 < x(t_0) < 1$. In diesem Fall führt ein sehr kleiner Anfangswert von x(t) zunächst zu einem exponentiellen Wachstum. Sobald x(t) jedoch größer und die obere Grenze x(t) = 1 spürbar wird, nähert sich die Lösung exponentiell dem Grenzwert x(t) = 1. In die Vergangenheit extrapoliert wird eine Population immer kleiner. Sie entstand in der fernen Vergangenheit aus einer exponentiell kleinen Anfangspopulation. Auch das ist natürlich eine Idealisierung, denn eine "sehr kleine" Population besteht aus einzelnen wenigen Individuen, sodass diese kontinuierliche Gleichung nicht gültig ist.

$x(t_0) \le 0$ und $x(t_0) \ge 1$

Wir betrachten nun die "unphysikalischen" Anfangsbedingungen, für die sich x(t) nicht als Dichte (sei es einer Population, einer chemischen Substanz in einer chemischen Reaktion, etc.) interpretieren lässt. Die Lösungen zu $x(t_0) = 0$ und $x(t_0) = 1$ sind die konstanten Funktionen:

$$x(t_0) = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad x(t) = 0 \tag{5.130}$$

und

$$x(t_0) = 1 \quad \text{mit der Lösung} \quad x(t) = 1.$$
(5.131)

Für $x(t_0) < 0$ ist $-\infty < c < -1$; für $x(t_0) \to 0$ folgt $c \to -\infty$ und für $x(t_0) \to -\infty$ folgt $c \to -1$. Nun gibt es einen Wert t für den der Term im Nenner der Lösung verschwindet und somit die Funktion x(t) dort nicht definiert ist. Das Gleiche gilt für den Fall $x(t_0) > 1$, wobei nun c im Bereich -1 < c < 0 liegt $(c \to 0$ für $x_0 \to 1$ und $c \to -1$ für $x(t_0) \to \infty$).

Die Stelle, bei der die Lösung "explodiert", ist durch

$$t_{\rm S} = t_0 + \frac{1}{r} \ln|c| \tag{5.132}$$

gegeben. Für einen Anfangswert $x(t_0) > 0$ bleibt die Lösung negativ, nähert sich aber $x(t) \to -\infty$ nach einer endlichen Zeit $t \to t_S$ in der Zukunft von t_0 . In der Vergangenheit war die Lösung exponentiell nahe bei x(t) = 0 (siehe Abb. 5.2; Zweig 1).

Für $x(t_0) > 1$ liegt die Singularität der Lösung in der Vergangenheit von t_0 (|c| < 1, daher ist der Logarithmus in Gl. 5.132 negativ). Die Lösung nähert sich für große Werte von t von oben exponentiell dem Wert x(t) = +1 (siehe Abb. 5.2).

5.5.3 Fixpunkte und Flusslinien im Phasendiagramm

In vielen Fällen (insbesondere, wenn es sich um mehrkomponentige gekoppelte Differentialgleichungen handelt) kann man eine Lösung nicht explizit angeben. Oftmals möchte man aber auch nur eine



Abbildung 5.2: Die Lösung der logistischen Differentialgleichung für Anfangswerte $x(t_0) < 0$ (Zweig 1) und $x(t_0) > 1$ (Zweig 2).

qualitative Vorstellung vom Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen erhalten. Dazu eignet sich folgendes Verfahren:

Man bestimmt zunächst die sogenannten stationären Lösungen bzw. die (zeitlich) konstanten Lösungen und macht anschließend eine sogenannte Stabilitätsuntersuchung in linearer Näherung um diese Lösung. Das bedeutet, man untersucht das Verhalten einer Lösung, deren Anfangswert in der Nähe der stationären Lösung liegt und untersucht, ob sich diese Funktion von der stationären Lösung entfernt oder sich ihr nähert. Dieses Verfahren soll nun anhand der logistischen Differentialgleichung vorgestellt werden.

Zuvor jedoch ein paar Begriffsklärungen: Ein Fixpunkt [fixed point] einer Abbildung $\Phi : M \to M$ ist ein Element $x \in M$, für das gilt: $\Phi(x) = x$. Das Element x wird unter der Abbildung Φ also auf sich selbst abgebildet. Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist der Phasenraum der Raum der möglichen Anfangsbedingungen (vgl. S. 88). Unter dem Fluss [flow] Φ_t versteht man die Abbildung, die ein Element x des Phasenraums auf das Element $\Phi_t(x) = x(t)$ abbildet, wobei x(t) der Wert zum Zeitpunkt t der Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung x(0) = x ist. Der Punkt x wird also auf den Punkt abgebildet, zu dem er in der Lösung der Differentialgleichung nach der Zeit t "geflossen" ist. Wenn man bei einer Differentialgleichung von einem Fixpunkt spricht, ist meist ein Fixpunkt dieses Flusses Φ_t gemeint, wobei t beliebig sein kann. Das bedeutet, man sucht nach Lösungen, die konstant sind und damit stationär.

1.) Bestimmung der Fixpunkte

Wir betrachten nun die logistische Differentialgleichung und suchen nach den zeitlich kostanten Lösungen. Für diese Lösung gilt $\dot{x} = 0$ und somit wird aus der Differentialgleichung eine gewöhnliche algebraische Gleichung:

$$rx(1-x) = 0 \implies x_0 = 0 \text{ und } x_1 = 1.$$
 (5.133)

KAPITEL 5. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Die Lösungen zu diesen beiden Anfangsbedingungen sind x(t) = 0 und x(t) = 1.

2.) Stabilitätsanalyse

Wir betrachten nun einen Punkt ϵ in der Nähe von x_0 bzw. x_1 und untersuchen, wie sich die zugehörige Lösung $x(t) = x_i + \epsilon(t)$ zu dieser Anfangsbedingung (als "Anfang" wählen wir der Einfachheit halber $t_0 = 0$) verhält. Dabei wird eine sogenannte *lineare Näherung* [*linear approximation*] vorgenommen, d.h., es werden nur Terme in der Differentialgleichung berücksichtigt, die linear in $\epsilon(t)$ sind. Diese lineare Näherung ist gerechtfertigt, da die Anfangsbedingung ja sehr nahe an einer Lösung (dem Fixpunkt) liegt und somit $\epsilon(t)$ zumindest für kurze Zeiten t auch klein bleiben sollte. Dabei interessiert, ob sich die Lösung von dem Fixpunkt entfernt oder ob sie sich dem Fixpunkt nähert.

Betrachten wir zunächst den Fixpunkt $x_0 = 0$ und eine Lösung $x(t) = 0 + \epsilon(t)$. Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein und berücksichtigen nur die linearen Terme, folgt:

$$\dot{\epsilon}(t) = g\epsilon(t) - g\epsilon(t)^2 \tag{5.134}$$

mit der Lösung $\epsilon(t) = \epsilon \exp(gt)$. Offensichtlich nimmt der Wert von $\epsilon(t)$ mit wachsendem t zu, d.h., die Lösung entfernt sich von dem Fixpunkt x = 0. Dies ist unabhängig davon, ob ϵ positiv oder negativ ist.

Betrachten wir nun den Fixpunkt $x_1 = 1$ und eine Lösung $x(t) = 1 + \epsilon(t)$. Wiederum soll der Anfangswert $\epsilon(0) = \epsilon$ sehr klein sein (also die Funktion x(t) in der Nähe des Fixpunkts beginnen), sodass nicht-lineare Terme vernachlässigt werden können. Da $\dot{x}(t) = \dot{\epsilon}(t)$ folgt:

$$\dot{\epsilon}(t) = g(1+\epsilon(t))(1-(1+\epsilon(t))) = -g\epsilon(t) + \mathcal{O}(\epsilon(t)^2)$$
(5.135)

mit der Lösung $\epsilon(t) = \epsilon \exp(-gt)$. In diesem Fall wird $\epsilon(t)$ also kleiner, d.h., die Lösung nähert sich dem Fixpunkt.

3.) Das Flussdiagramm im Phasenraum:

Wir erhalten also folgendes Bild (siehe Abb. 5.3). In der Nähe des Fixpunktes x = 0 werden Lösungen vom Fixpunkt weg getrieben, wohingegen eine Lösung in der Nähe des Fixpunkts x = 1 zu diesem Fixpunkt hin getrieben wird. Man bezeichnet x = 0 auch als instabilen Fixpunkt, weil eine winzige Abweichung von diesem Fixpunkt die Lösung wegtreibt. Der Fixpunkt x = 1 ist ein stabiler Fixpunkt, da eine winzige Abweichung wieder in den Fixpunkt zurückgetrieben wird.



Diese Informationen reichen schon aus, um ein qualitatives Bild der Lösungen zu erhalten, das auch mit unseren exakten Lösungen im letzten Abschnitt übereinstimmt: Für $x(t_0) < 0$ wird die Lösung exponentiell schnell zu negativen Werten getrieben (Zweig 1 in Abb. 5.2). Dass die Lösung nach einer endlichen Zeit divergiert, kann man der linearen Näherung allerdings nicht ansehen, da hierfür der quadratische Term verantwortlich ist. Für $0 < x(t_0) < 1$ wird die Lösung in der Nähe von 0 exponentiell von diesem Wert weggetrieben und nähert sich für große t exponentiell rasch dem Wert x = 1. Dies entsprich der regulären Lösung aus Abb. 5.1. Für $x(t_0) > 1$ wird die Lösung zu dem Fixpunkt x = 1 hingetrieben (Zweig 2 in Abb. 5.2). Allerdings kann auch hier die lineare Näherung das singuläre Verhalten in der Vergangenheit nicht beschreiben.

5.5.4 Variation der Konstanten

Eine homogene gewöhnliche lineare Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Für die Lösung von

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 (5.136)$$

findet man so:

$$y(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{b(x')}{a(x')} dx'\right) = Cf(x), \qquad (5.137)$$

wobei $C = y(x_0)$ die Integrationskonstante ist und wir

$$f(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{b(x')}{a(x')} \mathrm{d}x'\right)$$
(5.138)

gesetzt haben.

Hat man es mit einer inhomogenen Gleichung zu tun, also

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \qquad (5.139)$$

können wir die homogene Lösung als Ansatz wählen, wobei wir allerdings die Integrationskonstante nun als Funktion von x auffassen:

$$y(x) = C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{b(x')}{a(x')} dx'\right) = C(x)f(x).$$
 (5.140)

Für diese Funktion gilt

$$y'(x) = C'(x)f(x) - C(x)\frac{b(x)}{a(x)}f(x)$$
(5.141)

bzw.

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = a(x)C'(x)f(x).$$
(5.142)

Wir haben somit nun die Differentialgleichung

$$a(x)C'(x)f(x) = c(x)$$
 bzw. $C'(x) = \frac{c(x)}{a(x)f(x)}$ (5.143)

zu lösen. Für die Funktion C(x) folgt:

$$C(x) = \int_{x_0}^x \frac{c(x')}{a(x')f(x')} \mathrm{d}x' \,. \tag{5.144}$$

Beispiel: Gelöst werden soll:

$$xy'(x) + y(x) = 1 - x. (5.145)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung ist

$$y(x) = \frac{C}{x}.$$
(5.146)

Die Differentialgleichung für C(x) lautet

$$C'(x) = 1 - x \tag{5.147}$$

mit der Lösung

$$C(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \bar{C}.$$
(5.148)

Somit erhalten wir für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \bar{C} \right) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\bar{C}}{x}.$$
 (5.149)

5.5.5 Die Energieerhaltung

Das folgende Beispiel zeigt, wie eine *Erhaltungsgröße*, also eine Funktion, die sich für eine gegebene Lösungskurve zeitlich nicht ändert sondern konstant bleibt, zur Auffindung der Lösungen genutzt werden kann.

Viele Bewegungsgleichungen in der Physik haben folgende Form

$$m\ddot{x}(t) = -\nabla U(x(t)). \tag{5.150}$$

Das gilt für alle Newton'schen Systeme, bei denen die Kraft "konservativ" ist und sich als Gradient eines Potentials U(x) schreiben lässt. (Man beachte, dass x hier durchaus mehrkomponentig sein kann.) Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit der Geschwindigkeit (im Sinne einer Skalarmultiplikation), folgt

$$m\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t) = -\nabla U(x(t))\cdot\dot{x}.$$
(5.151)

Für die rechte Seite der Gleichung gilt nach der Kettenregel

$$-\nabla U(x(t)) \cdot \dot{x} = -\frac{\mathrm{d}U(x(t))}{\mathrm{d}t}, \qquad (5.152)$$

und für die linke Seite gilt

$$m\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2\right).$$
(5.153)

Insgesamt folgt somit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^{2} + U(x(t))\right) = 0$$
(5.154)

Die Größe

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + U(x(t))$$
(5.155)

ändert sich also nicht als Funktion der Zeit, sofern x(t) eine Lösung der Differentialgleichung ist. Diese Größe E ist die Gesamtenergie (kinetische plus potentielle Energie) des Systems.

Wir betrachten nun speziell eine einkomponentige Gleichung der Form:

$$\ddot{x} = f(x) \,, \tag{5.156}$$

die zweite Ableitung einer Funktion ist also gleich einer (integrablen) Funktion f dieser Funktion. Die Stammfunktion zu f sei F, sodass wir auch

$$\ddot{x} = F'(x) \tag{5.157}$$

schreiben können. Die gleiche Argumentation wie vorher führt nun auf die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 - F(x(t)) \right) = 0$$
(5.158)

oder

$$\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 - F(x(t)) = c, \qquad (5.159)$$

wobei c eine beliebige Konstante sein kann (c ist eine Integrationskonstante, da wir es aber mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun haben, gibt es noch eine zweite Integrationskonstante). Man bezeichnet c auch häufig als *erstes Integral* [*first integral*] der Differentialgleichung.

Diese Gleichung können wir nach $\dot{x}(t)$ auflösen:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2(c + F(x(t)))}$$
(5.160)

und haben auf diese Weise eine Gleichung gewonnen, die sich mit der Methode der Variablentrennung (s.o.) lösen lässt:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{2(c+F(x))}} dx = (t-t_0).$$
(5.161)

Sofern das Integral auf der linken Seite lösbar ist und sich das Ergebnis nach x(t) auflösen lässt, haben wir die Lösung zu obiger Differentialgleichung gefunden. Die zweite Integrationskonstante ist t_0 .
Kapitel 6

Parametrisierte Räume

Im Folgenden betrachten wir Kurven, Flächen und allgemeiner Teilräume im \mathbb{R}^n . Dazu zählen auch die speziell für die Physik und Mathematik wichtigen Kegelschnitte. Außerdem behandeln wir allgemeinere Koordinatensysteme, die man als Reparametrisierungen des \mathbb{R}^n auffassen kann. Das Kapitel ist eine Einführung in die Methoden der Differentialgeometrie und dient als Vorbereitung für das nächste Kapitel, in dem Integrale über Flächen und Volumina behandelt werden. In Kap. 8 werden einige der Konzepte zur Differentialgeometrie noch weiter vertieft.

Große Teile dieses Kapitels sind dem Skript "Einführung in die Methoden der Theoretischen Physik" [Filk 2012] entlehnt. Zum (hoffentlich) besseren Verständnis kennzeichne ich in den folgenden Kapiteln Vektoren wieder durch den Fettdruck.

6.1 Parametrisierte Wege im \mathbb{R}^n

Das Konzept eines parametrisierten Weges wurde schon kurz in Abschnitt 3.7.2 eingeführt. Hier betrachten wir einige allgemeine Eigenschaften solcher Wege oder Bahnkurven.

6.1.1 Die Parametrisierung von Wegen

Ein parametrisierter Weg (oder, falls die Parametrisierung sich auf die Zeit bezieht, eine parametrisierte Bahnkurve) ist eine Abbildung von einem Intervall in den \mathbb{R}^n :

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad t \in I \mapsto \gamma(t) = \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n.$$
 (6.1)

Eine physikalische oder mathematische Interpretation des Parameters t besteht zunächst nicht, obwohl dieser Parameter in der Physik häufig die Rolle der Zeit spielt (d.h., wir geben an, an welchem Raumpunkt $\boldsymbol{x}(t)$ sich ein Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt t befindet). In diesem Fall bezeichnet man den parametrisierten Weg auch als Bahnkurve oder Trajektorie. In der Mathematik wählt man für t oft die sogenannte Bogenlänge. Auf diese spezielle Parametrisierung kommen wir noch zu sprechen.

Bezieht man sich nur auf die Punktmenge, aus denen ein parametrisierter Weg besteht, spricht man häufig einfach von einer *Kurve*. In diesem Sinne bezeichnet ein Kreis eine Kurve, z.B. charakterisiert durch die Punktmenge, welche der Bedingung

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{6.2}$$

genügt, wohingegen die Darstellung

$$\boldsymbol{x}(t) = (R\cos 2\pi t, R\sin 2\pi t) \qquad t \in [0, 1)$$
(6.3)

einer parametrisierten Kreiskurve entspricht.

Eine andere Parametrisierung derselben Kurve entspricht anderen Funktionen $x_i(t')$. Dabei sollte sich t' als bijektive Funktion von t ausdrücken lassen.

Beispiel: Die Bahnkurve einer Helix im \mathbb{R}^3 entlang der z-Achse lässt sich durch folgende Abbildung beschreiben:

$$t \to (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, \alpha t).$$
(6.4)

 r, ω und α sind feste Parameter zur Charakterisierung der Helix. So ist r der Radius der Helix (in der Projektion auf die xy-Ebene), ω legt den Parameterbereich T fest, der einem Umlauf der Helix entspricht ($T = 2\pi/\omega$), und α charakterisiert (zusammen mit ω) die so genannte Ganghöhe h, um welche die Helix bei einem Umlauf zunimmt ($h = \alpha T = 2\pi\alpha/\omega$). Eine solche Bahnkurve ergibt sich beispielsweise für ein geladenes Teilchen in einem konstanten Magnetfeld in 3-Richtung.

Zur Notation: Im Folgenden bezeichne ich mit t meist den Parameter "Zeit" und mit s die sogenannte Bogenlänge (siehe Gl. 6.11).

6.1.2 Der Tangentialvektor - Die Geschwindigkeit

Die Ableitung eines Weges $\boldsymbol{x}(t)$ nach dem Parameter t liefert einen Tangentialvektor an die Kurve am Punkte $\boldsymbol{x}(t)$. Handelt es sich bei dem Parameter t um die physikalsiche Zeit und bezeichnet $\boldsymbol{x}(t)$ die Bahnkurve eines Teilchens, so ist dieser Tangentialvektor der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{6.5}$$

bzw.

(

$$v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) = \left(\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}, \dots, \frac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t}\right) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)).$$
(6.6)

Der Geschwindigkeitsvektor ist zu jedem Zeitpunkt tangential zur räumlichen Trajektorie.

Die Geschwindigkeit ist eine gerichtete Größe und daher ein Vektor. Es besteht allerdings ein grundlegender Unterschied in der Interpretation des Vektors \boldsymbol{x} zur Beschreibung des Orts eines Teilchens und \boldsymbol{v} zur Beschreibung seiner Geschwindigkeit. Es gibt zunächst keinen Grund, weshalb der physikalische Raum, in dem sich ein Teilchen bewegt, ein Vektorraum sein sollte. Beispielsweise könnte sich das Teilchen auch auf der Oberfläche einer Kugel oder einer allgemeinen Mannigfaltigkeit bewegen (wie es beispielsweise in der allgemeinen Relativitätstheorie der Fall ist). Auf einer solchen Mannigfaltigkeit muss (zumindest lokal, d.h. in der Umgebung von jedem Punkt) ein Koordinatensystem definiert sein, das ganz allgemein einem Ausschnitt (einer offenen Menge) des \mathbb{R}^n entspricht. Doch das macht diese Mannigfaltigkeit noch nicht zu einem Vektorraum. So ist meist weder eine Addition von Raumpunkten noch die Multiplikation eines Raumpunkts mit einer reellen Zahl definiert. Der \mathbb{R}^n dient in diesem Fall lediglich als Koordinatensystem zur Beschreibung der Raumpunkte. Streng genommen sollte man den flachen physikalischen Raum durch einen affinen Raum beschreiben (siehe Kap. 2.8).

Bei der Geschwindigkeit (bzw. bei einem Tangentialvektor) ist es jedoch anders: Geschwindigkeiten kann man addieren und auch mit reellen Zahlen multiplizieren. Geschwindigkeiten sind also Vektoren im eigentlichen Sinne. Bei einer allgemeinen Mannigfaltigkeit drückt sich das dadurch aus, dass die Geschwindigkeit nicht ein Element der Mannigfaltigkeit selber ist, sondern zum Tangentialraum an einem bestimmten Punkt der Mannigfaltigkeit gehört. Dieser Tangentialraum ist immer ein Vektorraum.

Allgemein ist der Betrag des Tangentialvektors

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)} \,. \tag{6.7}$$

Für das Beispiel der Helix erhalten wir die Geschwindigkeit durch Ableitung von Gl. 6.4 nach der Zeit:

$$\boldsymbol{v}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, \alpha).$$
(6.8)

Für den Betrag der Geschwindigkeit folgt:

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \alpha^2} = \sqrt{r^2 \omega^2 + \alpha^2}.$$
(6.9)

Der Betrag der Geschwindigkeit ist für die angegebene Parameterdarstellung der Helix zeitlich konstant. Die Trajektorie wird also mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, allerdings ändert die Geschwindigkeit ständig ihre Richtung.

Bei einer Änderung der Parametrisierung oder auch Reparametrisierung

$$\boldsymbol{x}(t) \longrightarrow \boldsymbol{\hat{x}}(t') = \boldsymbol{x}(t(t'))$$

ändert sich der Betrag des Tangentialvektors, nicht aber seine Richtung:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\hat{x}}(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \,. \tag{6.10}$$

Durch eine geeigente Parametrisierung kann man daher erreichen, dass der Tangentialvektor immer den Betrag 1 hat. Eine Parametrisierung $\boldsymbol{x}(s)$ einer Kurve, sodass

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(s)}{\mathrm{d}s}\right| = 1\,,\tag{6.11}$$

bezeichnet man als *Bogenlängenparametrisierung*. Der Parameter s entspricht in diesem Fall der Bogenlänge der Kurve, wie wir in Kap. 7.2 zeigen werden.

6.1.3 Die Beschleunigung

Die Beschleunigung eines Teilchens ist gleich der Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit (es folgen verschiedene Notationen für die Beschleunigung):

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{x}}(t)$$
(6.12)

bzw.

$$(a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t)) = \left(\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_2(t)}{\mathrm{d}t}, ..., \frac{\mathrm{d}v_n(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$
(6.13)

Auch die Beschleunigung ist Element eines Vektorraums.

Für die Beschleunigung der Helix-Kurve erhalten wir:

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t, 0\right).$$
(6.14)

Die Beschleunigung hat in diesem Fall keine 3-Komponente, da die Bahnkurve in 3-Richtung einer konstanten Bewegung entspricht. Der Betrag der Beschleunigung,

$$|\boldsymbol{a}(t)| = \sqrt{r^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + r^2 \omega^4 \sin^2 \omega t} = r\omega^2, \qquad (6.15)$$

ist bei der gegebenen Parametrisierung ebenfalls konstant.

Das Skalarprodukt von Geschwindigkeit und Beschleunigung ergibt für die Helix:

$$\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{a}(t) = r^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - r^2 \omega^3 \cos \omega t \sin \omega t = 0.$$
(6.16)

Da weder die Geschwindigkeit noch die Beschleunigung verschwinden, bedeutet dieses Ergebnis, dass die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist. Generell gilt:

$$\frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{v}(t)]^2}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{a}(t), \qquad (6.17)$$

und da bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag die linke Seite verschwindet, muss auch die rechte Seite null sein. Falls \boldsymbol{a} und \boldsymbol{v} selbst nicht null sind, müssen sie senkrecht zueinander orientiert sein.

Bei der Bogenlängenparametrisierung (d.h., $|\boldsymbol{x}(s)'| = 1$) sind Beschleunigung und Tangentenvektor also immer senkrecht zueinander. In diesem Fall bezeichnet man die Beschleunigung auch als *Krümmungsvektor* der Kurve im Punkte $\boldsymbol{x}(s)$. Der Betrag des Krümmungsvektors ist die *Krümmung*,

$$\kappa(s) = \left| \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}(s)}{\mathrm{d}s^2} \right| \,, \tag{6.18}$$

und ihr reziproker Wert

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \tag{6.19}$$

heißt Krümmungsradius der Kurve im Punkte $\boldsymbol{x}(s)$. Für eine allgemeine Parametrisierung $\boldsymbol{x}(t)$ der Kurve gilt

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t))(\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{a}(t)) - (\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{a}(t))^2}}{(\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t))^{3/2}}.$$
(6.20)

Für die Helix erhalten wir als Krümmungsradius

$$\rho = \frac{r^2 \omega^2 + \alpha^2}{r \omega^2} \,. \tag{6.21}$$

Ohne Ganghöhe ($\alpha = 0$) finden wir das für eine Kreisbahn zu erwartende Ergebnis: $\rho = r$. Durch die Ganghöhe wird der Krümmungsradius der Helix etwas größer.

6.1.4 Das mitgeführte Dreibein

Kurven im \mathbb{R}^3 besitzen im Allgemeinen (die Einschränkungen werden gleich offensichtlich) in jedem ihrer Punkte ein durch die Geometrie ausgezeichnetes Koordinatensystem, das man auch als *mitgeführtes Dreibein* bezeichnet. Dies kann beispielsweise ein Beobachter, der sich entlang der Kurve bewegt, als lokales Koordinatensystem verwenden.

Zwei geometrisch ausgezeichnete Vektoren einer Bahnkurve kennen wir bereits: den Geschwindigkeitsvektor (allgemeiner Tangentialvektor) $\boldsymbol{v}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}(t)$. Auch wenn beide Vektoren von der gewählten Parametrisierung der Kurve abhängen, ist die Ebene, die durch die beiden Vektoren aufgespannt wird, parametrisierungsunabhängig. Außerdem ist der Geschwindigkeitsvektor immer tangential zu einer Kurve, seine Richtung ist also ebenfalls parametrisierungsunabhängig. Dividieren wir den Geschwindigkeitsvektor \boldsymbol{v} durch seinen Betrag, erhalten wir einen Einheitsvektor

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{\boldsymbol{v}(t)}{|\boldsymbol{v}(t)|}, \qquad (6.22)$$

der an jedem Punkt tangential zur Kurve ist. Dieser Vektor ist der erste Vektor unseres Dreibeins. Notwendig (und hinreichend) für seine Existenz ist, dass der Geschwindigkeitsvektor nicht null ist. Dies lässt sich durch eine geeignete Parametrisierung der Kurve immer erreichen. In der Bogenlängenparametrisierung hat der Tangentialvektor bereits den Betrag 1 und entspricht somit dem ersten Vektor des Dreibeins.

6.2. FLÄCHEN

Für den Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}(t)$ hängen sowohl der Betrag als auch die Richtung von der Parametrisierung der Kurve ab. Wir können jedoch den Beschleunigungsvektor immer in einen Anteil parallel zur Tangente, $\boldsymbol{a}_{\parallel}$, und einen Anteil senkrecht zur Tangente, \boldsymbol{a}_{\perp} , aufspalten. Die Komponente parallel zur Tangente erhalten wir durch das Skalarprodukt mit \boldsymbol{e}_v und es gilt:

$$\boldsymbol{a}_{\parallel} = (\boldsymbol{e}_{v} \cdot \boldsymbol{a}) \, \boldsymbol{e}_{v} = \frac{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{v}|^{2}} \, \boldsymbol{v} \,. \tag{6.23}$$

Diese Komponente beschreibt die Änderung des Betrags der Geschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit konstant, steht a senkrecht auf v und dieser Anteil verschwindet.

Den zur Geschwindigkeit senkrechten Anteil der Beschleunigung erhalten wir, indem wir den parallelen Anteil von \boldsymbol{a} subtrahieren:

$$\boldsymbol{a}_{\perp} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\parallel} = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{v}|^2} \boldsymbol{v} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|^2} \left((\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}) \boldsymbol{v} \right).$$
(6.24)

(Diese Konstruktion wurde auch bei dem Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und dem Verfahren von Gram-Schmidt verwendet; vgl. Gl. 2.20.) Dieser Anteil beschreibt das Maß der Richtungsänderung der Kurve. Als zweiten Vektor unseres Dreibeins wählen wir den Einheitsvektor, der in die Richtung von a_{\perp} zeigt:

$$\boldsymbol{e}_a(t) = \frac{\boldsymbol{a}(t)_{\perp}}{|\boldsymbol{a}(t)_{\perp}|} \,. \tag{6.25}$$

Diesen Vektor bezeichnet man auch als *Hauptnormalenvektor*. In der Bogenlängenparametrisierung ist

$$\boldsymbol{e}_a(s) = \frac{\boldsymbol{a}(s)}{|\boldsymbol{a}(s)|} \,. \tag{6.26}$$

Damit $e_a(t)$ eindeutig gegeben ist, muss die Kurve in dem Punkt x(t) ihre Richtung ändern. Für eine Gerade (bzw. Ausschnitte einer Geraden) ist dieser Vektor nicht mehr eindeutig definierbar.

Die von den beiden Vektoren $\boldsymbol{e}_v(t)$ und $\boldsymbol{e}_a(t)$ (bzw. äquivalent $\boldsymbol{v}(t)$ und $\boldsymbol{a}(t)$) aufgespannte Ebene bezeichnet man als *Schmiegeebene* an die Kurve im Punkte $\boldsymbol{x}(t)$.

Als dritten Vektor des ausgezeichneten Dreibeins wählen wir einen Einheitsvektor, der senkrecht auf $\boldsymbol{v}(t)$ und senkrecht auf $\boldsymbol{a}(t)$ steht. Diesen erhalten wir aus dem Kreuzprodukt:

$$\boldsymbol{e}_{n}(t) = \boldsymbol{e}_{v}(t) \times \boldsymbol{e}_{a}(t) = \frac{\boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{a}(t)}{|\boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{a}(t)|}.$$
(6.27)

Man bezeichnet $\boldsymbol{e}_n(t)$ auch als *Binormalenvektor* der Kurve im Punkte $\boldsymbol{x}(t)$.

Die drei Vektoren $(\boldsymbol{e}_v(t), \boldsymbol{e}_a(t), \boldsymbol{e}_n(t))$ (Tangentenvektor, Hauptnormalenvektor, Binormalenvektor) bilden zu jedem Zeitpunkt t ein kartesisches Koordinantensystem (es handelt sich um drei Einheitsvektoren, die jeweils senkrecht aufeinander stehen), das durch die Richtung und die Krümmung der Kurve ausgezeichnet ist.

6.2 Flächen

Eine Abbildung von einem Ausschnitt des \mathbb{R}^2 (beispielsweise einem Rechteck oder einer Kreisfläche) in den \mathbb{R}^n beschreibt eine Fläche (ähnlich wie eine Kurve einer Abbildung von einem Ausschnitt des \mathbb{R} in den \mathbb{R}^n entspricht). Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Parametergebiet, beschrieben durch Koordinanten (u, v), so ist eine Fläche im \mathbb{R}^n gegeben durch:

$$(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \boldsymbol{x}(u,v) \in \mathbb{R}^n,$$
 (6.28)

bzw. ausgedrückt in Koordinaten:

$$(u, v) \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_n(u, v)).$$
 (6.29)

Diese Beschreibung einer Fläche bezeichnet man wiederum als eine Parameterdarstellung der Fläche.

Als Beispiel betrachten wir die Kugel
oberfläche im \mathbb{R}^3 . Eine Kugel lässt sich durch die Bedingung

(

$$(6.30)$$

charakterisieren. Eine solche Beschreibung einer Fläche bezeichnet man als implizite Beschreibung. Wir gehen in Abschnitt 6.4 noch genauer auf implizite Beschreibungen ein.

Diese Bedingung können wir nach jeder der Koordinaten auflösen, beispielsweise nach x^3 :

$$x_3 = \pm \sqrt{R^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2} \,. \tag{6.31}$$

Wir wählen nun x_1 und x_2 als unabhängige Parameter, setzen also $x_1 = u$ und $x_2 = v$, und erhalten:

$$x_1(u,v) = u$$
 $x_2(u,v) = v$ $x_3(u,v) = \pm \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$. (6.32)

Das positive Vorzeichen beschreibt die "nördliche" Halbkugel, das negative Vorzeichen die südliche. Die Parameter (u, v) sind durch die Bedingung $u^2 + v^2 < R^2$ eingeschränkt. Das Parametergebiet im \mathbb{R}^2 ist also eine (offene) Kreisscheibe. Allerdings werden die Punkte am Äquator durch diese Darstellung nicht beschrieben.

Wir können eine Kugeloberfläche aber auch durch zwei Winkel charakterisieren. Dazu überzeugen wir uns zunächst, dass sich jeder Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ im \mathbb{R}^3 durch seinen Abstand r vom Nullpunkt, dem Winkel θ zur z-Achse und den Winkel φ zwischen der Projektion auf die xy-Ebene und der x-Achse beschreiben lässt:

$$(x_1, x_2, x_3) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta).$$
(6.33)

Es handelt sich hierbei um eine andere Beschreibung der Punkte des \mathbb{R}^3 . Solche Koordinatentransformationen werden uns in Abschnitt 6.6 noch beschäftigen. Im vorliegenden Fall genügt es, dass die Kugeloberfläche durch konstantes r gekennzeichnet ist. Wir erhalten daher für die Beschreibung der Kugeloberfläche:

$$(\varphi,\theta) \to (x_1(\varphi,\theta), x_2(\varphi,\theta), x_3(\varphi,\theta)) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta).$$
(6.34)

Für die Parameter gilt $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$. Das Parametergebiet ist in diesem Fall ein Rechteck. Ganz anschaulich entspricht φ dem Längengrad auf der Erdoberfläche (aufgefasst als Kugelfläche) und θ dem Breitengrad (allerdings mit dem Wert π am Äquator).

Damit es sich allgemein um eine reguläre Fläche handelt, verlangen wir nicht nur, dass die Funktionen $x_i(u, v)$ stetig und hinreichend oft differenzierbar sind, sondern wir verlangen auch, dass die Parametrisierung der Fläche in folgendem Sinne nicht entartet ist: An jedem beliebigen Punkt $\boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ auf der Fläche sollen sich die Kurven $\boldsymbol{x}(u, v_0)$ (aufgefasst als Kurve mit Kurvenparameter u) und $\boldsymbol{x}(u_0, v)$ (Kurvenparameter v) unter einem nicht-verschwindenden Winkel schneiden. Konkret bedeutet dies: Die beiden Tangentialvektoren

$$\boldsymbol{f}_{u} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{x}(u, v_{0})}{\partial u} \right|_{u=u_{0}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{f}_{v} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{x}(u_{0}, v)}{\partial v} \right|_{v=v_{0}}$$
(6.35)

sollen jeweils von null verschieden und linear unabhängig sein.

6.3. PARAMETERDARSTELLUNG D-DIMENSIONALER RÄUME IM \mathbb{R}^N

 $\operatorname{Im}\,\mathbb{R}^3$ sind diese beiden Bedingungen genau dann erfüllt, wenn

$$\boldsymbol{f}_{n}(u,v) := \boldsymbol{f}_{u} \times \boldsymbol{f}_{v} = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v}$$
(6.36)

für alle Werte $(u, v) \in U$ von null verschieden ist. $f_n(u, v)$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der Fläche am Punkte $\boldsymbol{x}(u, v)$ steht. Diesen Vektor bezeichnet man auch als *Normalvektor*.

Am Beispiel der Kugeloberfläche in der Parametrisierung von Gl. 6.32 erkennt man, dass diese Bedingungen für alle (u, v) erfüllt sind, für die $u^2 + v^2 < R^2$. Wenn wir Punkte auf dem Äquator der Kugeloberfläche beschreiben wollen, sollten wir nicht nach x_3 auflösen, sondern eher nach x_1 oder x_2 . Auch bei der zweiten Parametrisierung der Kugeloberfläche (Gl. 6.34) gibt es "singuläre" Stellen: $\theta = 0$ und $\theta = \pi$. Man spricht in solchen Fällen auch von *Koordinatensingularitäten*: Die beschriebene Fläche selbst ist an diesen Stellen vollkommen regulär, aber das Koordinatensystem ist an diesen Stellen nicht mehr definiert.

Da die Parametrisierung der Fläche nicht entartet sein soll, können wir den Normalvektor auch durch seinen Betrag dividieren und erhalten den auf 1 normierten Normalvektor:

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \frac{\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v}\right)}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v}\right|}.$$
(6.37)

6.3 Parameterdarstellung *d*-dimensionaler Räume im \mathbb{R}^n

Die Konzepte der vergangenen Abschnitte können wir folgendermaßen verallgemeinern: Ein *d*dimensionaler Raum, eingebettet im \mathbb{R}^n (zunächst verlangen wir noch d < n, später betrachten wir auch den Fall d = n), besitzt folgende Parameterdarstellung:

$$(u_1, u_2, ..., u_d) \to \boldsymbol{x}(u_1, u_2, ..., u_d),$$
 (6.38)

wobei jede Komponente x_i (i = 1, ..., n) eine (stetige und genügend oft differenzierbare) Funktion der Parameter $\{u_{\alpha}\}$ $(\alpha = 1, ..., d)$ ist. Jeder Punkt p auf diesem d-dimensionalen Raum soll eindeutig durch seine Koordinaten $\{u_{\alpha}\}$ mit $\boldsymbol{x}(u_1, ..., u_d) \simeq p$ bestimmt sein. Statt von einem d-dimensionalen Raum spricht man auch manchmal von einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit.¹

Zu jeder der Komponenten u_{α} können wir die Kurve $\gamma_{\alpha} \simeq \boldsymbol{x}(u_{\alpha})$ betrachten, die man erhält, wenn man alle anderen Komponenten $\{u_{\beta}\}, \beta \neq \alpha$, festhält. Durch jeden Punkt des *d*-dimensionalen Raumes (festgelegt durch die Koordinaten $\{u_{\alpha}\}$) finden wir daher *d* ausgezeichnete Kurven, die sich in diesem Punkt schneiden. Die Abbildung (6.38) bildet diese Kurven im *d*-dimensionalen Parameterraum auf Kurven im \mathbb{R}^n auf der Mannigfaltigkeit ab. Zu jeder dieser Kurven können wir den Tangentialvektor berechnen:

$$\boldsymbol{f}_{\alpha}(u_1,...,u_d) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u_1,...,u_d)}{\partial u_{\alpha}}.$$
(6.39)

Dieser Tangentialvektor ist natürlich eine Funktion der Koordinaten des Punktes, bei dem der Tangentialvektor berechnet wird. Wenn der Punkt p, der im \mathbb{R}^n durch den Vektor $\boldsymbol{x}(u_1, ..., u_d)$ dargestellt wird, nicht zu einer Koordinatensingularität gehört, sind die d Tangentialvektoren $\boldsymbol{f}_{\alpha}(p)$ alle von null verschieden und linear unabhängig. Sie spannen somit einen d-dimensionalen Vektorraum auf, den so genannten Tangentialraum an die Mannigfaltigkeit im Punkte p.

Man sollte an dieser Stelle beachten, dass der Tangentialraum im Allgemeinen kein linearer Teilraum des \mathbb{R}^n im üblichen Sinne ist. Das wäre nur der Fall, wenn der Punkt p gerade dem

¹In der Differentialgeometrie werden Mannigfaltigkeiten auch allgemeiner definiert, ohne dass man auf die Einbettung der Mannigfaltigkeit in einen \mathbb{R}^n Bezug nehmen muss. Das soll hier aber nicht geschehen.

Nullpunkt des \mathbb{R}^n entspricht. Man kann einen Tangentialraum im obigen Sinne als einen *affinen Teil*raum des \mathbb{R}^n auffassen, bei dem der Nullpunkt entsprechend verschoben ist. Besser ist es jedoch, den Tangentialraum überhaupt nicht als Teilraum des \mathbb{R}^n zu interpretieren, sondern einfach als einen *d*-dimensionalen Vektorraum, der sich für jeden Punkt p einer Mannigfaltigkeit definieren lässt.

6.4 Charakterisierung durch Bedingungen – Implizite Funktionen

Oftmals ist es nicht leicht, eine geeignete Parameterdarstellung einer Fläche zu finden. Insbesondere ist es für viele Flächen überhaupt nicht möglich, sie durch eine Abbildung der im letzten Abschnitt genannten Art überall und frei von Singularitäten oder Entartungen der Parametrisierung zu definieren. Die Kugeloberfläche ist dafür ein gutes Beispiel.

Statt einer Parametrisierung ist es manchmal einfacher, eine Fläche durch eine geeignete Bedingung zu beschreiben. Im \mathbb{R}^3 lässt sich eine solche Bedingung häufig in der Form

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{6.40}$$

schreiben. Für die Kugeloberfläche im \mathbb{R}^3 gilt beispielsweise

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^3 - R^2, \qquad (6.41)$$

was auf die Gleichung

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = R^2. (6.42)$$

führt.

Es erhebt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen sich eine Gleichung der Form $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ beispielsweise nach x_3 auflösen lässt, sodass wir die Fläche auch durch $u_1 = x_1$ und $u_2 = x_2$ parametrisieren können: $(u_1, u_2, x_3(u_1, u_2))$. In diesem Fall wird die Fläche also durch eine "Höhenfunktion" $x_3(u_1, u_2)$ beschrieben.

Der Satz zu impliziten Funktionen (den wir gleich noch allgemeiner formulieren werden) besagt, dass dies bei allen Punkten (x_1, x_2, x_3) möglich ist, bei denen $\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \neq 0$ ist. Betrachten wir dazu nochmals das Beispiel der Kugeloberfläche: Die Bedingung $\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0$ führt auf die Gleichung $x_3 = 0$. Das sind gerade die Punkte auf dem "Äquator" der Kugel. Tatsächlich ist in der unmittelbaren Umgebung dieser Punkte x_3 keine eindeutige Funktion mehr von den Koordinaten x_1 und x_2 .

Allgemein bedeutet die Bedingung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, dass die Fläche durch eine Äquipotentialfläche von f beschrieben wird. $\partial f/\partial x_3 = 0$ bedeutet, dass der Gradient an die entsprechende Äquipotentialfläche (und damit der Normalvektor zur Fläche selbst) senkrecht zur x_3 -Koordinate steht. Damit kann aber die Fläche an dieser Stelle nicht mehr durch die x_1 - und x_2 -Koordinaten beschrieben werden. Anders ausgedrückt: An solchen Stellen hat die Höhenfunktion $x_3(x_1, x_2)$ die Steigung unendlich.

Ist in einem Gebiet $\partial f/\partial x_3 \neq 0$, kann man die Bedingung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ nach der Koordinate x_3 auflösen und die Fläche in der Form $(u, v, \hat{f}(u, v))$ beschreiben. In den Bereichen, in denen die partielle Ableitung verschwindet, bricht diese Darstellung zusammen. Dort lässt sich die Gleichung aber meist nach einer anderen Koordinate auflösen.

Ganz allgemein beschreiben die Parameter (ob dies bestimmte Koordinaten sind, die man durch Auflösung der restlichen Koordinaten nach diesen Koordinaten erhalten hat, oder auch andere Parameter) eine sogenannte *Karte*. Wenn es für jeden Punkt der Fläche eine geeignete Karte gibt, sodass die Fläche in der Umgebung dieses Punktes frei von Koordinatensingularitäten beschrieben werden kann, bezeichnet man die Menge dieser Karten auch als einen Atlas. Aus der Beschreibung der Kugeloberfläche durch Gl. (6.42) lassen sich beispielsweise sechs besondere Karten finden, und jeder Punkt der Kugeloberfläche liegt in mindestens einer dieser Karten. Diese sechs Karten erhält man, indem man Gl. (6.42) nach jeweils einer der Koordinaten x_i (i = 1, 2, 3) auflöst und dann noch die beiden Vorzeichen der Wurzel berücksichtigt. Jede der Karten beschreibt eine Halbkugel.

Auch Kurven bzw. Wege lassen sich durch Bedingungen beschreiben. Beispielsweise erhält man im Allgemeinen eindimensionale Linien, wenn man zwei Flächen schneidet, also zwei Bedingungen an die Koordinaten stellt:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$
 $f_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$ (6.43)

Zu einer Parameterdarstellung gelangt man in diesem Fall, indem man beide Bedingungen nach einem Parameter, beispielsweise nach $t = x_1$ auflöst:

$$\gamma(t) = (t, x_2(t), x_3(t)). \tag{6.44}$$

Ganz allgemein beantwortet der Satz zu impliziten Funktionen die Frage, wann sich eine ddimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n durch beispielsweise die ersten d Koordinaten beschreiben lässt:

Satz (implizite Funktionen): Es seien $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (mit i = 1, ..., n - d) jeweils einmal stetig ableitbare Funktionen über einem Teilgebiet des \mathbb{R}^n . Weiterhin sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, der den Bedingungen $f_i(x_0) = 0$ (i = 1, ..., n - d) genügt. Falls an der Stelle x_0 die Determinante

$$\left|\frac{\partial f_i(x_1, ..., x_n)}{\partial x_j}\right|_{x=x_0} \qquad j = d+1, d+2, ..., n$$
(6.45)

nicht verschwindet, gibt es eine Umgebung U_0 von x_0 , sodass sich die Bedingungen $f_i(x_1, ..., x_n) = 0$ zu $x_j = x_j(x_1, ..., x_d)$ auflösen lassen, und

$$x = (u_1, \dots, u_d, x_{d+1}(u_1, \dots, u_d), \dots, x_n(u_1, \dots, u_d))$$
(6.46)

eine lokale Parametrisierung der d-dimensionalen Untermannigfaltigkeit in der Umgebung von $x_0 \in U_0$ darstellt.

Ein Beispiel bilden auch die im nächsten Abschnitt behandelten Kegelschnitte: Hierbei wird ein Doppelkegel mit einer Ebene geschnitten (es geht also um die Schnittmenge von zwei Flächen und somit um spezielle Kurven, die sich alle als Kurven in einer Ebene darstellen lassen).

6.5 Kegelschnitte

Gleichsam als Anwendung einiger der in diesem Kapitel eingeführten Konzepte soll nun eine wichtige Klasse von Kurven betrachtet werden, die man als *Kegelschnitte* [conal sections] bezeichnet. Diese Kurven erhält man als Schnittkurven aus der Mantelfläche eines Doppelkegels im \mathbb{R}^3 mit einer Ebene. Neben den Ellipsen und Hyperbeln erhält man als Grenzfälle noch Kreise und Parabeln (sowie streng genommen noch einzelne Punkte und sich schneidende Geraden). Alle diese Kurven können beispielsweise bei der Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld eines anderen Körpers (das so genannte *Kepler-Problem*) auftreten.

Ein Doppelkegel (der Einfachheit halber mit Steigung 1) lässt sich durch folgende Bedingung beschreiben:

$$x^2 + y^2 = z^2, (6.47)$$

bzw. in der Parameterdarstellung:

$$x(u,v) = u$$
 $y(u,v) = v$ $z(u,v) = \pm \sqrt{u^2 + v^2}$. (6.48)

(Wir verwenden hier die Komponentenschreibweise (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3) , da die Indexschreibweise in konkreten Formeln manchmal verwirrend sein kann.) Eine vollkommen andere aber äquivalente Parameterdarstellung wäre die folgende $(r \ge 0, 0 \le \varphi < 2\pi)$:

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi \quad y(r,\varphi) = r\sin\varphi \quad z(r,\varphi) = r.$$
(6.49)

Eine Ebene durch den Nullpunkt können wir durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0$$
 bzw. $a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$, (6.50)

wobei \boldsymbol{a} ein beliebiger (von Null verschiedener) Vektor ist. Die durch obige Gleichung beschriebene Ebene besteht aus allen Vektoren, die auf \boldsymbol{a} senkrecht stehen. Soll die Ebene nicht durch den Nullpunkt sondern durch den Punkt $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ verlaufen, folgt:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$$
 bzw. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. (6.51)

Als allgemeine Darstellung einer Ebene erhalten wir somit:

$$a_1x + a_2y + a_3z = b. (6.52)$$

Anmerkung: Diese Gleichung ist noch überbestimmt. Sie enthält vier freie Parameter, zur Charakterisierung einer allgemeinen Ebene sind jedoch nur drei Parameter notwendig. Für $b \neq 0$ können wir obige Gleichung noch durch b dividieren und finden, dass eine allgemeine Ebene sogar durch die Bedingung

$$a_1'x + a_2'y + a_3'z = 1 \tag{6.53}$$

beschrieben wird. Ist b = 0, geht die Ebene also durch den Nullpunkt, können wir durch ein nichtverschwindendes a_i dividieren, d.h., einen der Koeffizienten vor x, y oder z normieren.

Wir betrachten zunächst den Fall $a_3 \neq 0$ (das bedeutet, die Ebene liegt nicht parallel zur 3-Achse); dann können wir für die Ebene auch schreiben

$$z = a_1 x + a_2 y + b \,. \tag{6.54}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir noch $a_2 = 0$ und schreiben $a_1 = a$:

$$z = ax + b. \tag{6.55}$$

Die Ebene ist in diesem Fall parallel zur 2-Achse. Dies bedeutet keine Einschränkung, da das Problem ohnehin symmetrisch unter Drehungen um die 3-Achse ist.

Einsetzen in die Kegelgleichung (6.47) liefert:

$$x^2 + y^2 = (ax+b)^2, (6.56)$$

bzw.

$$(1 - a^2)x^2 - 2abx + y^2 = b^2. ag{6.57}$$

Anmerkung: Wir haben immer noch zwei Bestimmungsgleichungen: Gleichung 6.55 erlaubt es uns, die Koordinate z durch x auszudrücken, und Gleichung 6.57 erlaubt es uns, y durch x auszudrücken.

Wir erhalten also eine Kurve im \mathbb{R}^3 , wobei wir x als Kurvenparameter verwenden. Die Parameterdarstellung $\boldsymbol{x}(t)$ dieser Kurve wäre somit:

$$x(t) = t y(t) = \pm \sqrt{b^2 - (1 - a^2)t^2 + 2abt} z(t) = at + b. (6.58)$$

Im Folgenden betrachten wir nur die Projektionen dieser Kurve auf die 1-2-Ebene. An den qualitativen Eigenschaften der Lösungen ändert sich dadurch nichts.

Allgemein können wir folgende Fälle unterscheiden:

1. Kreise:

Der Spezialfall a = 0 (waagerechte Ebene) führt auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 = b^2. ag{6.59}$$

Dies ist die Kreisgleichung. Für b = 0 erhalten wir als Lösung nur den Punkt (0, 0, 0).

2. Ellipsen:

Die Bedingung $a^2 < 1$ führt auf eine Gleichung der Form ($\alpha > 0$):

$$\alpha (x - \gamma)^2 + y^2 = \beta^2 \,. \tag{6.60}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit Zentrum $(\gamma, 0)$.

3. Parabeln:

Für $a^2 = 1$ erhalten wir:

$$y^2 = b^2 \pm 2bx \,. \tag{6.61}$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel.

4. Hyperbeln: Für $a^2 > 1$ folgt eine Gleichung der Form ($\alpha > 0$):

$$-\alpha(x-\gamma)^2 + y^2 = \beta^2.$$
 (6.62)

Dies entspricht einer Hyperbelgleichung.

Wir müssen uns nun noch überlegen, welche Gleichung wir für $a_3 = a_2 = 0$ erhalten. In diesem Fall lautet die Gleichung für die Ebene

$$ax = b \tag{6.63}$$

Einsetzen in die Kegelgleichung 6.47 liefert:

$$\frac{b^2}{a^2} + y^2 = z^2 \quad \text{oder} \quad z^2 - y^2 = \gamma^2.$$
(6.64)

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, die sich asymptotisch den Geraden $z = \pm y$ annähert. Für b = 0 erhalten wir diese beiden sich schneidenden Geraden als Lösung.

6.6 Koordinatensysteme

Wir haben schon mehrfach erwähnt, dass man die Punkte des \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 nicht nur als Vektoren auffassen kann, die sich bezüglich einer Basis des Vektorraums in Komponenten zerlegen lassen, sondern dass man sie auch allgemeiner durch Koordinaten beschreiben kann, die mit der Eigenschaft des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 als Vektorraum nichts mehr zu tun haben. Beispielsweise lässt sich die Summe zweier Vektoren im Allgemeinen auch nicht mehr als einfache Summe dieser Koordinaten ausdrücken. Außerdem ist der *Parameterbereich* dieser Koordinaten (der Wertebereich, den diese Koordinaten zur eindeutigen Beschreibung von Punkten annehmen können) nicht immer gleich dem \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 , sondern nur gleich einer Teilmenge.

Strenggenommen fasst man den \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 in diesem Fall nicht mehr als Vektorraum auf, sondern als einen Spezialfall sogenannter Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten zunächst einige bekannte Beispiele für Koordinaten im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

6.6.1 Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2

In zwei Dimensionen können wir einen Punkt durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und den Winkel φ zwischen der Verbindungslinie zum Nullpunkt und der x-Achse beschreiben. Das führt auf die Darstellung eines Punktes in *Polarkoordinaten*:

$$(x_1, x_2) \simeq (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \tag{6.65}$$

Die Komponenten $\{x_i\}$ lassen sich somit durch r und φ ausdrücken:

$$x_1 = r\cos\varphi \qquad x_2 = r\sin\varphi. \tag{6.66}$$

Diese Bedingungen sind - außer im Ursprung - umkehrbar, d.h., r und φ lassen sich durch x^1 und x^2 ausdrücken:

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$
 $\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$. (6.67)

Der Nullpunkt (0,0) ist ein singulärer Punkt der Polarkoordinaten, da in diesem Punkt φ nicht eindeutig durch x_i gegeben ist. Streng genommen gelten die Polarkoordinaten also nur für den \mathbb{R}^2 ohne den Punkt $\{(0,0)\}$. Um allerdings eine eindeutige Umkehrfunktion für φ als Funktion von x_2, x_1 zu erhalten, muss man den Arkustangens stetig erweitern:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0, y \ge 0\\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & x > 0, y < 0\\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & x < 0\\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0\\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$
(6.68)

Auf diese Unterscheidungen gehe ich im Folgenden nicht mehr ein.

Die Koordinaten (r, φ) nehmen folgende Werte an: $r \ge 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Der Parameterbereich $U \in \mathbb{R}^2$ der Koordinaten ist also ein Streifen (Breite 2π) oberhalb der positiven reellen Achse.

6.6.2 Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3

Erweitern wir die Polarkoordinaten des \mathbb{R}^2 auf den \mathbb{R}^3 , erhalten wir Zylinderkoordinaten:

$$(x_1, x_2, x_3) \simeq (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$
(6.69)

Die alten Koordinaten x_i lassen sich wieder durch die neuen Koordinaten ausdrücken:

$$x_1 = r\cos\varphi \quad x_2 = r\sin\varphi \quad x_3 = z, \tag{6.70}$$

ebenso lassen sich die neuen Koordinaten durch die alten Koordinaten ausdrücken:

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$
 $\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$ $z = x_3$. (6.71)

Die Zylinderkoordinaten sind eindeutig sofern $r \neq 0$, also außer auf der z-Achse, wo der Winkel φ nicht festliegt.

Der Parameterbereich für rund φ ist gleich ihrem Bereich für Polarkoordinaten, zkann beliebige reelle Werte annehmen.

6.6.3 Kugelkoordinaten

Wie schon mehrfach erwähnt, lässt sich ein Punkt im \mathbb{R}^3 auch durch seinen Abstand r vom Ursprung sowie zwei Winkel charakterisieren. Der Winkel θ entspricht dem Winkel zwischen der Verbindungslinie des Punkts zum Ursprung und der z-Achse, und der Winkel φ entspricht dem Winkel zwischen der Projektion dieser Verbindungslinie auf die xy-Ebene und der x-Achse. Dann gilt:

$$(x_1, x_2, x_3) \simeq (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta).$$
(6.72)

Auch diese Beziehungen lassen sich umkehren:

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2} \qquad \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1} \qquad \theta = \arctan \frac{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}}{x_3}.$$
 (6.73)

Beide Winkel sind für r = 0 nicht definiert. Außerdem ist φ nicht definiert für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$. Damit sind Kugelkoordinaten auf der gesammten z-Achse nicht wohl definiert.

Die Definitionsbereiche für die Parameter sind: $r \ge 0, \varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$.

6.6.4 Allgemeine Koordinatentransformationen

Eine Koordinatentransformation auf dem \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derart, dass sich jeder Punkt $p \simeq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ durch die Koordinaten $(u_1, u_2, ..., u_n)$ ausdrücken lässt. Es gilt somit:

$$\boldsymbol{x} \simeq (x_1, x_2, ..., x_n) \simeq (x_1(u_1, u_2, ..., u_n), x_2(u_1, u_1, ..., u_n), ..., x_n(u_1, u_2, ..., u_n)).$$
(6.74)

Jede Komponente x_i ist also eine Funktion der Koordinaten $\{u_i\}$:

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n). (6.75)$$

Umgekehrt soll sich auch jede Koordinate u_i als Funktion der $\{x_i\}$ schreiben lassen:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n). (6.76)$$

Eine Koordinatentransformation soll also bijektiv sein und daher eine eindeutige inverse Abbildung besitzen. Punkte, an denen dies nicht möglich ist, bezeichnet man als singuläre Punkte der Koordinatentransformation. In vielen Fällen wird man nur einen bestimmten Ausschnitt des \mathbb{R}^n (beispielsweise den \mathbb{R}^n ohne gewisse Punkte, Linien oder Flächen) durch die neuen Koordinaten eindeutig ausdrücken können. Die folgenden Überlegungen gelten immer nur für reguläre Punkte p, in deren Umgebung das Koordinatensystem frei von Singularitäten ist.

In jedem regulären Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ schneiden sich n Kurven γ_i , die man erhält, indem man die Koordinaten $\{u_j\}$ $(j \neq i)$ festhält und $\boldsymbol{x}(u_i)$ nur noch als Funktion des einen Parameters u_i auffasst. Zu jeder dieser Kurven können wir im Punkte p den Tangentialvektor bilden:

$$\boldsymbol{f}_{i}(p) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u_{1},..,u_{n})}{\partial u_{i}}.$$
(6.77)

In regulären Punkten p sind diese n Vektoren von null verschieden und linear unabhängig. Sie spannen also einen n-dimensionalen Vektorraum auf. Nach den Überlegungen der vorherigen Abschnitte

handelt es sich bei diesem Vektorraum strenggenommen um den Tangentialraum im Punkte p. Es ist der "Raum der Geschwindigkeiten", mit denen der Punkt p durchlaufen werden kann.

Wir verwenden in der Newton'schen Mechanik gerne den Raum \mathbb{R}^n als den Raum der möglichen Lagen von Punkten. Dabei haben wir willkürlich einen Ursprung (der dem Nullvektor entspricht) festgelegt. Einen flachen Raum ohne Auszeichnung eines Nullpunkts bezeichnet man als affinen euklidischen Raum (vgl. Abschnitt 2.8).

Der \mathbb{R}^n als "Raum" ist natürlich verschieden von dem Vektorraum \mathbb{R}^n , der an jedem Punkt pals Tangentialraum (Raum der Geschwindigkeiten) konstruiert werden kann. Auch wenn eine Identifikation oft vorgenommen wird, sollte man sich der Unterschiedung bewusst sein. Anhand der physikalischen Dimension werden die Konzepte meist unterschieden: Während die Koordinaten von Raumpunkten meist die Dimension [Länge] haben, haben Geschwindigkeiten die Dimension [Länge/Zeit].

6.6.5 Weitere spezielle orthogonale Koordinatensysteme

Die folgende Liste spezieller orthogonaler Koordinatensysteme stammt größtenteils von [Wiki-orthogonal]. Neben den Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten treten in der Physik gelegentlich folgende Koordinatensysteme auf:

2-dimensionale parabolische Koordinaten und parabolische Zylinderkoordinaten

Die 2-dimensionalen parabolischen Koordinaten (u, v) sind definiert durch die Transformation:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \qquad y = uv \qquad u \in (-\infty, +\infty), v \in [0, \infty).$$
(6.78)

Die parabolischen Zylinderkoordinaten sind ein 3-dimensionales Koordinatensystem, bei dem die x, y-Koordinaten nach obiger Vorschrift in (u, v)-Koordinaten transformiert werden und die z-Koordinate unverändert bleibt, also z = z.

3-dimensionale parabolische Koordinaten

Die 3-dimensionalen parabolischen Koordinaten sind ein orthogonales Koordinatensystem, definiert durch die Transformation:

$$x = uv\cos\varphi$$
 $y = uv\sin\varphi$ $z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ $u \in [0, \infty), v \in [0, \infty), \phi \in [0, 2\pi).$ (6.79)

Elliptische Koordinaten und elliptische Zylinderkoordinaten

Elliptische Koordinanten sind ein 2-dimensionales orthogonales Koordinatensystem, definiert durch die Transformation

$$x = a \cosh u \cos \phi \qquad y = a \sinh u \sin \phi \qquad u \in [0, \infty), \phi \in [0, 2\pi).$$
(6.80)

Die elliptischen Zylinderkoordinaten sind ein 3-dimensionales orthogonales Koordinatensystem, bei dem die x, y-Koordinaten nach obiger Vorschrift in (u, ϕ) -Koordinaten transformiert werden und die z-Koordinate unverändert bleibt, also z = z.

2-dimensionale bipolare Koordinaten und bipolare Zylinderkoordinaten

2-dimensionale bipolare Koordinanten sind ein orthogonales Koordinatensystem, definiert durch die Transformation

$$x = \frac{a \sinh u}{\cosh u - \cos \phi} \qquad \qquad y = \frac{a \sin \phi}{\cosh u - \cos \phi} \qquad \qquad u \in [0, \infty), \phi \in [0, 2\pi).$$
(6.81)

6.6. KOORDINATENSYSTEME

Die bipolaren Zylinderkoordinaten sind ein 3-dimensionales orthogonales Koordinatensystem, bei dem die x, y-Koordinaten nach obiger Vorschrift in (u, ϕ) -Koordinaten transformiert werden und die z-Koordinate unverändert bleibt, also z = z.

Toroidale Koordinaten

Toroidale Koordinaten sind ein 3-dimensionales orthogonales Koordinatensystem, definiert durch die Transformation

$$x = \frac{a \sinh v \cos \varphi}{\cosh v - \cos \phi} \qquad y = \frac{a \sinh v \sin \varphi}{\cosh v - \cos \phi} \qquad z = \frac{a \sin \varphi}{\cosh v - \cos \phi} \tag{6.82}$$

$$v \in [0, \infty)$$
, $\phi \in (-\pi, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. (6.83)

Bisphärische Koordinaten

Bisphärische Koordinaten sind ein 3-dimensionales orthogonales Koordinatensystem, definiert durch die Transformation

$$x = \frac{a\sin\phi\cos\varphi}{\cosh v - \cos\phi} \qquad \qquad y = \frac{a\sin\phi\sin\varphi}{\cosh v - \cos\phi} \qquad \qquad z = \frac{a\sinh v}{\cosh v - \cos\phi} \tag{6.84}$$

$$v \in [0, \infty)$$
, $\phi \in (-\pi, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. (6.85)

Gestreckte und gestauchte sphärische Koordinaten

Diese beiden 3-dimensionalen orthogonalen Koordinatensysteme entstehen aus den sphärischen Koordinaten, indem die Kugeln zu r = const entlang der z-Achse zu rotationssymmetrischen Ellipsoiden gestreckt bzw. gestaucht werden. Die Transformationen zu den gestreckten sphärischen Koordinaten lauten

$$x = a \sinh u \sin \phi \cos \varphi$$
 $y = a \sinh u \sin \phi \sin \varphi$ $z = a \cosh u \cos \phi$ (6.86)

$$u \in [0, \infty), \ \phi \in [0, \pi], \ \varphi \in [0, 2\pi).$$
 (6.87)

Die Transformationen zu den gestrauchten sphärischen Koordinaten sind

$$x = a \cosh u \cos \phi \cos \varphi$$
 $y = a \cosh u \cos \phi \sin \varphi$ $z = a \sinh u \sin \phi$ (6.88)

$$u \in [0,\infty) , \ \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \ \varphi \in [0,2\pi) .$$

$$(6.89)$$

Kapitel 7

Mehrfachintegrale

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Integralen über Kurven, Flächen und allgemeinen Räumen. Ziel sind die Integralsätze von Stokes und Gauß. Streng genommen ist hierzu in der Analysis eine Einführung in die Maßtheorie notwendig, die ich jedoch auf ein Minimum reduziere. Infinitesimale Flächen- und Volumenelemente lassen sich auch aus einer gewissen Anschauung heraus erklären, und die teilweise sehr aufwendigen mathematischen Sätze in diesem Zusammenhang können wir hier ohnehin nicht beweisen. Trotzdem sollen im ersten Abschnitt einige Grundlagen behandelt werden, insbesondere auch, weil im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie solche Konzepte von Relevanz sind.

7.1 Elementare Einführung in die Maßtheorie

7.1.1 Messbare Mengen – σ -Algebren

Bei der Definition des Integrals haben wir einem Intervall [a, b] $(b \ge a)$ ein $Ma\beta$ [measure] zugeordnet, nämlich seine Länge: $\Delta([a, b]) = b - a$. Dieses Konzept soll im Folgenden auf mehrdimensionale Räume verallgemeinert werden. Die erste Frage, die sich dabei ergibt, ist, welchen Mengen man überhaupt ein Maß zuschreiben kann. Viele der Erörterungen aus diesem Abschnitt stammen aus [Lang 1973].

Wir können im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie die Problematik verdeutlichen: Gegeben sei eine Dartscheibe und wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Gebiet auf der Dartscheibe zu treffen. (Wir gehen von einem ungeübten Dartspieler aus, der zwar die Scheibe immer trifft, ansonsten aber gleichverteilt wirft). Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten (mathematischen) Punkt (x, y) zu treffen, muss gleich null sein, denn andernfalls wäre die Wahrscheinlichkeit, irgendeinen der überabzählbar vielen Punkte der Dartscheibe zu treffen, unendlich. Aber ist es sinnvoll, jeder beliebigen Teilmenge der Dartscheibe eine Wahrscheinlichkeit zuzuschreiben, diese Menge "zu treffen"?

Es zeigt sich, dass es Mengen gibt, denen man kein Maß zuschreiben kann (auch nicht das Maß null). Ein Beispiel ist die Menge der Äquivalenzklassen von reellen Zahlen modulo rationalen Zahlen (zwei reelle Zahlen sind in diesem Fall äquivalent, wenn ihre Differenz eine rationale Zahl ist). Um solche Mengen ausschließen zu können, definiert man zunächst die "Menge der messbaren Mengen".

Zur Definition von Mengen, denen man sinnvollerweise ein Maß zuschreiben kann (eventuell natürlich auch das Maß 0 oder auch das Maß ∞), definieren wir zunächst eine sogenannte σ -Algebra (gesprochen "Sigma-Algebra").

Definition: Eine σ -Algebra einer Menge Ω ist eine Menge Σ von Teilmengen aus Ω (also $\Sigma \subset P(\Omega)$), sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1. Die leere Menge ist Element von $\Sigma: \emptyset \in \Sigma$.
- 2. Zu jedem Element $A \in \Sigma$ ist auch das Komplement von A (als Teilmenge von Ω) Element von $\Sigma: A \in \Sigma \Rightarrow (\Omega A) \in \Sigma$.
- 3. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare (bzw. abzählbar unendliche) Folge von Elementen aus Σ , dann ist auch deren Vereinigung in Σ :

$$A_n \in \Sigma \implies \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \Sigma.$$
 (7.1)

Aus diesen Axiomen folgt sofort, dass auch die Menge Ω selbst ein Element von Σ ist: $\Omega \in \Sigma$. Von je zwei Elementen $A, B \in \Sigma$ ist auch deren Durchschnitt in Σ , da der Durchschnitt gleich dem Komplement der Vereinigung der Komplemente von A und B ist: $A \cap B = \Omega - (\Omega - A) \cup (\Omega - B)$. Dasselbe gilt für jede abzählbar unendliche Schnittmenge von Elementen aus Σ : Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbar (unendliche) Folge von Elementen aus Σ , dann ist auch $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_n = (\Omega - B_n)$ eine abzählbar (unendliche) Folge von Elementen aus Σ , deren Vereinigung ist ebenfalls in Σ , und das Komplement dieser Vereinigung ist die Schnittmenge der (B_n) . Und natürlich sind auch Komplemente von zwei Elementen A und B, z.B. A - B, wieder in Σ .

Dadurch, dass auch Komplemente eines Elements von Σ wieder in Σ sind, sind σ -Algebren allgemeiner als Topologien, obwohl die beiden Definitionen (vgl. 3.1) sehr ähnlich sind. Falls Ω auch ein topologischer Raum ist (beispielsweise \mathbb{R}^n oder jeder metrische Raum), bezeichnet man die kleinste (gröbste) σ -Algebra, die alle offenen Mengen enthält, als *Borel-Algebra*. Damit enthält eine Borel-Algebra auch alle abgeschlossenen Mengen. Eine Menge Ω mit einer σ -Algebra bezeichnet man als *messbaren Raum*, die Elemente von Σ nennt man *messbare Mengen*, und falls Ω eine Topologie hat und die σ -Algebra die Borel-Algebra ist, bezeichnet man die Teilmengen von Ω , die Elemente von Σ sind, als *Borel-messbar*.

Falls (Y, Σ') ein messbarer Raum ist und $f : \Omega \to Y$ eine Abbildung, sodass alle Urbilder von Elementen aus Σ' ebenfalls messbar sind (also $f^{-1}(S) \in \Sigma$ für alle $S \in \Sigma'$), dann bezeichnet man f als messbar. Falls (Ω, Σ) ein messbarer Raum ist und (M, T) ein topologischer Raum (vgl. 3.1), dann bezeichnet man eine Abbildung $f : \Omega \to M$ auch als messbar, wenn das Urbild von jeder offenen Menge messbar ist. Ist Y ein topologischer Raum und Σ' die Borel-Algebra zu der definierten Topologie, sind die beiden Definitionen äquivalent.

7.1.2 Maße

Bisher haben wir nur definiert, welche Mengen wir als messbar bezeichnen wollen (nämlich die Elemente einer σ -Algebra). Nun definieren wir ein (positives) $Ma\beta$ für solche Mengen. Dabei lassen wir auch explizit das Maß ∞ (beispielsweise für die gesamte reelle Achse) zu. Wir bezeichnen mit $[0, \infty]$ die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen einschließlich des "Elements" ∞ .

Definition: Set (Ω, Σ) ein messbarer Raum mit der σ -Algebra Σ , dann bezeichnet eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ ein (positives) Maß auf Ω , wenn gilt:

M1: $\mu(\emptyset) = 0$,

7.1. ELEMENTARE EINFÜHRUNG IN DIE MASSTHEORIE

M2: Für jede abzählbare (oder abzählbar unendliche) Folge (A_n) von Elementen aus Σ , die paarweise disjunkt sind (also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$), gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$
(7.2)

(Bei endlichen Folgen erstreckt sich die Vereinigung bzw. die Summe entsprechend nur über endlich viele Mengen bzw. Terme.)

Aus dieser Definition folgt unmittelbar: Für $A \subset B$ (beides Elemente aus Σ) gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$. Beweis: *B* lässt sich als Vereinigung der beiden disjunkten Mengen *A* und *B* – *A* schreiben und das Maß einer messbaren Menge kann nicht negativ sein.

Manchmal möchte man Aussagen über Ω treffen, die "fast überall" [almost everywhere] gelten. Damit ist gemeint, dass die Punkte $z \in \Omega$, bei denen die Aussage falsch ist, eine Menge vom Maß null bilden. Beispielsweise können wir sagen, dass eine Funktion über Ω "fast überall" verschwindet. Das bedeutet, die Menge { $z \in \Omega | f(z) \neq 0$ } hat das Maß null, oder $\mu(\{z \in \Omega | f(z) \neq 0\}) = 0$.

7.1.3 Wahrscheinlichkeitsmaße

Definition: Erfüllt ein Maß zusätzlich noch die Eigenschaft

M3: $\mu(\Omega) = 1$,

so bezeichnet man das Maß als <u>normiert</u> [normalized]. Den Raum (Ω, Σ, μ) nennt man einen Wahrscheinlichkeitsraum [probability space]. Ω ist der Raum der <u>Elementarereignisse</u> [elementary events], Σ die Menge der möglichen <u>Ereignisse</u> [events], denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann, und μ ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion [probability function].

Man beachte, dass Ereignisse auch Mengen von Elementarereignissen sein können. Beispielsweise spricht man von einem Ereignis, wenn bei einem Dartwurf ein bestimmtes Feld (das aus überabzählbar unendlich vielen Punkten besteht und damit die Vereinigung überabzählbar unendlich vieler Elementarereignisse ist) getroffen wird, oder wenn bei einem Wurf mit zwei Würfeln die Gesamtaugenzahl 7 erreicht wird. Bei diskreten - und erst recht bei endlichen - Mengen Ω sind Ereignisse meist beliebige Elemente der Potenzmenge, also $\Sigma = P(\Omega)$.

Definition: Eine Abbildung von $X : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $X^{-1}(U)$ für jede offene Menge $U \in \mathbb{R}$ messbar ist (also ein Element von Σ), bezeichnet man als Zufallsvariable [random variable]. Jede Zufallsvariable definiert eine Verteilungsfunktion auf den reellen Zahlen:

$$P_X(x) = \mu(X^{-1}[-\infty, x]) = \mu(\{a \in \Omega | X(a) \le x\}).$$
(7.3)

Der reellen Variablen x wird also das Maß der Menge von Elementen aus Ω zugeordnet, die unter der Abbildung X auf Werte kleiner oder gleich x abgebildet werden. $P_X(x)$ ist eine monoton steigende Funktion, die für $x \to -\infty$ gegen den Wert 0 und für $x \to +\infty$ gegen den Wert 1 geht. Die Ableitung von $P_X(x)$ nach x definiert eine Wahrscheinlichkeitsdichte [probability density] zu der Zufallsvariablen X.

$$w_X(x) = \frac{\mathrm{d}P_X(x)}{\mathrm{d}x} \,. \tag{7.4}$$

Es kann vorkommen, dass $P_X(x)$ Sprungstellen hat, sodass $w_X(x)$ im Sinne einer Funktion an diesen Stellen nicht definiert ist. Bei $w_X(x)$ handelt es sich um eine Dichte, die als Distribution aufzufassen ist. Mehr dazu in Kap. 10.

7.1.4 Integrale - Riemann, Lebesgue und Stieltjes

Zur Definition eines Integrals über eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (oder auch \mathbb{C}) betrachten wir zunächst sogenannte *Treppenfunktionen* [step functions]. Allgemein kann das Bild von f ein beliebiger Banach-Raum sein (siehe Kap. 12.1.6), also ein normierter, bezüglich der Norm vollständiger Vektorraum, wir beschränken uns hier jedoch auf reellwertige bzw. komplexwertige Funktionen.

Definition: Eine Funktion $f_{\mathrm{T}}: \Omega \to \mathbb{R}$ heißt <u>Treppenfunktion</u> über einem Maßraum (Ω, Σ, μ) , wenn die Bildmenge von f_{T} nur endlich viele Werte $x_i \in \mathbb{R}$ umfasst (bzw. die Urbilder $f_{\mathrm{T}}^{-1}(x)$ für alle außer endlich vielen Werten von x die leere Menge bilden), und $f_{\mathrm{T}}^{-1}(x_i) = A_i$ eine messbare Menge in Ω ist.

Die (endliche) Menge dieser Urbilder, $\{A_i\}$, besteht aus disjunkten Elementen $(A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$) und $\bigcup_i A_i = \Omega$. Diese Menge bildet somit eine (endliche) Partition von Ω . Für eine solche Treppenfunktion $f_{\rm T}$ definieren wir

$$\int_{\Omega} f_{\mathrm{T}} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i} f_{\mathrm{T}}(A_{i})\mu(A_{i}) \,. \tag{7.5}$$

Man beachte, dass $f_{\rm T}$ auf der Menge A_i einen konstanten Wert annimmt, insofern ist $f_{\rm T}(A_i) = x_i$ wohl definiert. Falls die Funktion $f_{\rm T}$ nur auf einer Teilmenge von Ω definiert sein sollte, kann man die folgenden Überlegungen natürlich auf diese Teilmenge einschränken.

Zu einer beliebigen stückweise stetigen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kann man immer eine Folge aus Treppenfunktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ finden, die fast überall (d.h., überall außer auf einer Menge vom Maß null) gleichmäßig auf Ω gegen f konvergiert. Von zwei solchen Folgen (f_n) und (g_n) , die fast überall gegen dieselbe Funktion konvergieren, ist $|f_n - g_n|$ eine Folge, die fast überall gegen 0 konvergiert. Daher bilden die Integrale über $|f_n - g_n|$ eine Nullfolge und man kann zeigen, dass die Integrale über (f_n) und (g_n) gegen denselben Wert konvergieren. Diesen Wert bezeichnet man als das Integral über f:

$$\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} f_n \,\mathrm{d}\mu \,. \tag{7.6}$$

Oftmals schreiben wir für die linke Seite auch

$$\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \,. \tag{7.7}$$

Die Klasse von Funktionen, auf denen diese Definition des Integrals anwendbar ist, lässt sich noch auf die sogenannten *Regelfunktionen* verallgemeinern. Dabei handelt es sich um Funktionen (über Intervallen von \mathbb{R}), die an jedem Punkt einen rechtseitigen und einen linksseitigen Grenzwert haben (wobei diese Grenzwerte verschieden sein können und auch nicht mit dem Wert der Funktion übereinstimmen müssen). Solche Funktionen können in endlichen Intervallen abzählbar unendlich viele Sprungstellen haben.

Das Riemann'sche Integral

Die obige Definition einer Treppenfunktion ist sehr allgemein. Von den Urbildmengen $f^{-1}(x_i) = A_i$ wird lediglich vorausgesetzt, dass sie messbar sind. Manche Definitionen schließen noch mit ein, dass es sich bei $\{A_i\}$ um eine endliche Menge von Intervallen handeln soll, sodass die Treppenfunktion stückweise stetig ist. Dies führt auf das Riemann'sche Integral.

Zur Definition des Riemann'schen Integrals (zunächst als Integral über Intervalle von \mathbb{R}) wird ein Intervall [a, b] im Definitionsbereich einer stetigen Funktion f(x) in Teilintervalle aufgeteilt. Man

7.1. ELEMENTARE EINFÜHRUNG IN DIE MASSTHEORIE

schreibt also

$$[a,b] = [a,a+\Delta x) \cup [a+\Delta x,a+2\Delta x) \cup \dots [x_i,x_i+\Delta x) \cup \dots [b-\Delta x,b]$$

$$(7.8)$$

mit $\Delta x = (b-a)/N$. Jedem Teilintervall ordnet man das Maß $\mu([x_i, x_i + \Delta x)) = \Delta x$ zu und definiert zu einer stetigen Funktion f(x) die beiden Treppenfunktionen

$$f_{u}(x) = \min_{x \in [x_i, x_i + \Delta x]} f(x) \quad \text{für } x \in [x_i, x_i + \Delta x)$$
(7.9)

und

$$f_{o}(x) = \max_{x \in [x_i, x_i + \Delta x]} f(x) \quad \text{für } x \in [x_i, x_i + \Delta x).$$

$$(7.10)$$

Für die Definition des Integrals über f(x) kann man beide Treppenfunktionen verwenden (oder, wie in Kapitel 3.8 geschehen, die Höhe der Treppenstufen z.B. durch den Funktionswert an den linken oder rechten Intervallgrenzen festlegen). In Bereichen, in denen f(x) monoton steigend oder fallend ist, sind die Integrale über die Treppenfunktionen obere bzw. untere Schranken für den Grenzwert und ihre Differenz durch $|f_{\text{max}} - f_{\text{min}}|\Delta x$ abschätzbar, wobei f_{max} und f_{min} der Maximal- bzw. Minimalwert von f(x) in einem solchen Monotoniebereich ist. Der Grenzwert beider Summen konvergiert und ist für (stückweise) stetige Funktionen gleich. Man spricht in diesem Fall von einem *Riemann'schen Integral.*

Eine naheliegende Verallgemeinerung der obigen Definition, die immer noch unter den Begriff des Riemann'schen Integrals fällt, besteht darin, die Intervalle durch Punkte $\{x_i\}$ mit $x_0 = a$ und $x_N = b$ und $x_i < x_{+1}$ zu definieren, also

$$[a,b] = [a,x_1) \cup [x_1,x_2) \cup [x_2,x_3) \cup \dots \cup [x_i,x_{i+1}] \cup \dots \cup [x_{N-1},b]$$

$$(7.11)$$

und als Maß für ein Intervall $\mu([x_i, x_{i+1}]) = x_{i+1} - x_i$ zu wählen. Die Intervalle können also unterschiedliche Größe haben. Man muss allerdings für den Grenzfall $N \to \infty$ die Intervallgrößen gleichmässig gegen 0 gehen lassen.



Abbildung 7.1: Vergleich zwischen Riemann'schem Integral und Lebesgue-Integral. Beim Riemann'schen Integral wird der Definitionsbereich in Intervalle aufgeteilt und eine zugehörige Treppenfunktion definiert; beim Lebesgue-Integral wird der Bildbereich in Intervalle unterteilt und dazu eine Treppenfunktion definiert.

Das Lebesgue-Integral

Beim Lebesgue-Integral sind allgemeinere Treppenfunktionen zugelassen als beim Riemann'schen Integral. Hier wird der Bildbereich einer Funktion in Intervalle aufgeteilt und es werden den Urbildern zu diesen Intervallen ihre Maße zugeschrieben.

KAPITEL 7. MEHRFACHINTEGRALE

Sei für eine Funktion über dem Intervall [a, b] definiert $f_{\max} = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ und $f_{\min} = \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Dieser Bereich wird in N Teilintervalle unterteilt:

$$[f_{\min}, f_{\max}] = [f_{\min}, f_{\min} + \Delta y) \cup [f_{\min} + \Delta y, f_{\min} + 2\Delta y) \cup \dots [f_{\max} - \Delta y, f_{\max}]$$
(7.12)

mit $\Delta y = |f_{\text{max}} - f_{\text{min}}|/N$. Jedes dieser Intervalle ist eine messbare Menge aus \mathbb{R} , daher ist auch das Urbild von jedem dieser Intervalle messbar (da f(x) eine messbare Funktion sein soll). Wir definieren nun zwei Treppenfunktionen über die Vorschrift:

$$\begin{cases} f_{o}(x) = y_{i} + \Delta y \\ f_{u}(x) = y_{i} \end{cases}$$
 für $x \in A_{i}$ mit $A_{i} = f^{-1}([y_{i}, y_{i} + \Delta y]).$ (7.13)

Offenbar liegt f(x) zwischen diesen beiden Treppenfunktionen und daher liegt auch der Grenzwert für das Integral zwischen den Integralen zu diesen Funktionen. Das nach dieser Vorschrift gewonnene Integral (Gl. 7.6) bezeichnet man als das *Lebesgue-Integral* über die Funktion f(x). Für stückweise stetige Funktionen sind beide Definitionen (Riemann-Integral und Lebesgue-Integral) gleich.

Das Lebesgue-Integral lässt sich jedoch auch für Funktionen definieren, für die das Riemann-Integral nicht existiert. Ein Beispiel ist die Dirichlet-Funktion: D(x) = 1 für $x \in \mathbb{Q}$ und D(x) = 0 sonst (also für irrationale Zahlen x). Im Sinne der allgemeinen Definition ist D(x) eine Treppenfunktion, und da das Maß der Menge der rationalen Zahlen in einem Intervall [a, b] null ist, verschwindet das Lebesgue-Integral über die Dirichlet-Funktion. Das Riemann'sche Integral über diese Funktion ist nicht definiert.

Das Stieltjes-Integral

Eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals, bei der allgemeinere Maße für die Intervalle zugelassen sind, ist das Stieltjes-Integral. Hier definiert man einePartition des Intervalls

$$[a,b] = [a,x_1) \cup [x_1,x_2) \cup \dots [x_i,x_{i+1}) \dots \cup [x_{N-1},b]$$
(7.14)

ähnlich wie beim Riemann-Integral sowie eine (monotone, aber nicht notwendigerweise stetige) Integratorfunktion P(x). Das einem Intervall zugeordnete Maß ist nun

$$\mu([x_i, x_{i+1})) = P(x_{i+1}) - P(x_i).$$
(7.15)

Man erhält das Riemann-Integral für P(x) = x. Allgemein schreibt man in diesem Fall $d\mu = dP(x)$.

Besonders interessant sind Stufenfunktionen für P(x), bei denen einzelne Punkte zum Integral beitragen. Auf diese Weise erhält man z.B. auch das sogenannte Dirac-Maß aus $P(x) = \Theta(x)$ (der Heaviside-Funktion), siehe auch Abschnitt 7.1.6 und Kapitel 10. Mit

$$P(x) = \Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(Heaviside-Funktion) (7.16)

folgt

$$\mu([x_i, x_{i+1})) = P(x_{i+1}) - P(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(7.17)

und somit

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\Theta(x) = f(0) \,. \tag{7.18}$$

Dieses Integral spielt daher in der Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. Stochastik eine wichtige Rolle. Es erlaubt auch Verallgemeinerungen zu Maßen, die nicht reellwertig sind. Beispielsweise kann P(x) den Projektionsoperator bezeichnen, der auf die Summe der Eigenräume eines selbst-adjungierten Operators zu den Eigenwerten $\lambda \leq x$ projiziert. Das Maß ist in diesem Fall operatorwertig und man kann die Spektraldarstellung von Matrizen auf eine Spektraldarstellung von Operatoren verallgemeinern.

7.1.5 Mehrfachintegrale - Der Satz von Fubini

Meist werden wir in höheren Dimensionen das Quadermaß verwenden (es sei $b_i \ge a_i$):

$$\mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n \Delta x_i$$
(7.19)

mit $\Delta x_i = b_i - a_i$. Das Maß verschwindet, wenn eines (oder mehrere) der Intervalle zu einem Punkt degeneriert (also $a_i = b_i$). Daher spielt es auch keine Rolle, ob wir einige (oder alle) der oberen bzw. unteren Grenzen der Intervalle durch offene Abschlüsse ersetzen; die Maße bleiben dieselben. Natürlich kann man aber auch allgemeinere Maße wie im letzten Abschnitt betrachten.

Das Quadermaß ist ein Beispiel für ein sogenanntes *Produktmaß* [product measure]. Es seien Ω_1 und Ω_2 zwei Räume mit den jeweiligen σ -Algebren Σ_1 und Σ_2 und es gebe Maße $\mu_1 : \Sigma_1 \to [0, \infty]$ und $\mu_2 : \Sigma_2 \to [0, \infty]$. Dann können wir auf $\Omega_{ges} = \Omega_1 \times \Omega_2$ eine σ -Algebra definieren, indem wir $\Sigma_{ges} = \{(A_1, A_2)\}$ mit $A_i \in \Sigma_i$ setzen. Auf Σ_{ges} definieren wir dann das Produktmaß:

$$\mu_{\text{ges}}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \qquad \forall A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2.$$
(7.20)

Wir betrachten nun eine Funktion (der Einfachheit halber wählen wir wieder die reellen Zahlen als Zielmenge)

$$f:\Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{7.21}$$

Es gilt der Satz von Fubini: Falls f bezüglich des Produktmaßes auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ integrierbar ist (und das Integral über |f| endlich), dann ist auch $f(\cdot, y) : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ für fast alle $y \in \Omega_2$ bezüglich μ_1 integrierbar,¹ und ebenso ist $f(x, \cdot) : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ für fast alle $x \in \Omega_1$ bezüglich μ_2 integrierbar und es gilt:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d\mu_{\text{ges}}(x, y) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$
(7.22)

Beim Satz von Fubini wird vorausgesetzt, dass f bezüglich des Produktmaßes auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ integrierbar ist, dann spielt die Reihenfolge der Integrationen keine Rolle. Eine Verallgemeinerung ist der *Satz von Tonelli*: Falls eines der beiden Integrale auf der rechten Seite von Gl. 7.22 für |f| existiert, existiert auch das andere Integral für |f| und für f gilt obige Gleichung.

In dem hier betrachteten Fall sind die Integrationen über Ω_1 und Ω_2 unabhängig. In vielen praktischen Beispielen ist das nicht der Fall. Insbesondere gilt dies bei kartesischen Koordinatensystemen nur, wenn die Integration insgesamt über einen Quader erfolgt. Hängen hingegen die Integrationsgrenzen für eine Variable von der anderen Variablen ab, gilt die Vertauschbarkeit der Integrale natürlich nicht mehr in dieser einfachen Form. Dies ist ein Grund, weshalb man in solchen Fällen oftmals zu anderen Koordinatensystemen übergeht, bezüglich derer die Integrationsgrenzen unabhängig werden.

7.1.6 Beispiele für Maße

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele für bekannte Maße angegeben.

¹Zur Notation: $f(\cdot, y)$ bezeichnet die Abbildung f bei festgehaltenem Argument $y \in \Omega_2$, die somit zu einer Abbildung auf Ω_1 wird; entsprechend ist $f(x, \cdot)$ bei festgehaltenem $x \in \Omega_1$ als Abbildung auf Ω_2 zu verstehen.

Die Gauß-Verteilung

Wir hatten in Abschnitt 7.1.3 angegeben, wie man von einer Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ) zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte $w_X(x)$ gelangt. Während μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über der (abstrakten) Menge Ω ist, handelt es sich bei $w_X(x)$ um eine Wahrscheinlichkeitsdichte über den reellen Zahlen und das zugehörige Maß ist:

$$\mathrm{d}P_X(x) = w_X(x)\,\mathrm{d}x\,.\tag{7.23}$$

Eine bekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist die $Gau\beta$ -Verteilung [Gaussian distribution] (auch Normalverteilung [normal distribution]):

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right).$$
(7.24)

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \, \mathrm{d}x = 1 \,. \tag{7.25}$$

Die beiden Parameter \bar{x} (der *Mittelwert* [mean value] der Verteilung) und σ^2 (die Varianz [variance]) legen die Gauß-Verteilung eindeutig fest. Den Parameter σ bezeichnet man auch als die *Standardab*weichung [standard deviation] der Gauß-Verteilung.

Zum Beweis der Normierungsbedingung berechnet man zunächst das Quadrat über die Gauß-Funktion:

$$N^{2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2}} dx\right)^{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^{2}+y^{2})} dx dy.$$
(7.26)

Durch einen Wechsel zu Polarkoordinaten erhält man (mit der Substitution $x = r^2$):

$$N^{2} = \int_{0}^{2\pi} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-r^{2}} r dr \right) d\varphi = 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-r^{2}} r dr = \pi \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = \pi.$$
(7.27)

Damit folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad \text{bzw.} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$
(7.28)

Die mehrdimensionale Gauß-Verteilung hat die Form

$$w(x_1, ..., x_n) = \frac{(\det A)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i) A_{ij}(x_j - \bar{x}_j)\right),$$
(7.29)

und das zugehörige Maß ist

$$dP_{\text{Gauss}}(x_1, ..., x_n) = \frac{(\det A)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i) A_{ij}(x_j - \bar{x}_j)\right) dx_1 dx_2 ... dx_n \,. \tag{7.30}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass es sich bei A um eine (nicht-entartete) positiv definite, symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^n handelt, d.h. $\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle > 0$ für $\boldsymbol{x} \neq 0$. Eine solche Bilinearform lässt sich durch eine unitäre Transformation im \mathbb{R}^n immer auf Diagonalform bringen (mit positiven Eigenwerten). Eine unitäre Transformation ändert das Integrationsmaß nicht, d.h. für $\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{x}$ (U unitär) gilt $d^n y = d^n x$.

Wie bei allen Wahrscheinlichkeitsdichten erhält man die Erwartungswerte [expectation values] von einer Funktion der Zufallsvariablen f(x) durch

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x) \,\mathrm{d}x \,,$$
(7.31)

speziell den Mittelwert und die Varianz:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x \, w(x) \, \mathrm{d}x \qquad \sigma^2 = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x})^2 w(x) \, \mathrm{d}x \,. \tag{7.32}$$

Die Gleichverteilung über einem Intervall

In vielen Computersprachen werden sogenannte *Pseudo-Zufallszahlgeneratoren* angeboten. Da es sich in Wirklichkeit um einen vordefinierten Algorithmus handelt, sind die Zahlen nicht in irgendeinem Sinne "wirklich" zufällig; dies ist der Grund für das Präfix "Pseudo". Oft liefert dieser Zufallszahlgenerator gleichverteilte Zahlen im Intervall (0, 1]. Das bedeutet insbesondere, dass jede Zahl in diesem Intervall (bei den Algorithmen handelt es sich immer um endlich viele Möglichkeiten, da die Rechengenauigkeit endlich ist) dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.

In unserem obigen Formalismus würde man die idealisierte Situation einer Gleichverteilung durch folgende Wahrscheinlichkeitsdichte beschreiben:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1] \\ 1 & x \in (0,1] \end{cases}$$
(7.33)

Das zugehörige Integrationsmaß ist w(x) dx. Die Verteilungsfunktion P(x) (die manchmal auch kumulative Wahrscheinlichkeit genannt wird), hat die Form:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & x \in (0, 1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$
(7.34)

Das Dirac-Maß

Das Dirac-Maß spielt in der Physik eine besondere Rolle, wenn man den idealisierten Fall einer Punktladung oder Punktmasse beschreiben möchte. Ganz allgemein kann man (kontinuierliche) Ladungsund Masseverteilungen durch eine Dichtefunktion $\rho_q(x)$ oder $\rho_m(x)$ darstellen, wobei x beispielsweise einen Punkt im \mathbb{R}^3 darstellt. Die Gesamtladung Q bzw. Gesamtmasse M ist dann

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_q(x) \,\mathrm{d}^3 x \quad , \quad M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_m(x) \,\mathrm{d}^3 x \,. \tag{7.35}$$

Im Idealfall einer Punktladung bzw. Punktmasse würde der Träger von $\rho(x)$ zu einem Punkt (z.B. x_0) schrumpfen, das Integral über diesen Punkt sollte aber immer noch die Gesamtladung bzw. Gesamtmasse ergeben. Das ist mit den üblichen Maßen (dargestellt durch Verteilungsfunktionen) nicht möglich. Für einen vorgegebenen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ist das *Dirac-Maß* definiert als (für alle messbaren $A \subset \mathbb{R}^3$):

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(7.36)

Das Integral über eine (stückweise stetige) Funktion f(x) ist in diesem Fall einfach $f(x_0)$. Satt μ_{x_0} schreibt man manchmal auch $\delta(x - x_0) dx$. Man beachte jedoch, dass $\delta(x)$ keine gewöhnliche Funktion ist, sondern nur durch das Integral definiert werden kann. Eine punktförmige Ladungsbzw. Massenverteilung würde dann durch $Q\delta(x - x_0)$ bzw. $M\delta(x - x_0)$ beschrieben. In der Physik definiert man solche Verteilungen üblicherweise als Distributionen (siehe Kap. 10) und nicht über die Maßtheorie. Letztendlich sind beide Zugänge aber gleichwertig.

Maße in Parameterräumen

Da wir uns in den kommenden Abschnitten ausführlich mit Integralen über parametrisierte Räume beschäftigen werden, soll hier nur ein kurzer Abriss der Idee erfolgen. Oftmals ist es sinnvoll, allgemeine Flächen oder Räume durch andere Koordinaten als kartesische Koordinatensysteme zu beschreiben. Im Zusammenhang mit Integralen ist dies besonders dann angebracht, wenn durch die neuen Koordinaten die Integrationsgrenzen unabhängig voneinander werden (im Parametergebiet also über einen verallgemeinerten Quader integriert wird). Allerdings muss man einem Quader im Parametergebiet nun das Volumen des Gebietes zuordnen, das durch diesen Quader parametrisiert wird.

Als Beispiel betrachten wir Polarkoordinaten in der Ebene. Möchte man beispielsweise über eine Kreisfläche integrieren, wird das Integral über die x- und y-Koordinate (also Integral in der xy-Ebene) wegen der krummlinigen Integrationsgrenzen recht kompliziert. Beschreibt man jedoch jeden Punkt in der Ebene durch seinen Abstand r vom Ursprung und seinen Winkel φ relativ zur positiven x-Achse (entgegen dem Uhrzeigersinn), wird die Integration über die Kreisfläche zu einer Integration über den "Quader" $[0, r] \times [0, 2\pi)$.

Das Flächenelement im Parameterraum dr d φ entspricht jedoch nicht der Fläche des durch die Parameter $r \in [r, r+dr]$ und $\varphi \in [\varphi, \varphi+d\varphi]$ beschriebenen Gebiets. Statt dessen sieht man leicht, dass die Fläche durch

$$d\mu(r,\varphi) = r \, dr \, d\varphi \tag{7.37}$$

beschrieben wird. Dies ist das Integationsmaß in Polarkoordinaten. Die allgemeine Konstruktion solcher Maße in Parameterräumen wird in den folgenden Abschnitten beschrieben.

7.2 Kurvenintegrale

Kurvenintegrale lassen sich grundsätzlich sowohl über skalare Felder als auch Vektorfelder ausführen. Dabei sind (etwas vereinfacht ausgedrückt) Skalarfelder einkomponentige Felder, deren Funktionswert sich bei einem Koordinatenwechsel des Raums, über dem die Felder definiert sind, nicht ändert. Ein Vektorfeld besitzt mehrere Komponenten, die sich bei einem Koordinatenwechsel ebenso wie die Komponenten eines Vektors transformieren (siehe auch Abschnitt 2.7).

Beim Kurvenintegral über Vektorfelder interessiert besonders der Fall, bei dem die Komponente des Vektorfelds in Tangentialrichtung aufintegriert wird. Dies ist beispielsweise bei der Berechnung der Arbeit der Fall.

7.2.1 Die Bogenlänge

Als einfachstes Beispiel für eine Kurvenintegration über ein Skalarfeld betrachten wir zunächst die Bogenlänge [arc length] einer Kurve. Das Skalarfeld ist in diesem Fall identisch 1.

Gegeben sei eine Kurve $\gamma \simeq \boldsymbol{x}(t)$ in ihrer Parameterdarstellung. Wir wollen die Länge der Kurve zwischen zwei Punkten $\boldsymbol{x}(t_0)$ und $\boldsymbol{x}(t_1)$ bestimmen. Für zwei infinitesimal benachbarte Punkte $\boldsymbol{x}(t+dt)$ und $\boldsymbol{x}(t)$ auf der Kurve gilt:

$$\Delta \boldsymbol{s} = (\boldsymbol{x}(t + \Delta t) - \boldsymbol{x}(t)) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \Delta t + O(\Delta t^2), \qquad (7.38)$$

bzw.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t \,. \tag{7.39}$$

Für den Betrag dieses Elements folgt:

$$ds = \sqrt{d\boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{s}} = \sqrt{\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}} dt.$$
(7.40)

Die Bogenlänge ergibt sich aus der Integration über die Bogenlängenelemente:

$$L = \int_{\gamma} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \,. \tag{7.41}$$

7.2. KURVENINTEGRALE

Nun handelt es sich um ein gewöhnliches Integral über das Argument t. Das Maß für eine Integration entlang der Kurve x(t) über den Parameter t ist somit $d\mu(t) = \left|\frac{dx(t)}{dt}\right| dt$.

Für die Bogenlängenparametrisierung ist der Betrag des Tangentialvektors eins und man erkennt, dass die Länge der Kurve genau der Differenz im Kurvenparameter entspricht. Daher auch die Bezeichnung *Bogenlängenparametrisierung*.

Beispiel: Eine Funktion f(x) lässt sich auch als Graph (d.h., als Kurve) in der xy-Ebene darstellen: y = f(x). Wählen wir x als den Parameter dieser Kurve, so können wir in der Parameterdarstellung für diesen Graph auch schreiben:

$$\boldsymbol{x}(t) = (t, f(t)).$$
 (7.42)

Damit folgt für das Bogenlängenelement:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$
(7.43)

Die Länge der Kurve ergibt sich somit zu:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + f'(t)^2} \, \mathrm{d}t \,. \tag{7.44}$$

7.2.2 Kurvenintegration über skalare Felder

Wir betrachten nun ein skalares Feld $\Phi(\boldsymbol{x})$ über dem \mathbb{R}^3 und eine Kurve γ in der Parameterdarstellung $\gamma(t) = \boldsymbol{x}(t)$. Für die Integration folgt:

$$I = \int_{\gamma} \Phi(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\boldsymbol{x}(t)) \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \,.$$
(7.45)

Dieses Integral entspricht wiederum einem gewöhnlichen Integral über den Kurvenparameter t.

7.2.3 Berechnung der Arbeit

In der Physik wird die Arbeit W oft vereinfacht als "Kraft mal Wegstrecke" definiert und man schreibt:

$$\Delta W = -\boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{s} \,. \tag{7.46}$$

Genauer ist die Arbeit gleich dem Skalarprodukt aus der Kraft F und der Wegstrecke Δs , um die ein Körper gegen die Kraft bewegt wird. Das negative Vorzeichen kommt daher, dass Arbeit geleistet werden muss, wenn die Kraft der Verschiebung entgegenwirkt.

Da sich die Kraft (bzw. die Komponente der Kraft in tangentialer Richtung zur Bewegung) entlang des Weges ändern kann, müssen wir die Beiträge der Teilstrecken addieren:

$$W = -\sum_{i} \boldsymbol{F}(x_i) \cdot \Delta \boldsymbol{s} \,. \tag{7.47}$$

Hierbei ist Δs eine sehr kurze Wegstrecke am Punkt x_i , entlang der die Kraft $F(x_i)$ näherungsweise als konstant angesehen werden kann. Im Grenzfall sehr vieler sehr kurzer Wegstrecken erkennt man in dieser Formel die Definition des Integrals wieder:

$$W = -\int_{a}^{b} \boldsymbol{F}(x) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \,. \tag{7.48}$$

Ist der Weg γ durch eine allgemeine Kurvenparametrisierung gegeben, können wir wieder

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{7.49}$$

schreiben und erhalten:

$$W = -\int_{t_0}^{t_1} \left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \right] \mathrm{d}t \,. \tag{7.50}$$

7.2.4 Integration über Gradientenfelder

Viele Kräfte lassen sich als sogenannte *Gradientenfelder* schreiben, d.h., es gibt ein Potenzial $U(\mathbf{x})$, dessen (negativer) Gradient gleich der Kraft \mathbf{F} ist.² In diesem Fall erhalten wir für die Arbeit:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\nabla U(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \right] \,\mathrm{d}t \,. \tag{7.51}$$

Da jedoch

$$\frac{\mathrm{d}U(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad (7.52)$$

folgt:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}U(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = U(\boldsymbol{x}(t_1)) - U(\boldsymbol{x}(t_0)).$$
(7.53)

Ist die Kraft also ein Gradientenfeld, hängt die Arbeit, die bei einer Verschiebung gegen diese Kraft geleistet werden muss, nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.

Es gilt aber auch der umgekehrte Sachverhalt: Sei F(x) ein Vektorfeld, für das jedes Wegintegral unabhängig von der Form des Weges nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt; dann ist F ein Gradientenfeld. Das zugehörige skalare Feld (das Potenzial) lässt sich explizit über ein Wegintegral konstruieren:

$$U(\boldsymbol{x}) = -\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} dt .$$
(7.54)

Hierbei beschreibt $\boldsymbol{x}(t)$ einen beliebigen Weg, der bei $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ beginnt und bei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t_1)$ endet. U ist bis auf eine Integrationskonstante, die durch die Wahl des Anfangspunktes des Weges festgelegt werden kann, eindeutig.

Damit erhebt sich die Frage, wie man für ein gegebenes Vektorfeld $F(\mathbf{x})$ entscheiden kann, ob es sich als ein Gradientenfeld $F(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x})$ schreiben lässt. Zu zeigen wäre, dass Wegintegrale nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen, also vom Weg selbst unabhängig sind, oder aber, dass alle Integrale entlang geschlossener Wege verschwinden. Dieser Beweis ist im Allgemeinen recht schwierig. Wir hatten jedoch schon gezeigt (Abschnitt 4.3.3), dass die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet:

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0. \tag{7.55}$$

Lässt sich also ein Kraftfeld F(x) als Gradientenfeld schreiben, verschwindet die Rotation dieses Kraftfelds. In einem einfach wegzusammenhängenden Raumgebiet (siehe Abschnitt 7.3.4) gilt auch das Umgekehrte: Jedes Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, lässt sich als Gradientenfeld schreiben. Für jedes rotationsfreie Kraftfeld in einem einfach wegzusammenhängenden Raumgebiet verschwindet das Integral über geschlossene Wege.

²Ich unterscheide hier nicht zwischen der potenziellen Energie und dem Potenzial. Die potenzielle Energie eines Körpers kann auch von Eigenschaften dieses Körpers abhängen, z.B. seiner Masse bei gravitativen Kräften oder seiner Ladung bei elektrischen Feldern. Das Potenzial wird meist so definiert, dass es von den Eigenschaften eines "Probekörpers" nicht abhängt.

7.3 Flächenintegrale und Stokes'scher Satz

7.3.1 Flächenelement und Flächenintegral im \mathbb{R}^3

Es soll nun beschrieben werden, wie man ein Skalarfeld bzw. ein Vektorfeld über eine Fläche \mathcal{F} integriert. Die Fläche \mathcal{F} sei durch eine Parameterdarstellung definiert: $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Das Bild dieser Abbildung beschreibt gerade die Fläche. Der Einfachheit halber sei der Wertebereich U von (u, v) das Quadrat $0 \leq u, v \leq 1$. Das ist keine wesentliche Einschränkung (allerdings sollte der Parameterbereich für die Fläche ein Rechteck darstellen).

Als nächsten Schritt benötigen wir ein Maß auf der Fläche. Ähnlich wie schon beim Tangentialvektor entlang einer Kurve sollte dieses Flächenelement auch die Orientierung der Fläche an einem Punkt beschreiben, sodass man beispielsweise den Fluss eines Vektorfeldes durch die Fläche bestimmen kann. Sein Betrag sollte proportional zum Flächeninhalt sein, und die Orientierung einer Fläche im dreidimensionalen Raum lässt sich am einfachsten durch einen Vektor senkrecht zu der Fläche beschreiben. (Die allgemeine Theorie der Integration von Tensorfeldern über *d*-dimensionale Teilräume im \mathbb{R}^n ist Gegenstand der Theorie der Differentialformen, die hier nicht behandelt wird.) Wir definieren:

$$d\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v}\right) du dv .$$
(7.56)

Anmerkung: Eigentlich hätte ich an dieser Stelle

$$\Delta \boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v}\right) \Delta u \,\Delta v \,, \tag{7.57}$$

schreiben sollen, wobei Δu und Δv eine Unterteilung der Parameterfläche in N^2 Parzellen andeuten sollen und das Integral ist dann, wie im eindimensionalen Fall, als Grenzfall $\Delta u, \Delta v \to 0$ und $N \to \infty$ zu verstehen, sodass $N\Delta u = 1$ und $N\Delta v = 1$ bleiben. Dieses Verfahren sei im Folgenden immer impliziert, wenn ich Differentiale du bzw. dv oder df verwende.

Offensichtlich sind

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{u} = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u \qquad \text{und} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{v} = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v$$
(7.58)

die Wegstrecken jeweils entlang der Linien $\boldsymbol{x}(u, v = \text{const.})$ bzw. $\boldsymbol{x}(u = \text{const.}, v)$. d \boldsymbol{x}_u und d \boldsymbol{x}_v spannen ein Parallelogramm auf, dessen Fläche durch

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{f}| = |\mathrm{d}\boldsymbol{x}_u \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}_v| \tag{7.59}$$

gegeben ist. Der Vektor d \boldsymbol{f} steht senkrecht auf diesem Parallelogramm und zeigt (bei geeigneter Wahl der Reihenfolge von u und v) nach außen. Im Grenzfall $du, dv \rightarrow 0$ nähert sich die Fläche des Parallelogramms immer mehr dem Flächeninhalt der Fläche an, die zwischen den Punkten $\boldsymbol{x}(u,v), \boldsymbol{x}(u+du,v), \boldsymbol{x}(u,v+dv), \boldsymbol{x}(u+du,v+dv)$ liegt. Daher ist d \boldsymbol{f} das gesuchte Flächenelement.

Wir definieren nun das Flächenintegral über ein skalares Feld über die Fläche \mathcal{F} als

$$\int_{\mathcal{F}} \Phi(\boldsymbol{x}) |\mathrm{d}\boldsymbol{f}| := \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \Phi(\boldsymbol{x}(u,v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v} \right| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \;. \tag{7.60}$$

Nun handelt es sich um ein gewöhnliches Integral über zwei Variable u und v.

Entsprechend definierten wir den *Fluss* eines Vektorfeldes F durch eine Fläche \mathcal{F} als

$$\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} := \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v} \right) \right] \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \;. \tag{7.61}$$

Wir projizieren also an jedem Punkt der Fläche den Vektor F auf das Flächenelement df und bilden anschließend das Integral über u und v.

7.3.2 Beispiel: Die Kugeloberfläche

Als Beispiel betrachten wir die Oberfläche einer Kugel vom Radius R. Als Parametrisierung wählen wir die beiden Winkel $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ der Kugelkoordinaten. Die Kugeloberfläche wird dann beschrieben durch:

$$(\theta, \varphi) \mapsto \boldsymbol{x}(\theta, \varphi) = R(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta).$$
 (7.62)

Für das Flächenelement an einem Punkt $\boldsymbol{x}(\theta, \varphi)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} &= R(\cos\varphi\,\cos\theta,\sin\varphi\,\cos\theta,-\sin\theta)\\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\varphi} &= R(-\sin\varphi\,\sin\theta,\cos\varphi\,\sin\theta,0)\\ \implies \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\varphi}\right) &= R^2(\cos\varphi\sin^2\theta,\sin\varphi\sin^2\theta,\sin\theta\cos\theta)\\ &= R^2\sin\theta\,\boldsymbol{n} \qquad \text{mit} \,\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \,. \end{aligned}$$

Am Punkt $\boldsymbol{x}(\theta, \varphi)$ ist \boldsymbol{n} ein Einheitsvektor, der radial nach außen zeigt, und das Flächenelement ist somit:

$$d\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) = R^2 \sin\theta \,d\theta \,d\varphi \,\boldsymbol{n} . \tag{7.63}$$

Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche ergibt sich damit zu:

$$A = \int_{\mathcal{O}} |d\mathbf{f}| = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) = 4\pi R^2.$$
(7.64)

7.3.3 Der Stokes'sche Satz

Wir hatten für kartesische Koordinaten die Rotation eines Vektorfeldes durch folgende Vorschrift definiert:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})_i = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{ijk} \partial_j F_k , \qquad (7.65)$$

bzw.

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \simeq \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}, \qquad (7.66)$$

mit $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Man bezeichnet die Rotation eines Vektorfeldes auch als seine *Wirbeldichte*. Zur Rechtfertigung dieser Bezeichnung beweisen wir zunächst den Stokes'schen Satz.

Satz von Stokes: Sei F ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld im \mathbb{R}^3 und \mathcal{F} eine (differenzierbare) Fläche im \mathbb{R}^3 mit Rand $\partial \mathcal{F}$, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int_{\partial \mathcal{F}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} .$$
(7.67)

Das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes ist also gleich dem Integral des Vektorfeldes über den Rand der Fläche.

Zum Beweis benutzen wir folgende Relation:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\right)\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{u}}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{v}}\right) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{v}}\right) - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{u}}\right) ,\qquad(7.68)$$

die zunächst bewiesen wird:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \right) &= \sum_{ijklm} \epsilon_{ijk} (\partial_j F_k) \, \epsilon_{ilm} \, \frac{\partial x_l}{\partial u} \, \frac{\partial x_m}{\partial v} \\ &= \sum_{jklm} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (\partial_j F_k) \, \frac{\partial x_l}{\partial u} \, \frac{\partial x_m}{\partial v} \\ &= \sum_{jk} \left((\partial_j F_k) \, \frac{\partial x_j}{\partial u} \, \frac{\partial x_k}{\partial v} \, - \, (\partial_j F_k) \, \frac{\partial x_k}{\partial u} \, \frac{\partial x_j}{\partial v} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial F_k}{\partial u} \, \frac{\partial x_k}{\partial v} \, - \, \frac{\partial F_k}{\partial v} \, \frac{\partial x_k}{\partial u} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(F_k \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) \, - \, \frac{\partial}{\partial v} \left(F_k \frac{\partial x_k}{\partial u} \right) \right) \, . \end{aligned}$$

Beim ersten Schritt haben wir die Identität (Gl. 4.40) für das Produkt von ϵ -Symbolen verwendet. Beim letzten Schritt wurde um die zweifachen Ableitungen von x_k erweitert; bildet man in der letzten Zeile die jeweiligen Ableitungen nach der Produktregel, heben sich die zweifachen Ableitungen von x_k weg.

Mit diesem Satz und der Definition des Flächenintegrals erhalten wir also

$$\int_{\mathcal{F}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{f} = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \right) \right] du dv$$
$$= \int_{0}^{1} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \right) \Big|_{u=0}^{u=1} dv - \int_{0}^{1} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \right) \Big|_{v=0}^{v=1} du$$

Auf der rechten Seite steht nun ein Integral über den Rand des Rechtecks, das den Wertebereich von (u, v) bildet. Dieses Rechteck wird auf den Rand der Fläche $(\partial \mathcal{F})$ abgebildet (siehe Abb. 7.2). Daher steht auf der rechten Seite gerade ein Linienintegral über die Funktion F über den Rand der Fläche \mathcal{F} . Damit ist der Stokes'sche Satz bewiesen.

Eine spezielle Form des Stokes'schen Satzes sieht man, wenn man die Rotation eines Vektorfeldes über das Rechteck $[0, a] \times [0, b]$ in der $x_1 x_2$ -Ebene integriert. Dann erhält man

$$\int \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int F_2 \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 - \int F_1 \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} dx_1.$$
(7.69)

Auf der rechten Seite steht gerade das Integral über den Rand des Rechtecks.

Wir wollen nun die Vorstellung von der Rotation eines Vektorfeldes als eine Wirbeldichte konkretisieren. Das Integral eines Vektorfeldes entlang eines geschlossenen Weges γ entspricht der Wirbelstärke dieses Vektorfeldes entlang dieses Weges. Wir wählen nun diesen Weg in einer Fläche senkrecht zu einem Normalenvektor **n**. Außerdem sei dieser Weg sehr kurz und umschließe eine Fläche mit Flächeninhalt Δf . Dann gilt nach dem Stokes'schen Satz:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\int_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{x}}{\Delta f} ,$$
 (7.70)

d.h. die Rotation, projiziert auf den Einheitsvektor \boldsymbol{n} , ist gleich der Wirbelstärke entlang des Weges γ dividiert durch die Fläche, die von γ umrandet wird, im Grenzfall verschwindender Fläche also gleich der Wirbeldichte. Man beachte, dass es sich hierbei um eine *Flächendichte* handelt, d.h., das Integral von $\nabla \times \boldsymbol{F}$ über eine Fläche ergibt die Wirbelstärke.

Diese Definition der Rotation eines Vektorfelds hat eine geometrische Interpretation und ist somit unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Damit können wir die Rotation eines Vektorfeldes auch in verallgemeinerten Koordinatensystemen angeben (siehe Kap. 8).



Abbildung 7.2: Der Parameterbereich (links) wird auf eine Fläche im \mathbb{R}^3 abgebildet, der Rand des Parameterbereichs auf den Rand der Fläche. Beim Stokes'schen Satz wird bewiesen, dass das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfelds, ausgedrückt durch ein Integral über die Parameterfläche, gleich dem Integral über das Vektorfeld auf dem Rand der Fläche ist. Dieses Integral entspricht im Parameterraum einem Integral über den Rand des Rechtecks. Die Pfeile im rechten Bild deuten auf Koordinatenkurven zu jeweils konstanten Werten von u bzw. von v. Diese Kurven sind die Bilder der eingezeichneten Koordinatenlinien durch die Punkte (u_0, v_0) und $(u_0 + \Delta u_0, v_0 + \Delta v_0)$ im Parameterraum.

Für ein intuitives Verstandnis der Rotation lohnt es sich auch, Gleichung 7.70 unter einem anderen Blickwinkel zu betrachten, der zum Teil dem umgekehrten Weg des Beweises für den Stokes'sche Satz entspricht. Wir betrachten der Einfachheit halber ein 2-dimensionales Vektorfeld $\mathbf{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ das über den geschlossenen Weg in der xy-Ebene entlang der Kanten des Rechteckes $(0, 0) \rightarrow (\epsilon a, 0) \rightarrow (\epsilon a, \epsilon b) \rightarrow (0, \epsilon b) \rightarrow (0, 0)$ integriert werden soll (siehe Abb. 7.3). Wir nehmen an, \mathbf{F} sei stetig differenzierbar. Letztendlich sind wir an dem Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ interessiert. Da durch in Gl. 7.70 durch die Fläche dividiert wird, interessieren alle Terme bis einschließlich zur Ordnung ϵ^2 .



Abbildung 7.3: Infinitesimaler Integrationsweg zur Veranschaulichung der Rotation. Für die Wege 3 und 4 werden die zugehörigen Integrale jeweils von der unteren zur oberen Grenze ausgeführt allerdings werden sie mit negativem Vorzeichen gewertet.

Entlang der vier Wege können wir für das Vektorfeld folgende Näherungen machen:

$$F_i(x,y) = F_i(0,0) + \frac{\partial F_i}{\partial x}x + \frac{\partial F_i}{\partial y}y + o(\|\boldsymbol{x}\|).$$
(7.71)

Da von dem Integral über die infinitesimalen Wegstrecken nochmals Terme der Ordnung ϵ hinzukom-

7.3. FLÄCHENINTEGRALE UND STOKES'SCHER SATZ

men, reicht diese Näherung. Wir erhalten für die vier Integrale:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \qquad \int_{0}^{\epsilon a} F_{1}(x,0) \, dx &= \int_{0}^{\epsilon a} \left(F_{1}(0,0) + \frac{\partial F_{1}}{\partial x} x + o(\|x\|) \right) \, dx \\ &= F_{1}(0,0)\epsilon a + \frac{1}{2} \frac{\partial F_{1}}{\partial x} \epsilon^{2} a^{2} + o(\epsilon^{2}) \\ \textcircled{2} \qquad \int_{0}^{\epsilon b} F_{2}(\epsilon a,y) \, dy &= \int_{0}^{\epsilon b} \left(F_{2}(0,0) + \frac{\partial F_{2}}{\partial x} \epsilon a + \frac{\partial F_{2}}{\partial y} y + o(\|x\|) \right) \, dy \\ &= F_{2}(0,0)\epsilon b + \frac{\partial F_{2}}{\partial x} \epsilon^{2} a b + \frac{1}{2} \frac{\partial F_{2}}{\partial y} \epsilon^{2} b^{2} + o(\epsilon^{2}) \\ \textcircled{3} \qquad - \int_{0}^{\epsilon a} F_{1}(x,\epsilon b) \, dx &= -\int_{0}^{\epsilon a} \left(F_{1}(0,0) + \frac{\partial F_{1}}{\partial y} \epsilon b + \frac{\partial F_{1}}{\partial x} x + o(\|x\|) \right) \, dx \\ &= -F_{1}(0,0)\epsilon a - \frac{\partial F_{1}}{\partial y} \epsilon^{2} a b - \frac{1}{2} \frac{\partial F_{1}}{\partial x} \epsilon^{2} a^{2} + o(\epsilon^{2}) \\ \textcircled{4} \qquad - \int_{0}^{\epsilon b} F_{2}(0,y) \, dy &= -\int_{0}^{\epsilon b} \left(F_{2}(0,0) + \frac{\partial F_{2}}{\partial y} y + o(\|x\|) \right) \, dy \\ &= -F_{2}(0,0)\epsilon b - \frac{1}{2} \frac{\partial F_{2}}{\partial y} \epsilon^{2} b^{2} + o(\epsilon^{2}) \end{aligned}$$

Die Summer aller vier Integrale ergibt:

$$\oint_{\gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \epsilon^2 ab + o(\epsilon^2)$$
(7.72)

und ist somit in führender Ordnung gleich der Rotation von F in der xy-Ebene multipliziert mit dem Flächeninhalt der umrandeten Fläche.

7.3.4 Der Satz von Poincaré

Wir hatten gezeigt, dass für ein Gradientenfeld $\mathbf{F} = \nabla \Phi$ die Rotation verschwindet und dass Wegintegrale über geschlossene Wege immer den Wert null haben:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \Phi \implies \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0 \quad \text{und} \quad \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{f} = 0.$$
 (7.73)

Wir können nun die Frage umkehren:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0 \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{f} = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F} = \nabla \Phi.$$
 (7.74)

Unter welchen Bedingungen können wir aus der Tatsache, dass die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet, darauf schließen, dass es sich um ein Gradientenfeld handelt bzw. dass die Integrale über geschlossene Wege verschwinden (was dann gleichbedeutend ist zu der Aussage, dass Wegintegrale immer nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen und nicht vom Weg selbst)?

Diese Frage können wir nun mit Hilfe des Stokes'schen Satzes beantworten. Der Stokes'sche Satz gilt für Flächen \mathcal{F} mit einem Rand $\partial \mathcal{F}$. Der Rand einer Fläche bildet immer einen geschlossenen Weg. Falls die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet, verschwindet auch das Integral über alle geschlossenen Wege, die sich als Rand einer Fläche darstellen lassen.

Es gibt jedoch unter bestimmten Bedingungen geschlossene Wege, die nicht der Rand einer (regulären) Fläche sind. Betrachten wir als Beispiel die Ebene ohne den Ursprung: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ein Weg, der sich einmal um den Ursprung herumwindet, ist kein Rand einer Kreisscheibe, denn der Ursprung ist nicht Teil des Raumes. In diesem Fall kann die Rotation eines Vektorfeldes verschwinden,

aber das Integral über einen geschlossenen Weg um den Ursprung ist von null verschieden. Ein Beispiel ist das Vektorfeld (im \mathbb{R}^2):

$$\mathbf{F}(x) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, +\frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$
(7.75)

Der Definitionsbereich dieses Vektorfelds ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, da das Vektorfeld am Ursprung nicht definiert ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Rotation dieses Vektorfeldes (die nun nur aus der Komponente $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$ besteht) verschwindet:

$$\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$
(7.76)

Wir berechnen nun das Integral über dieses Vektorfeld entlang eines geschlossenen Weges um den Ursprung (beispielsweise entlang eines Kreises vom Radius R, parametrisiert durch $x(\varphi) = R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit dem Tangentialvektor $\frac{dx}{d\varphi} = R(-\sin\varphi, \cos\varphi)$). Wir erhalten

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{ds} = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{R} (-\sin\varphi, +\cos\varphi) \cdot R(-\sin\varphi, \cos\varphi) \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \,. \tag{7.77}$$

Obwohl die Rotation des Vektorfeldes verschwindet, ist das Integral über dieses Vektorfeld (projiziert auf die Tangentialrichtung des Weges) entlang eines geschlossenen Weges um den Ursprung nicht null. (Man beachte aber, dass das Integral unabhängig von R ist.) Der Stokes'sche Satz ist hier nicht anwendbar, weil der geschlossene Weg nicht der Rand einer wohl definierten Fläche ist.

Man bezeichnet Gebiete im \mathbb{R}^n als einfach wegzusammenhängend bzw. einfach zusammenhängend), wenn sich jeder geschlossene Weg als Rand einer wohl definierten Fläche interpretieren lässt. Anders ausgedrückt, ein Gebiet heißt einfach wegzusammenhängend, wenn sich jeder geschlossener Weg stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt. Damit können wir nun den Satz von Poincaré formulieren: In einem einfach wegzusammenhängenden Gebiet ist ein rotationsfreies Vektorfeld immer ein Gradientenfeld.

7.3.5 Das eindimensionale Integral als Flächenintegral

Wir hatten das Integral ursprünglich eingeführt als die Fläche F unter einer Funktion f(x) über dem Intervall [a, b]:

$$F = \int_{a}^{b} f(x) \,\mathrm{d}x \,. \tag{7.78}$$

Nun haben wir in diesem Kapitel beschrieben, wie man Flächenintegrale über einem zweidimensionalen Parameterraum behandelt. Wie hängen diese beiden Konzepte zusammen?

Abbildung 7.4: Das Integral über eine Funktion über einem Intervall ist gleich der Fläche unter dieser Funktion. Dieses Integral lässt sich auch als 2-dimensionales Integral schreiben, wobei die zu integrierende Funktion $\phi(x, y) = 1$ ist, aber die Grenze in y-Richtung jeweils von 0 bis f(x) zu wählen ist.



Wenn wir den 2-dimensionalen Raum der Punkte (x, y) als Parameterraum für ein Flächenintegral auffassen, können wir zunächst das Flächenelement angeben: df = dx dy (das Kreuzprodukt wird zum normalen Produkt, da die Koordinaten senkrecht zueinander sind und es interessiert nur der Betrag, da wir über die Funktion $\phi(x, y) = 1$ integrieren wollen). Wir müssen allerdings berücksichtigen, dass die Grenzen für die y-Integration nun immer von 0 bis zum Wert y = f(x) laufen. Damit erhalten wir für die Fläche:

$$F = \int_{a}^{b} dx \int_{0}^{f(x)} dy = \int_{a}^{b} dx f(x), \qquad (7.79)$$

also das uns schon bekannte Ergebnis. Man beachte, dass nun in jedem Fall das Integral über y zuerst auszuführen ist, da die obere Grenze dieses Integrals noch eine Funktion von x ist.

7.4 Volumenintegrale und der Satz von Gauß

7.4.1 Volumenelement und Volumenintegration

Während ein Linienelement ds und ein Flächenelement df im \mathbb{R}^3 gerichtete (vektorielle) Größen sind, ist ein Volumenelement im \mathbb{R}^3 eine (pseudo-) skalare Größe. Daher betrachten wir auch nur Volumenintegrale über Skalarfelder. Bildet man das Volumenintegral über ein Vektorfeld, so erhält man einen Vektor, d.h., das Integral ist für jede Komponente gesondert zu bilden.

Das kartesische Volumenelement im \mathbb{R}^3 ist $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$. Will man jedoch über ein Volumen $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ integrieren, so ist es oft schwierig, die Integrationsgrenzen an $\{x_i\}$ zu berücksichtigen, da – mit Ausnahme der Integration über einen Quader – die Integrationsgrenzen von den Integrationsvariablen abhängen können.

Daher ist es meist sinnvoll, eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zu finden, die einen Quader $(u_1, u_2, u_3) \in [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ auf das Volumen \mathcal{V} abbildet, wobei der Rand des Quaders auf den Rand des Volumens – d.h. die Oberfläche $\partial \mathcal{V}$ – abgebildet wird.

Das Volumen des von den drei infinitesimalen Vektoren

$$d\boldsymbol{x}_{u_i} = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} du_i$$
(7.80)

aufgespannten Parallelepipeds ist

$$dV = \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3} \right) \right| \, du_1 \, du_2 \, du_3 \; . \tag{7.81}$$

Dieses Volumen definiert somit das Maß, das wir dem Quader $[u_1, u_1 + du_1] \times [u_2, u_2 + du_2] \times [u_3, u_3 + du_3]$ im Parameterraum zuschreiben müssen. (Hier gilt dieselbe Anmerkung bezüglich der Verwendung von Differentialen statt Differenzen wie bei dem Flächenelement.)

Der Faktor lässt sich als Betrag der Determinante einer Matrix schreiben und wird als *Jacobi-Determinante* bezeichnet:

$$J = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{array} \right| = \left| \det \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3} \right) \right|.$$
(7.82)

Die Jacobi-Determinante $J = |\partial x_i / \partial u_j|$ (genauer, der Betrag dieser Determinante) gibt allgemein in *n* Dimensionen das Volumenelement für einen Wechsel der Koordinaten von kartesischen Koordinaten $\{x_i\}$ zu verallgemeinerten Koordinaten $\{u_i\}$ an.

Wir erhalten also:

$$\int_{\mathcal{V}} \Phi(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}^{3}x = \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \int_{0}^{c} \Phi(\boldsymbol{x}(u_{1}, u_{2}, u_{3})) \,J \,\mathrm{d}u_{1} \,\mathrm{d}u_{2} \,\mathrm{d}u_{3} \;.$$
(7.83)

Der Vorteil einer solchen Transformation $x \to u$ besteht darin, dass nun die Integrationsgrenzen unabhängig von den Integrationsparametern oder aber einfache Funktionen dieser Integrationsparameter sind.

7.4.2 Beispiel: Die Kugel vom Radius R

Wir betrachten als Beispiel die Integration über das Volumen einer Kugel vom Radius R. Als Parameter wählen wir den Betrag eines Vektors $r \in [0, R]$, sowie die beiden Winkel $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, die wir schon bei der Beschreibung der Kugeloberfläche benutzt haben. Wir erhalten somit als Parametrisierung der Kugel:

$$(r,\theta,\varphi) \longrightarrow \boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) = r(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)$$
 (7.84)

mit den angegebenen Bereichsgrenzen. Das neue Volumenelement bzw. die Jakobi-Determinante Jlässt sich leicht berechnen, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} = \boldsymbol{n} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$$
(7.85)

ist, und

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi}\right) = r^2 \sin \theta \, \boldsymbol{n} \,. \tag{7.86}$$

Damit folgt

$$U = \boldsymbol{n} \cdot (r^2 \sin \theta) \boldsymbol{n} = r^2 \sin \theta . \qquad (7.87)$$

Wir erhalten somit als neues Volumenelement

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \,. \tag{7.88}$$

Für das Volumen folgt daher:

$$V = \int_{\mathcal{V}} dV = \int_{0}^{R} r^{2} dr \int_{0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_{0}^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} R^{3} \,.$$
(7.89)

7.4.3 Der Satz von Gauß – Die Divergenz als Quellendichte

Satz von Gauß: Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich dem Integral über die Oberfläche ∂V über das Vektorfeld selber:

$$\int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) \, \mathrm{d}^3 x = \int_{\partial \mathcal{V}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{f} \,.$$
(7.90)

Der Beweis erfolgt ähnlich, wie der Beweis des Stokes'schen Satzes. Wir gehen von folgender Identität aus, die hier nicht bewiesen werden soll, aber durch direktes Nachrechnen "leicht" (das bedeutet "mit einem gewissen Aufwand aber ohne besondere technischen Raffinessen") überprüfbar ist:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(u_1, u_2, u_3)) \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial u_1} \left[\boldsymbol{F} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\boldsymbol{F} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial u_3} \left[\boldsymbol{F} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} \right) \right].$$

Nun setzen wir diese Identität in das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes ein und erhalten ein Oberflächenintegral, parametrisiert durch den Rand des Quaders von (u_1, u_2, u_3) , über das Vektorfeld.
7.5. DIE KONTINUITÄTSGLEICHUNG

Für einen gewöhnlichen Quader im \mathbb{R}^3 (definiert durch die Grenzen $x_1 \in [0, a], x_2 \in [0, b], x_3 \in [0, c]$) sieht man die Identität unmittelbar:

$$\int \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3$$

= $\int F_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 dx_3 + \int F_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} dx_1 dx_3 + \int F_3 \Big|_{x_3=0}^{x_3=c} dx_1 dx_2 dx_3$

Auf der rechten Seite wird immer über die gegenüberliegenden Flächen bei einem Würfel integriert, jeweils mit umgekehrtem Vorzeichen, was zum Ausdruck bringt, dass der Normalenvektor der einen Seite die umgekehrte Orientierung zum Normalenvektor der gegenüberliegenden Seite hat.

Der Gauß'sche Satz in n Dimensionen

Dieses Beispiel für den Gauß'schen Satz anhand eines Quaders legt auch nahe, dass der Gauß'sche Satz in beliebigen Dimensionen gilt:

Satz (Gauß): Sei \mathcal{V} ein Volumen im \mathbb{R}^n und $\partial \mathcal{V}$ die Oberfläche dieses Volumens, dann gilt für ein einmal stetig differenzierbares Vektorfeld $F(\mathbf{x})$:

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^{n} \boldsymbol{x} = \int_{\partial \mathcal{V}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}f \,, \tag{7.91}$$

wobei df das Flächenelement im Tangentialraum und \mathbf{n} der Normalenvektor auf $\partial \mathcal{V}$ am Punkte \mathbf{x} sind. (Der Normalenvektor ist der normierte Vektor, der auf allen Vektoren im Tangentialraum von $\partial \mathcal{V}$ an der Stelle \mathbf{x} senkrecht steht).

In 2 Dimensionen sind der Gauß'sche und der Stokes'sche Satz (eingeschränkt auf die 1-2-Ebene) identisch. Die Rotation eines Vektorfelds $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}))$ in zwei Dimensionen ist rot $\mathbf{F} = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}}$ (also ein Skalar), wobei $\tilde{\mathbf{F}}$ der "duale" Vektor zu \mathbf{F} ist: $\tilde{F}_i = \sum_j \epsilon_{ij} F_j$. Auch zum Tangentialvektorelement d \mathbf{s} kann man den dualen Vektor d $\tilde{\mathbf{s}}$ definieren: d $\tilde{\mathbf{s}}_i = \sum_j \epsilon_{ij} ds_j$ (in zwei Dimension stehen ein Vektor und sein dualer Vektor immer senkrecht aufeinander und haben denselben Betrag). Außerdem ist in zwei Dimensionen das Flächenelement d \mathbf{f} ein (Pseudo-)Skalar und gleich dem Volumenelement dV. Damit gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{f} = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{F}} \mathrm{d} V \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial \mathcal{F}} \tilde{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d} \tilde{\boldsymbol{s}} = \int_{\partial \mathcal{F}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{s}$$
(7.92)

Die Divergenz als Quellendichte

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes können wir der Divergenz eines Vektorfeldes auch die Interpretation einer sogenannten *Quellendichte* geben. Es gilt:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) \, \mathrm{d}V = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{\partial \mathcal{V}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} \,.$$
(7.93)

Das Integral über die geschlossene Oberfläche eines Volumens über ein Vektorfeld ergibt aber gerade den Gesamtfluss dieses Vektorfeldes durch diese Oberfläche, also die "Gesamtzahl der Quellen" des Vektorfeldes innerhalb des Volumens. Die Divergenz ist daher die Quellendichte. In diesem Fall handelt es sich um eine Volumendichte.

7.5 Die Kontinuitätsgleichung

Die angegebenen Integralsätze ermöglichen oft den Übergang zwischen einer lokalen Aussage, die an jedem Raumpunkt erfüllt sein muss, und einer globalen Aussage, die für beliebige Volumina oder Flächen erfüllt sein muss. Als Beispiel betrachten wir die Kontinuitätsgleichung für elektrische Ladungen.

 $\rho(\pmb{x},t)$ beschreibe eine elektrische Ladungsdichte bzw. eine Ladungsverteilung zum Zeitpunktt. Also ist

$$Q_{\mathcal{V}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}^{3}x \tag{7.94}$$

die Gesamtladung in einem Volumen \mathcal{V} zum Zeitpunkt t. Wir fragen uns nun nach der Ladungsänderung in diesem Volumen, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_{\mathcal{V}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\boldsymbol{x}, t) \,\mathrm{d}^{3}x \,.$$
(7.95)

Es ist kein Prozess in der Natur bekannt, der die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems verändert, d.h., Ladung ist eine Erhaltungsgröße. Die Ladungsänderung in einem Volumen muss mit einem Ladungsfluss durch die Oberfläche des Volumens verbunden sein. Den Ladungsfluss drücken wir durch die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ aus. Die Stromdichte zu einer Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{x})$, die sich am Punkte \boldsymbol{x} mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ bewegt, ist

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}) . \tag{7.96}$$

Der Fluss an Ladung durch eine geschlossene Oberfläche $\partial \mathcal{V}$ pro Zeiteinheit ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_{\mathcal{V}}(t) = -\int_{\partial\mathcal{V}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f} . \qquad (7.97)$$

Das negative Vorzeichen gibt an, dass \dot{Q} die Änderung der Ladungsmenge in \mathcal{V} ist. Fließt beispielsweise Ladung aus \mathcal{V} ab, so ist \dot{Q} negativ. Der Strom ist nach außen gerichtet, d.h., das Integral über die Stromdichte gibt die nach außen abfließende Ladungsmenge an, die gleich dem negativen der Ladungsänderung im Inneren ist. Wir erhalten also die Aussage:

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}^{3}x = - \int_{\partial \mathcal{V}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} \,.$$
(7.98)

Das Volumenintegral über die zeitliche Änderung von ρ ist gleich dem Oberflächenintegral über den Strom. Diese Aussage gilt für jedes Volumen \mathcal{V} . Nach dem Gauß'schen Satz gilt aber auch

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\boldsymbol{x},t) \, \mathrm{d}^{3}x = - \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})) \, \mathrm{d}^{3}x \,.$$
(7.99)

Da auch diese Aussage für jedes Volumen \mathcal{V} gilt, können wir \mathcal{V} beliebig um einen Punkt konzentrieren und gelangen so zu er *lokalen* Aussage:

$$\dot{\rho}(\boldsymbol{x},t) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) . \qquad (7.100)$$

Diese Gleichung bezeichnet man als Kontinuitätsgleichung [continuity equation]. Abgeleitet haben wir sie aus einer Art Bilanzgleichung für die Ladung in einem beliebigen Volumen \mathcal{V} . Ganz ähnliche Bilanzgleichungen - in diesem Fall für den Impuls und die Energie - nutzt man in der Hydrodynamik zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung bzw. der Navier-Stokes-Gleichung.

Kapitel 8

Vektoranalysis

Dieses Kapitel greift nochmals einige der Konzepte aus Kap. 6 auf. Das Ziel ist die Herleitung von allgemeinen Ausdrücken für Differentialoperatoren - im Wesentlichen für den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator - in krummlinigen Koordinaten bzw. auf Flächen. Die Rotation spielt eine Sonderrolle, da sie zunächst nur für drei Dimensionen definiert ist. Gelegentlich unterscheide ich dabei zwischen Mannigfaltigkeiten, die in den \mathbb{R}^n eingebettet sind und die ihre Metrik (und damit die Definition von Abständen) durch den einbettenden Raum erhalten, und Reparametrisierungen des \mathbb{R}^n , also krummlinigen Koordinaten im \mathbb{R}^n . Viele der Konzepte sind aber unabhhängig von dieser Unterscheidung.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass der zugrundeliegende Raum immer noch der euklidische (flache) \mathbb{R}^n mit dem kanonischen Skalarprodukt $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_i x^i y^i$ ist, wobei sich die Koordinaten x^i, y^i auf eine kartesische Orthonormalbasis beziehen.

Ich werde in diesem Kapitel die schon in Abschnitt 2.7.4 behandelte Indexschreibweise mit hoch- und tiefgestellten Indizes sowie die Einstein'sche Summenkonvention verwenden. Zur Erinnerung: An Vektoren (z.B. Basisvektoren) stehen die Indizes unten (kovariante Indizes), an den Koordinaten von Vektoren oben (kontravariante Indizes). Bei dualen Vektoren ist es umgekehrt. Die Summenkonvention lautet: Über doppelt auftretenden Indizes auf einer Seite einer Gleichung, einmal oben und einmal unten, wird automatisch summiert.

8.1 Verallgemeinertes Skalarprodukt und metrischer Tensor

In den nächsten Abschnitten wird meist nicht zwischen der Einbettung einer Kurve, Fläche oder allgemeiner eines *d*-dimensionalen Raumes in den \mathbb{R}^n (also d < n) und einer Reparametrisierung des \mathbb{R}^n (also d = n) unterschieden. Daher betrachte ich im Folgenden Abbildungen der Form:

$$(u^1, ..., u^d) \mapsto \boldsymbol{x}(u^1, ..., u^d),$$
 (8.1)

wobei ich neben d < n (der Einbettung eines parametrisierten Teilraums) auch den Fall d = nzulasse (eine Koordinatentransformation). Man beachte, dass die Indizes an den Koordinaten nun oben stehen.

Die Parameterdarstellung definiert in einem Punkt $p \simeq \boldsymbol{x}(u^1, ..., u^d)$ auf der Mannigfaltigkeit, der durch die Koordinaten $(u^1, ..., u^d)$ charakterisiert wird, d linear unabhängige Tangentialvektoren:

$$\boldsymbol{f}_{\alpha}(p) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^{\alpha}} \,. \tag{8.2}$$

Man beachte, dass es sich bei dem Index α auf der linken Seite um einen Index handelt, der die verschiedenen Vektoren durchnummeriert - daher steht der Index unten -, wohingegen auf der rechten Seite nach der Koordinate u^{α} abgeleitet wird. Die Ableitung nach einer Koordinate mit oben stehendem Index ergibt einen Ausdruck, bei dem der Index unten steht. Dies hatten wir schon in Kapitel 4.1.2 im Anschluss an Gl. 4.6 gesehen: Die totale Ableitung und die Richtungsableitungen sind Elemente des Dualraums; sie bilden einen Vektor **h** auf eine Zahl ab. Daher transformieren sich die Komponenten der totalen Ableitung (die sich aus den Ableitungen nach den Koordinaten ergeben) kovariant. Das rechtfertigt die Notation $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha}$. Anders ausgedrückt: Damit die Identität

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{8.3}$$

auch bei einem Koordinatenwechsel richtig bleibt, muss sich $\{\partial/\partial u^{\alpha}\}$ invers zu $\{u^{\alpha}\}$ transformieren.

Den Tangentialraum an einem Punkt p einer Mannigaltigkeit M bezeichnet man mit T_pM . Die Tangentialvektoren $\{\mathbf{f}_{\alpha}\}$, die T_pM aufspannen, sind im Allgemeinen weder Einheitsvektoren noch orthogonal. Man kann diese Vektoren natürlich noch durch ihren Betrag dividieren und auch zur Konstruktion eines Orthonormalsystems verwenden (ähnlich, wie wir dies beim mitgeführten Dreibein gemacht haben; siehe Kap. 6.1.4). In den meisten Fällen ist es aber einfacher, direkt mit den Vektoren $\mathbf{f}_{\alpha}(p)$ als Basisvektoren von T_pM zu rechnen. Wenn wir allerdings Vektoren in diesem Tangentialraum durch ihre Komponenten bezüglich der Basis $\{\mathbf{f}_{\alpha}(p)\}$ ausdrücken, müssen wir bei der Berechnung des Skalarprodukts berücksichtigen, dass es sich bei dieser Basis nicht um eine Orthonormalbasis handelt. Es seien \mathbf{x} und \mathbf{y} zwei Vektoren im Tangentialraum des Punktes p, die folgende Zerlegung bezüglich der Tangentialvektoren $\{\mathbf{f}_{\alpha}\}$ haben:

$$\boldsymbol{x} = x^{\alpha} \boldsymbol{f}_{\alpha} \qquad \boldsymbol{y} = y^{\beta} \boldsymbol{f}_{\beta} .$$
 (8.4)

Das Skalarprodukt zwischen diesen Vektoren im einbettenden Raum \mathbb{R}^n ist:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x^{\alpha} \boldsymbol{f}_{\alpha}(p)) \cdot (y^{\beta} \boldsymbol{f}_{\beta}(p)) = x^{\alpha} y^{\beta} (\boldsymbol{f}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{f}_{\beta}) = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}.$$
(8.5)

Wir können also das Skalarprodukt durch die Komponenten der Vektoren bezüglich der Basis $\{f_{\alpha}\}$ ausdrücken, müssen dabei aber die symmetrische Matrix

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{f}_{\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u^{1}, ..., u^{d})}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}(u^{1}, ..., u^{d})}{\partial u^{\beta}}$$
(8.6)

berücksichtigen. Gleichung 8.5 beschreibt ein verallgemeinertes Skalarprodukt und die (symmetrische) Matrix $g_{\alpha\beta}$ bezeichnet man nun auch als *Metrik*. Wie wir noch sehen werden, erlaubt $g_{\alpha\beta}(p)$ die Berechnung von Längen und Abständen auf der Mannigfaltigkeit.

Da die Tangentialvektoren $f_{\alpha}(p)$ vom Punkt p abhängen, an dem sie berechnet werden, hängt auch das Skalarprodukt von diesem Punkt p ab: $g_{\alpha\beta}(p)$. Man spricht in diesem Fall vom *metrischen Feld*. Da das Skalarprodukt in jedem Punkt ein Tensor (2. Stufe - die Matrixdarstellung hat zwei kovariante Indizes) ist, spricht man auch vom *metrischen Tensor* bzw. *metrischen Feldtensor*.

8.2 Duale und reziproke Basis

Wir hatten in Abschnitt 2.7.4 (Gl. 2.109) schon gesehen, dass man die Komponenten eines Vektors mithilfe der dualen Basis erhält, die ich mit $\{\varepsilon^{\alpha}\}$ bezeichne. Die duale Basis - hier handelt es sich um die duale Basis zu dem von $\{\mathbf{f}_{\alpha}(p)\}$ am Punkte p aufgespannten Tangentialraum T_pM der durch $\mathbf{x}(u^{\alpha})$ beschriebenen Mannigfaltigkeit - erfüllt die Bedingung

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}, \boldsymbol{f}_{\beta} \rangle = \delta^{\alpha}_{\beta} \,, \tag{8.7}$$

8.2. DUALE UND REZIPROKE BASIS

und damit folgt

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}, x^{\beta} \boldsymbol{f}_{\beta} \rangle = x^{\beta} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}, \boldsymbol{f}_{\beta} \rangle = x^{\beta} \delta^{\alpha}_{\beta} = x^{\alpha} .$$
(8.8)

Ganz allgemein gilt: Ist in einem Vektorraum V (hier T_pM) eine Basis $\{\boldsymbol{f}_{\alpha}\}$ gegeben, lässt sich in dem dualen Vektorraum V^* immer eine solche duale Basis $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}\}$ definieren. Ist in V zusätzlich noch ein Skalarprodukt definiert, kann man in V auch eine zu $\{\boldsymbol{f}_{\alpha}\}$ reziproke Basis $\{\boldsymbol{f}^{\alpha}\}$ konstruieren über die Bedingung:

$$g(\boldsymbol{f}^{\alpha}, \boldsymbol{f}_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta} \,. \tag{8.9}$$

Obwohl es sich bei f^{α} um Vektoren, also Elemente von V handelt, steht der Index oben: Sie transformieren sich kontravariant, also umgekehrt zu den Basisvektoren f_{α} . Die Stellung des Index (oben oder unten) bezieht sich also weniger darauf, aus welchem Vektorraum die Objekte sind, sondern wie sie sich unter einer Transformation der Basis in V transformieren. Bezüglich der kanonischen Basis $\{e_i\}$ und dem kanonischen Skalarprodukt \cdot , die ich für den einbettenden Raum immer annehme, werde ich nicht zwischen Vektoren und dualen Vektoren unterscheiden (manchmal, wenn ich auf den formalen Unterschied aufmerksam machen möchte, verwende ich den Hochindex T für "transponiert").

Anschaulich steht der Vektor \mathbf{f}^{α} senkrecht auf allen Basisvektoren $\{\mathbf{f}_{\beta}\}_{\beta\neq\alpha}$ und hat mit \mathbf{f}_{α} das Skalarprodukt 1. Damit wird auch deutlich, dass beispielsweise eine Streckung von \mathbf{f}_{α} zur Folge hat, dass \mathbf{f}^{α} entsprechend gestaucht werden muss. Im \mathbb{R}^3 (und bezüglich des kanonischen Skalarprodukts ·) kann man mithilfe des Kreuzprodukts die reziproke Basis leicht konstruieren:

$$\boldsymbol{f}^{\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\boldsymbol{f}_{\beta} \times \boldsymbol{f}_{\gamma}}{\boldsymbol{f}_{1} \cdot (\boldsymbol{f}_{2} \times \boldsymbol{f}_{3})} \qquad \left(\text{z.B. } \boldsymbol{f}^{1} = \frac{\boldsymbol{f}_{2} \times \boldsymbol{f}_{3}}{\boldsymbol{f}_{1} \cdot (\boldsymbol{f}_{2} \times \boldsymbol{f}_{3})} \right).$$
(8.10)

 $(\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ entspricht dem gewöhnlichen Levi-Civita-Symbol – Gl. 2.27 – und über doppelt auftretende Indizes auf der rechten Seite ist wieder zu summieren; daher auch der Faktor 1/2: jeder Term auf der rechten Seite tritt zweimal auf.) Wir können allgemein die reziproken Basisvektoren auch in der Form

$$\boldsymbol{f}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \boldsymbol{f}_{\beta} \tag{8.11}$$

schreiben, wobei

$$g^{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{f}^{\beta} \tag{8.12}$$

die inverse Matrix zu $g_{\alpha\beta}$ ist:

$$g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \,. \tag{8.13}$$

Gleichung 8.11 macht auch deutlich, weshalb es sich bei f^{α} um ein Element von V und nicht V^{*} handelt: f^{α} wird als Linearkombination von Basisvektoren f_{α} geschrieben, und das sind wieder Vektoren aus V.

Da die reziproke Basis ebenfalls eine Basis des Vektorraums V ist, können wir einen Vektor \boldsymbol{x} auch nach der reziproken Basis entwickeln:

$$\boldsymbol{x} = x_{\alpha} \boldsymbol{f}^{\alpha} \,. \tag{8.14}$$

Die kovarianten Koordinaten x_{α} erhalten wir aus den kontravarianten Koordinaten durch

$$x_{\alpha} = g_{\alpha\beta} x^{\beta} \tag{8.15}$$

und umgekehrt:

$$x^{\alpha} = g^{\alpha\beta} x_{\beta} \,. \tag{8.16}$$

Wir sehen daher, dass man mit der Metrik $g_{\alpha\beta}$ bzw. ihrem Inversen $g^{\alpha\beta}$ die Indizes von Vektoren (und auch allgemeiner von Tensoren) rauf- bzw. runterziehen kann.

8.3 Intrinsische Bedeutung der Metrik

Ich möchte nun einen Aspekt der Metrik betrachten, der anschaulich weniger den Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit betrifft als die Mannigfaltigkeit selber. Er rechtfertigt die Bezeichnung *Metrik* als "Abstandsmesser".

Wir betrachten auf dem eingebetteten *d*-dimensionalen Raum zwei Punkte $p \simeq \boldsymbol{x}(u^1, ..., u^d)$ und $p' \simeq \boldsymbol{x}(u'^1, ..., u'^d)$, die nahe beeinander liegen sollen. Der Abstand zwischen diesen beiden Punkten,

$$ds = \sqrt{(\boldsymbol{x}(u'^{1}, ..., u'^{d}) - \boldsymbol{x}(u^{1}, ..., u^{d}))^{2}}, \qquad (8.17)$$

soll also klein sein. In diesem Fall erwarten wir, dass auch die Koordinaten, durch welche die beiden Punkte beschrieben werden, nahe beieinander liegen (sofern nicht eine Koordinatensingularität vorliegt):

$$(u'^{1}, ..., u'^{d}) = (u^{1} + du^{1}, ..., u^{d} + du^{d}).$$
(8.18)

Wir erhalten somit:

$$\boldsymbol{x}(u'^{1},...,u'^{d}) - \boldsymbol{x}(u^{1},...,u^{d}) = \boldsymbol{x}(u^{1} + \mathrm{d}u^{1},...,u^{d} + \mathrm{d}u^{d}) - \boldsymbol{x}(u^{1},...,u^{d})$$
(8.19)

$$= \sum_{\alpha=1}^{u} \frac{\partial \boldsymbol{x}(u^1, ..., u^d)}{\partial u^{\alpha}} \mathrm{d}u^{\alpha} + o(\|\mathrm{d}u^i\|).$$
(8.20)

Die partiellen Ableitungen nach den Parametern sind gerade die Basisvektoren im Tangentialraum:

$$\boldsymbol{f}_{\alpha}(p) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u^1, ..., u^d)}{\partial u^{\alpha}} \,. \tag{8.21}$$

Für den "infinitesimalen" Abstand ds erhalten wir somit:

$$ds = \sqrt{\left(\sum_{\alpha=1}^{d} \boldsymbol{f}_{\alpha}(p) du^{\alpha}\right) \cdot \left(\sum_{\beta=1}^{d} \boldsymbol{f}_{\beta}(p) du^{\beta}\right)} = \sqrt{g_{\alpha\beta}(p) du^{\alpha} du^{\beta}}.$$
(8.22)

Mithilfe des metrischen Feldes kann man also an jedem Punkt $(u^1, ..., u^d)$ der Karte bestimmen, welchen Abstand zwei eng beieinander liegende Punkte in Wirklichkeit haben. Das metrische Feld ist ein "orts- und richtungsabhängiger Kartenmaßstab".

Ist ein parametrisierter Weg $\gamma(t)$ auf der Mannigfaltigkeit durch $(u^1(t), ..., u^d(t))$ gegeben $(t \in [t_0, t_1])$, kann man seine Länge durch

$$L = \int ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha\beta}(\gamma(t))} \, \frac{du^{\alpha}}{dt} \, \frac{du^{\beta}}{dt} dt$$
(8.23)

berechnen. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten bezeichnet man als *Geodäte*. Sie ersetzt für allgemeine gekrümmte Mannigfaltigkeiten das Konzept der Geraden im euklidischen (flachen) Raum (vgl. Gl. 7.41).

In der allgemeinen Relativitätstheorie gibt man oft den metrischen Feldtensor in der Form

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta} \,\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta \tag{8.24}$$

an. Dabei bezeichnet ds^2 das Quadrat des physikalischen Abstands zwischen zwei (physikalisch eng benachbarten) Ereignissen, den man mit tatsächlichen Maßstäben oder Uhren ausmessen kann. du^{α} bezeichnet die Differenz in der Koordiante u^{α} , durch welche man die beiden Ereignisse in einer Karte ausdrückt. Das metrische Feld gibt die Beziehung zwischen dem physikalischen Abstand und dem Koordinatenabstand zweier Ereignisse in einer Karte an.

8.4 Volumenelemente und Metrik

In diesem Abschnitt soll eine Identität bewiesen werden, die in den vergangenen Abschnitten mehrfach für Spezialfälle aufgetreten ist, die aber allgemein gilt. Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem im \mathbb{R}^n (die Komponenten von Punkten sind $\{x^i\}$) und wir wechseln zu einem krummlinigen Koordinatensystem (mit Komponenten $\{u^{\alpha}\}$). Hierbei spielt es keine Rolle, ob wir die krummlinien Koordinaten auf einer Untermannigfaltigkeit betrachten ($\alpha = 1, ..., d < n$) oder ob es sich um eine Koordinatentransformation handelt ($\alpha = 1, ..., d = n$). Die Tangentialvektoren in einem Punkt p sind:

$$\boldsymbol{f}(p)_{\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{x}(\{u\})}{\partial u^{\alpha}} \,. \tag{8.25}$$

Diese Tangentialvektoren spannen (sofern keine Koordinatensingularität vorliegt) ein *d*-dimensionales Volumen auf (es handelt sich um das Volumen eines verallgemeinerten Parallelepipeds oder auch Parallelotops) und es gilt:

$$dV = \operatorname{Vol}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^d}\right) du_1 du_2 \cdots du_d.$$
(8.26)

Das Volumen ergibt sich aus der Metrik, die man auch schon mal als *Gram'sche Matrix* der Vektoren $\{f_{\alpha}\}$ bezeichnet:

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{f}_{\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^{\beta}}, \qquad (8.27)$$

und es gilt:

$$\operatorname{Vol}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^d}\right) = \sqrt{\det g_{\alpha\beta}} \,. \tag{8.28}$$

Die Determinante der Gram'schen Matrix bezeichnet man als Gram'sche Determinante [Gramian] der Vektoren { \mathbf{f}_{α} }. Zum allgemeinen Beweis obiger Gleichung siehe z.B. [Gantmacher 1959]. Für den Fall d = n ist $J^{i}_{\alpha} = \frac{\partial x^{i}}{\partial u^{\alpha}}$ gerade die Jacobi-Matrix des Koordinatenwechsels und es gilt:

$$(J^T \cdot J)_{\alpha\beta} = \sum_i J^i_{\alpha} J^i_{\beta} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial x^i}{\partial u^{\beta}} = \boldsymbol{f}(p)_{\alpha} \cdot \boldsymbol{f}(p)_{\beta} = g(p)_{\alpha\beta} \,.$$
(8.29)

Das Produkt der Jacobi-Matrix J mit ihrer Transponierten ist somit gleich der Metrik im Tangentialraum am Punkt p. Da die Determinante einer Matrix gleich der Determinante ihrer Transponierten ist und die Determinante des Produkts zweier Matrizen gleich dem Produkt der Determinanten, folgt:

$$(\det J)^2 = \det g \qquad \text{oder} \qquad \det J = +\sqrt{\det g}.$$
 (8.30)

Das Volumenelement für krummlinige Koordinaten ist also gleich der Wurzel aus der Determinante der Metrik. Wie wir gesehen haben, gilt diese Beziehung jedoch allgemein (nicht nur für Koordinatentransformationen).

8.5 Drei Beispiele

In diesem Abschnitt sollen die Konzepte der vergangenen Abschnitte anhand von drei Beispielen verdeutlicht werden: Polarkoordinaten in zwei Dimensionen, Kugelkoordinaten in drei Dimensionen und die Kugeloberfläche als Beispiel für eine eingebettete Mannigfaltigkeit.

8.5.1 Polarkoordinaten

Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene sei durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und den Winkel φ zur *x*-Achse charakterisiert, also $p \simeq \boldsymbol{x}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Die Polarkoordinaten definieren durch den Punkt p zwei ausgezeichnete Kurven:

$$\gamma_1(\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad (r \text{ fest}) \qquad \gamma_2(r) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad (\varphi \text{ fest}). \tag{8.31}$$

 $\gamma_1(\varphi)$ beschreibt einen Kreis vom Radius r um den Nullpunkt, und $\gamma_2(r)$ beschreibt einen Strahl, der sich radial vom Nullpunkt nach unendlich erstreckt und zur positiven x-Achse den Neigungswinkel φ hat. Diese beiden Kurven haben in p jeweils die Tangentialvektoren:

$$\boldsymbol{f}_{\varphi}(p) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(r,\varphi)}{\partial \varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$$
(8.32)

$$\boldsymbol{f}_r(p) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(r,\varphi)}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$
(8.33)

Die Notation $f_{\varphi}(p)$ bzw. $f_r(p)$ soll andeuten, dass diese beiden Vektoren im Allgemeinen von dem Punkt p, ausgedrückt durch seine Koordinaten r und φ , abhängen.

Wir können uns leicht davon überzeugen, dass diese beiden Vektoren orthogonal sind. Normieren wir die beiden Vektoren noch auf die Länge eins, so erhalten wir ein *Orthonormalsystem* von Basisvektoren für den Tangentialraum im Punkte p:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi}(p) = (-\sin\varphi, \cos\varphi) \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_{r}(p) = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$
(8.34)

Bei orthogonalen Koordinatensystemen können wir daher Vektoren im Tangentialraum sowohl bezüglich der kovarianten Basis $\{f_{\alpha}\}$ als auch bezüglich der Orthonormabasis $\{\hat{e}_{\alpha}\}$ ausdrücken. Da die Koeffizienten der Vektoren bezüglich dieser beiden Basen unterschiedlich sind, führt das gelegentlich zu Verwirrung (mehr dazu in Abschnitt 8.7).

Für die Matrixdarstellung des Skalarprodukts erhalten wir:

$$g(p) \simeq \begin{pmatrix} g_{\varphi\varphi}(p) & g_{r\varphi}(p) \\ g_{\varphi r}(p) & g_{rr}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{\varphi}(p) \cdot \boldsymbol{f}_{\varphi}(p) & \boldsymbol{f}_{r}(p) \cdot \boldsymbol{f}_{\varphi}(p) \\ \boldsymbol{f}_{\varphi}(p) \cdot \boldsymbol{f}_{r}(p) & \boldsymbol{f}_{r}(p) \cdot \boldsymbol{f}_{r}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(8.35)

Die inverse Matrix hat die Komponenten

$$g(p)^{-1} \simeq \begin{pmatrix} g^{\varphi\varphi}(p) & g^{r\varphi}(p) \\ g^{\varphi r}(p) & g^{rr}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(8.36)

Die zu f_{φ}, f_r (Gl. 8.32, 8.33) reziproke Basis ist

$$\boldsymbol{f}^{\varphi}(p) = \left(-\frac{1}{r}\sin\varphi, \frac{1}{r}\cos\varphi\right) \qquad \boldsymbol{f}^{r}(p) = (\cos\varphi, \sin\varphi) . \tag{8.37}$$

Schließlich erhalten wir für das Volumenelement in Polarkoordinaten (vgl. Gl. 7.37):

$$dV = \sqrt{\det g} \, dr \, d\varphi = r \, dr \, d\varphi \,. \tag{8.38}$$

8.5.2 Kugelkoordinaten

Im \mathbb{R}^3 sind Kugelkoordinaten durch folgende Parametrisierung gegeben:

$$\boldsymbol{x}(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$
(8.39)

8.5. DREI BEISPIELE

Die Parameterbereiche sind $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wie schon erwähnt, sind die Ränder r = 0 und $\theta = 0, \pi$ Koordinatensingularitäten.

Die durch die Koordinaten bestimmte Basis des Tangentialraums bei einem Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ besteht aus den drei Vektoren:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_r(p) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}(r,\varphi,\theta)}{\partial r} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta) \\ \boldsymbol{f}_\varphi(p) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}(r,\varphi,\theta)}{\partial\varphi} = (-r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\sin\theta, 0) \\ \boldsymbol{f}_\theta(p) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}(r,\varphi,\theta)}{\partial\theta} = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, -r\sin\theta). \end{aligned}$$

Auch in Kugelkoordinaten sind die drei Tangentialvektoren zu den Parametern r, φ und θ orthogonal. Für die Komponenten des metrischen Tensors erhalten wir:

$$g = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{r\theta} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi \varphi} & g_{\varphi \theta} \\ f_{\theta r} & g_{\theta \varphi} & g_{\theta \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},$$
(8.40)

und das Volumenelement ist:

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \,. \tag{8.41}$$

8.5.3 Die Kugeloberfläche

Die beiden bisherigen Beispiele bezogen sich auf Koordinatentransformationen, nun betrachte ich mit der Kugeloberfläche noch ein Beispiel für die Einbettung einer Fläche in den \mathbb{R}^3 . Eine mögliche Beschreibung der Kugeloberfläche folgt aus den Kugelkoordinaten, wobei nun der Radius R nicht mehr als Koordinate sondern als festen Parameter interpretiert wird. Die Koordinaten der Kugeloberfläche sind somit die beiden Winkel (φ, θ). Die beiden Basisvektoren für den Tangentialraum an einem Punkt auf der Kugeloberfläche (ausgedrückt durch seine Koordinaten (φ, θ)) sind daher:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\varphi}(p) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}(r,\varphi,\theta)}{\partial \varphi} = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0) \\ \boldsymbol{f}_{\theta}(p) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}(r,\varphi,\theta)}{\partial \theta} = (R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta). \end{aligned}$$

Die Komponenten des metrischen Tensors bezüglich dieser Basisvektoren des Tangentialraums lauten:

$$g = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta & 0\\ 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$
 (8.42)

Das "Volumenelement" (das nun der Betrag eines Flächenelements ist) für eine Integration über die Kugeloberfläche (nun zu festem R) ist

$$df = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \,. \tag{8.43}$$

Um auch ein Beispiel für nicht orthogonale Koordinaten zu geben, betrachte ich auf einem Teil der Kugeloberfläche die Koordinaten, die man durch Auflösen der impliziten Gleichung

$$(x^{1})^{2} + (x^{2})^{2} + (x^{3})^{2} = R^{2}$$
(8.44)

nach einer Komponente erhält. Wir wählen die Parameterdarstellung für die "nördliche" Hemisphäre:

$$(u,v) \to (u,v,+\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}).$$
 (8.45)

Die beiden Tangentialvektoren an den Punkt p (gekennzeichnet durch die Koordinaten (u, v)) sind:

$$\boldsymbol{f}_{u}(p) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u} = \left(1,0,-\frac{u}{\sqrt{R^{2}-u^{2}-v^{2}}}\right)$$
$$\boldsymbol{f}_{v}(p) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v} = \left(0,1,-\frac{v}{\sqrt{R^{2}-u^{2}-v^{2}}}\right).$$

Nun sind die beiden durch das Koordinatensystem definierten Basisvektoren im Allgemeinen weder Einheitsvektoren noch orthogonal und wir erhalten für die Metrik:

$$g = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} & \frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2} \\ \frac{vu}{R^2 - u^2 - v^2} & 1 + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}.$$
 (8.46)

Offensichtlich sind die Elemente dieser Metrik für $u^2 + v^2 = R^2$ – also auf dem Äquator – nicht mehr definiert (bzw. gehen gegen unendlich). Dies ist ein typisches Beispiel für eine Koordinatensingularität, denn der Äquator ist natürlich keine singuläre Punktmenge der Kugeloberfläche, sondern das gewählte Koordinatensystem ist dort nicht mehr sinnvoll.

Das Flächenelement in diesen Koordinaten ist

$$df = \sqrt{\det g} \, du \, dv = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2}{R^2}}} du \, dv \,. \tag{8.47}$$

8.6 Die Tissot'sche Indikatrix

Gleichung 8.24 erlaubt eine Veranschaulichung der Beziehungen zwischen einem geometrischen Objekt in der Mannigfaltigkeit und seiner Darstellung in der Karte, d.h. im Parameterraum. Sei ein Punkt pmit den Koordinaten $(u^1, ..., u^d)$ auf der Mannigfaltigkeit gegeben, dann beschreibt die Punktmenge, für die $(\Delta s)^2$ zu diesem Punkt konstant ist, auf dieser Mannigfaltigkeit eine Kugeloberfläche. In der Karte bzw. im Parameterraum beschreibt die Gleichung

$$g_{\alpha\beta} \left(\Delta u^{\alpha} \right) \left(\Delta u^{\beta} \right) = \text{const.}$$
 (8.48)

ein Ellipsoid. Die Eigenwerte $\{\lambda_i\}$ von g sind proportional zu den Quadraten der inversen Hauptachsen dieses Ellipsoids, d.h. $\lambda_i \propto 1/a_i^2$. Die Drehmatrix (bzw. die unitäre Matrix), die g auf Diagonalgestalt bringt, beschreibt die Lage dieses Ellipsoids im Raum, d.h. relativ zu den Parameterachsen. Die Angabe dieser Ellipsoide für eine Karte bezeichnet man als Tissot'sche Indikatrix. Sie wird besonders für Land- bzw. Weltkarten gelegentlich verwendet, um die Verformungen sowie die Skalierungen von Flächen anzudeuten.

Betrachten wir dazu als Beispiel die Kugeloberfläche in den Winkelkoordinaten. Da die Metrik bereits diagonal ist (Gl. 8.42), lautet die Darstellung des Urbilds eines Kreises auf der Kugeloberfläche im Parameterraum:

$$R^{2}\sin^{2}\theta(\Delta\varphi)^{2} + R^{2}(\Delta\theta)^{2} = \text{const} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{(\Delta\varphi)^{2}}{1/(R\sin\theta)^{2}} + \frac{(\Delta\theta)^{2}}{1/R^{2}} = \text{const}.$$
(8.49)

Da die Standardform einer Ellipse mit den Halbachsen a und b die Form

$$\frac{(\Delta x)^2}{a^2} + \frac{(\Delta y)^2}{b^2} = 1 \tag{8.50}$$

hat, beschreibt obige Gleichung (bis auf einen allgemeinen Proportionalitätsfaktor) eine Ellipse mit kleiner Halbachse 1/R und großer Halbachse $1/(R\sin\theta)$. Für θ klein (in der Nähe des Nordpols) bzw.

für $\theta \to \pi$ (in der Nähe des Südpols) wird die Ellipse sehr gestreckt. Die kleine Halbachse entlang des Längengrads bleibt dabei konstant, die große Halbachse (entlang der Breitengrade) erscheint gedehnt. Die Fläche der Ellipse wird zu den Polen hin also größer (siehe Abb. 8.1). Bei Weltkarten, die diese Darstellung verwenden, erscheinen Länder bzw. Kontinente in Polnähe daher horzontal gestreckt und ihre Fläche erscheint größer.



Abbildung 8.1: Tissot-Indikatrix für die Winkelkoordinaten der Kugeloberfläche (aus [Snyder 1994]).

8.7 Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten und in krummlinigen Koordinaten

Ich betrachte im Folgenden den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator sowohl auf *d*-dimensionalen Mannigfaltigkeiten als auch für krummlinige Koordinaten des \mathbb{R}^n . Für die Rotation gelten die Ausdrücke nur im \mathbb{R}^3 . Dass es sich bei den *d*-dimensionalen Mannigfaltigkeiten um Einbettungen in den \mathbb{R}^n handelt, ist eher von sekundärer Bedeutung; viele der Überlegungen gelten ganz allgemein, sofern auf der Mannigfaltigkeit eine Metrik definiert ist.

Leider (?) hat sich bei orthogonalen Basisvektoren $\{\mathbf{f}_{\alpha}\}$ (wenn also $g_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$ – dazu zählen die meisten der gängigen Koordinatensysteme wie Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten) die Konvention eingebürgert, eine orthonormierte Basis $\{\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \mathbf{f}_{\alpha}\}$ zu wählen. Der Vorteil ist, dass man nicht zwischen der Basis und ihrer reziproken Basis unterscheiden muss (bei orthonormalen Basisvektoren sind die beiden Basen gleich), der Nachteil ist jedoch, dass die Ausdrücke nicht mehr manifest ko- bzw. kontravariant sind, was man schon an der Definition der normierten Basisvektoren erkennt (hier tritt auf einer Seite der Index α dreimal auf und es wird nirgendwo summiert). Ich werde, wo angebracht, die Darstellungen bezüglich beider Konventionen angeben.

8.7.1 Der Gradient

Ich hatte schon im Zusammenhang mit der totalen Ableitung betont, dass die Definition (Gl. 4.6) unabhängig von einem Koordinatensystem gilt. Wir können daher allgemein schreiben:

$$\Phi(u^{1} + h^{1}, ..., u^{d} + h^{d}) = \Phi(u^{1}, ..., u^{d}) + \langle \boldsymbol{D}\Phi(p), \boldsymbol{h} \rangle + o(\|h\|), \qquad (8.51)$$

mit

$$\langle \boldsymbol{D}\Phi(p), \boldsymbol{h} \rangle = \frac{\partial \Phi(u^1, ..., u^d)}{\partial u^{\alpha}} h^{\alpha} = \frac{\partial \Phi(u^1, ..., u^d)}{\partial u^{\alpha}} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}, \boldsymbol{h} \rangle.$$
(8.52)

Die totale Ableitung ist daher ein dualer Vektor (ein Element aus V^*) von der Form:

$$\boldsymbol{D}\Phi(p) = \frac{\partial\Phi(u^1, ..., u^d)}{\partial u^{\alpha}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha} \,. \tag{8.53}$$

Der Gradient $\nabla \Phi(p)$ ist der dazu duale Vektor, für den gilt:

$$\langle \boldsymbol{D}\Phi(p), \boldsymbol{h} \rangle = \frac{\partial \Phi(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^{\alpha}} h^{\alpha} = g(\boldsymbol{\nabla}\Phi(p), \boldsymbol{h}).$$
(8.54)

Damit folgt

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi(p) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi(u^1, ..., u^d)}{\partial u^\beta} \boldsymbol{f}_\alpha \qquad \text{bzw.} \qquad (\boldsymbol{\nabla}\Phi(p))^\alpha = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi(u^1, ..., u^d)}{\partial u^\beta} \,. \tag{8.55}$$

Man beachte, dass hier die Komponenten des Gradienten in Bezug auf die kovariante (nicht normierte) Basis $\{\mathbf{f}_{\alpha}\}$ angegeben wurden. Wie schon erwähnt ist es bei orthogonalen Koordinatensystemen, d.h. wenn $g_{\alpha\beta}$ Diagonalform hat, $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta}$ (hier wir nicht summiert), oft üblich, die Basis zu normieren:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\alpha} = \frac{1}{h_{\alpha}} \boldsymbol{f}_{\alpha}$$
 mit $h_{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}$ (keine Summenkonvention!). (8.56)

Bezüglich der normierten Basis $\{\hat{\boldsymbol{e}}_{\alpha}\}$ hat der Gradient die Form:

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi(p) = \sum_{\alpha} \frac{1}{h_{\alpha}} \frac{\partial \Phi(u^1, ..., u^d)}{\partial u^{\alpha}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\alpha} \,. \tag{8.57}$$

Diese Darstellung in normierten Basisvektoren ist nicht kovariant (daher gilt bei diesen Formeln auch die Summenkonvention nicht), hat aber den Vorteil, dass man wie gewohnt mit einer Orthonormalbasis rechnen kann und nicht zwischen Vektoren und dualen Vektoren unterscheiden muss. Daher findet man diese Darstellung auch oft in Formelsammlungen. Für die Standardbeispiele (Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten und die Kugeloberfläche erhalten wir):

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi(r,\varphi) = \frac{\partial\Phi(r,\varphi)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(r,\varphi)}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi}$$
(Polarkoordinaten) (8.58)

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial\Phi(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \quad (\text{Kugelkoord.}) \ (8.59)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi(\theta,\varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial \Phi(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi} \qquad (\text{Kugeloberfläche}) \tag{8.60}$$

8.7.2 Die Divergenz

Für die Herleitung der Divergenz in beliebigen Koordinaten (und auf beliebigen Mannigfaltigkeiten) verwende ich eine Integralformel, von der ich voraussetze, dass sie auch auf Mannigfaltigkeiten ihre Gültigkeit behält. Wegen der Identität

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}))\Phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{x})$$
(8.61)

bzw.

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\Phi) = (\operatorname{div}\boldsymbol{E})\Phi + \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{grad}\Phi, \qquad (8.62)$$

wobei $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ ein Vektorfeld und $\Phi(\boldsymbol{x})$ ein skalares Feld sind, gilt nach dem Gauß'schen Satz:

$$\int d^d x (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})) \Phi(\boldsymbol{x}) = -\int d^d x \, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\nabla} \Phi(\boldsymbol{x}) \,. \tag{8.63}$$

Hierbei wurde angenommen, dass das skalare Feld $\Phi(\boldsymbol{x})$ im Unendlichen rasch genug verschwindet (bzw. auf dem Rand des Integrationsbereichs verschwindet), sodass keine Randterme von dem Oberflächenintegral beitragen. Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit bzw. in krummlinigen Koordinaten wird daraus

$$\int d^{d} u \sqrt{g} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) \Phi(\boldsymbol{u}) = -\int d^{d} u \sqrt{g} g_{\alpha\beta} E^{\alpha}(\boldsymbol{u}) (\nabla \Phi(\boldsymbol{u}))^{\beta}$$
(8.64)

(man beachte, dass in verallgemeinerten Koordinaten immer das invariante Integrationsmaß $\sqrt{g} d^d u$ genommen werden muss). Auf der rechten Seite verwenden wir nun nochmals den Gauß'schen Satz und erhalten:

$$\int d^{d} u \sqrt{g} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) \Phi(\boldsymbol{u}) = \int d^{d} u \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\partial_{\alpha} \sqrt{g} \, E^{\alpha}(\boldsymbol{u}) \right) \Phi(\boldsymbol{u}) \,. \tag{8.65}$$

(Hierbei wurde einmal um \sqrt{g}/\sqrt{g} erweitert sowie die Eigenschaft $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha}$ ausgenutzt.) Da $\Phi(\boldsymbol{u})$ eine beliebige (ausreichend oft stetig differenzierbare und am Rand ausreichend schnell abfallende) Funktion sein kann, folgt:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\partial_{\alpha} \sqrt{g} \, E^{\alpha}(\boldsymbol{u}) \right)$$
(8.66)

Bisher bezog sich die Komponente E^{α} auf die natürliche kovariante Basis, also $\boldsymbol{E} = E^{\alpha}\boldsymbol{f}_{\alpha}$. Wählt man jedoch eine normierte Basis $\{\hat{\boldsymbol{e}}_{\alpha}\}$ und schreibt $\boldsymbol{E} = \hat{E}^{\alpha}\hat{\boldsymbol{e}}_{\alpha}$, so gilt für die neuen Komponenten $\hat{E}^{\alpha} = h_{\alpha}E^{\alpha}$ (keine Summe) mit $h_{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$. Da diese Konvention eigentlich nur in orthogonalen Koordinatensystemen verwendet wird, ist $\sqrt{g} = h_1h_2h_3$ (ich beschränke mich jetzt auf drei Dimensionen). Für die Divergenz folgt dann:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 h_3 \hat{E}^1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 h_3 \hat{E}^2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 h_2 \hat{E}^3) \right) .$$
(8.67)

Für Zylinder- und Kugelkoordinaten gilt:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{E}^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\hat{E}^{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{E}^z)$$
(Zylinderkoord.) (8.68)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \hat{E}^r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \, \hat{E}^\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\hat{E}^\varphi) \qquad (\text{Kugelkoord.})$$
(8.69)

8.7.3 Der Laplace-Operator

Für den Laplace-Operator können wir die übliche Definition $\Delta = \text{div} \cdot \text{grad}$ verallgemeinern und erhalten für allgemeine Koordinaten:

$$\Delta \Phi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\partial_{\alpha} \sqrt{g} \, g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi(\boldsymbol{u}) \right) \,. \tag{8.70}$$

Man beachte jedoch, dass diese Darstellung nur für ein skalares Feld gilt. Die Verallgemeinerung auf Vektorfelder ist etwas aufwendiger: Bei den Komponenten von Vektorfeldern, $E^{\alpha} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}, \boldsymbol{E} \rangle$, muss berücksichtigt werden, dass die dualen (bzw. reziproken) Basiselemente ebenfalls ortsabhängig sind. Somit gibt es weitere Terme, auf die ich hier nicht eingehe.

Für ein orthogonales Koordinatensystem (der Einfachheit in drei Dimensionen - die Verallgemeinerung sollte offensichtlich sein) erhält man mit den Koeffizienten $h_{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ die Darstellung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u^3} \right) \right].$$
(8.71)

Damit ist in Zylinderkoordinaten

$$\Delta\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$
(8.72)

$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$
(8.73)

und in Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$
(8.74)

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$
(8.75)

$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$
 (8.76)

Betrachtet man den Laplace-Operator auf der Oberfläche der Einheitskugel (also einer gekrümmten Mannigfaltigkeit), so erhält man

$$\Delta\Phi(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$
(8.77)

Für den Laplace-Operator gebe ich eine direkte Ableitung an, die bei einem Koordinatenwechsel im flachen Raum (z.B. dem \mathbb{R}^3) möglich ist, nicht aber auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten. Letztendlich wird hierbei nur die Kettenregel verwendet.

Das skalare Feld $\Phi(p)$ ist für einen Punkt p im \mathbb{R}^3 definiert; dieser Wert ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Ausgedrückt in allgemeinen Koordinaten gilt daher

$$\hat{\Phi}(u^1(\{x^i\}), u^2(\{x^i\})), u^3(\{x^1\})) = \Phi(x^1, x^2, x^3).$$
(8.78)

Damit ergibt sich für den Laplace-Operator:

$$\sum_{i} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \sum_{i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial u^{\alpha}} \right) = \Delta u^{\alpha} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial u^{\alpha}} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} \,. \tag{8.79}$$

Hier ist Δu^{α} der Laplace-Operator der Koordinatenfunktion $u^{\alpha}(x^1, x^2, x^3)$, aufgefasst als Funktion der kartesischen Koordinaten. Nach Berechnung dieser Funktion ersetzt man die kartesischen Koordinaten durch die verallgemeinerten Koordinaten.

Beispielsweise gilt in Kugelkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$
(8.80)

Eine etwas längere Rechnung ergibt:

$$\Delta r = \frac{2}{r} \qquad \Delta \theta = \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \qquad \Delta \varphi = 0.$$
(8.81)

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. 8.79 ein erhält man Gl. 8.76.

8.7.4 Die Rotation

Die Rotation spielt insofern eine Sonderrolle, als wir das Kreuzprodukt von zwei Vektoren bisher nur für den \mathbb{R}^3 definiert haben (eingeschränkt auf den \mathbb{R}^2 ist das Kreuzprodukt von zwei Vektoren ein (Pseudo-)Skalar). Daher gebe ich die Rotation auch nur für den \mathbb{R}^3 (bzw. \mathbb{R}^2) an.

8.7. DIFFERENTIALOPERATOREN

Ausgangspunkt ist Gleichung 7.68, die wir für den Beweis des Stokes'schen Satzes verwendet haben:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^{\alpha}} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^{\beta}}\right) = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^{\beta}}\right) - \frac{\partial}{\partial u^{\beta}} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^{\alpha}}\right) , \qquad (8.82)$$

Sie gilt für ein beliebiges (einmal stetig differenzierbares) Vektorfeld und eine 2-dimensionale, durch u^{α}, u^{β} parametrisierte Fläche. Mit $\mathbf{F} = F^{\gamma} \mathbf{f}_{\gamma}$ und den Tangentialvektoren $\mathbf{f}_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^{\alpha}}$ folgt:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot (\boldsymbol{f}_{\alpha} \times \boldsymbol{f}_{\beta}) = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} (F^{\gamma} g_{\gamma\beta}) - \frac{\partial}{\partial u^{\beta}} (F^{\gamma} g_{\gamma\alpha}) = \left(\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} F_{\beta} - \frac{\partial}{\partial u^{\beta}} F_{\alpha}\right), \quad (8.83)$$

Wir dividieren beide Seiten durch $|f_1 \cdot (f_2 \times f_3)|$, und erhalten:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \frac{(\boldsymbol{f}_{\alpha} \times \boldsymbol{f}_{\beta})}{|\boldsymbol{f}_{1} \cdot (\boldsymbol{f}_{2} \times \boldsymbol{f}_{3})|} = \frac{1}{|\boldsymbol{f}_{1} \cdot (\boldsymbol{f}_{2} \times \boldsymbol{f}_{3})|} \left(\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} F_{\beta} - \frac{\partial}{\partial u^{\beta}} F_{\alpha}\right).$$
(8.84)

Nun nutzen wir einige Ergebnisse aus, die früher gezeigt wurden:

1. Im \mathbb{R}^3 ist

$$\boldsymbol{f}^{\gamma} = \frac{(\boldsymbol{f}_{\alpha} \times \boldsymbol{f}_{\beta})}{|\boldsymbol{f}_{1} \cdot (\boldsymbol{f}_{2} \times \boldsymbol{f}_{3})|}$$
(8.85)

der reziproke Vektor, der senkrecht auf f_{α} und f_{β} steht (siehe Gl. 8.10).

- 2. Im \mathbb{R}^3 ist $|\boldsymbol{f}_1 \cdot (\boldsymbol{f}_2 \times \boldsymbol{f}_3)| = \sqrt{g}$ das von den drei Basisvektoren aufgespannte Volumen (siehe Gl. 8.30).
- 3. Für einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ ist $x^{\gamma} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}^{\gamma}$.

Damit folgt

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\gamma \alpha \beta} \left(\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} F_{\beta} \right)$$
(8.86)

Wie schon mehrfach erwähnt, verwendet man in orthogonalen Koordinatensystemen meist die Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{e}}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \boldsymbol{f}_{\alpha}$ als Basis. In dieser Basis sind $\hat{F}_{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} F_{\alpha}$ die Komponenten des Vektorfelds (da die neue Basis orthonormal ist, gilt $\hat{F}_{\alpha} = \hat{F}^{\alpha}$). Mit der üblichen Notation $h_{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = |\boldsymbol{f}_{\alpha}|$ erhalten wir:

$$(\widehat{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 \hat{F}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (h_2 \hat{F}_2) \right) \,. \tag{8.87}$$

Die anderen Komponenten erhält man durch zyklische Permutation der Indizes.

Als Beispiel findet man für die Rotation eines Vektorfelds in Kugelkoordinaten (mit $h_r = 1$, $h_{\theta} = r$ und $h_{\varphi} = r \sin \theta$; vgl. Gl. 8.40):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{F}_{\varphi} \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{F}_{\theta} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_{r} + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{F}_{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{F}_{\varphi}) \right) \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta} + \quad (8.88)$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{F}_{\theta})-\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{F}_{r}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi}.$$
(8.89)

Kapitel 9

Einführung in die Funktionentheorie

Dieses Kapitel ist eine elementare Einfühung in die Theorie analytischer Funktionen – kurz *Funktionentheorie*. Viele Beweise werden nur angedeutet. Der erste Absatz dient als Wiederholung der komplexen Zahlen.

9.1 Die komplexen Zahlen

Historisch war der Weg zu den komplexen Zahlen [complex numbers] eine "schwere Geburt" (wie übrigens auch der Weg zu den negativen Zahlen). Die Frage, wie man mit Wurzeln aus negativen Zahlen umgehen soll, wurde im 16. Jahrhundert dringlich, als sich die Mathematiker mit den Lösungen von kubischen und quartischen Gleichungen beschäftigten (das sind Gleichungen der Form $ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d = 0$, wobei n maximal 3 bzw. 4 sein soll). Zwar können auch bei quadratischen Gleichungen schon Wurzeln aus negativen Zahlen auftreten, doch hier kann man sich noch herauswinden und sagen, diese Lösungen "gebe es eigentlich nicht". Doch bei kubischen Gleichungen war die Sache schwieriger: Es gibt kubische Gleichungen mit reellen Lösungen, die aber nach der allgemeinen Lösungsformel durch Wurzeln aus negativen Zahlen ausgedrückt werden. Die Lösung gibt es also offensichtlich als reelle Zahl, aber ihre Darstellung in der allgemeinen Lösungsformel enthält Wurzeln aus negativen Zahlen. Während beispielsweise Gerolamo Cardano (1501–1576) noch sehr widerwillig mit diesen Wurzeln aus negativen Zahlen rechnete (es allerdings im Gegensatz zu vielen seiner Zeitgenossen notgedrungen tat und dadurch zu einem Begründer dieses mathematischen Zweiges wurde), betrachtete zwei Jahrhunderte später Leonhard Euler (1707–1783) die imaginären Zahlen (dieser Begriff wurde vermutlich von Descartes eingeführt, das Symbol $i = \sqrt{-1}$ stammt von Euler; der Begriff der komplexen Zahl wurde später von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) geprägt) als wesentlich und trug entscheidend zu ihrer Untersuchung bei.

9.1.1 Definition der komplexen Zahlen

Es gibt viele Wege, die komplexen Zahlen einzuführen. Oft definiert man die komplexen Zahlen als die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ mit folgender Addition und Multiplikation:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{9.1}$$

und $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$ (9.2)

KAPITEL 9. EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONENTHEORIE

Man kann die reellen Zahlen auch um eine neue Zahl i erweitern, die Lösung der algebraischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist. Auf diese Weise gelangt man zu folgender Darstellung: Jede komplexe Zahl lässt sich in der Form z = x + iy schreiben. Die Rechenregeln lauten für $z_i = x_i + iy_i$:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
(9.3)

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2$$
(9.4)

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$
(9.5)

Offenbar sind beide Definitionen äquivalent. Meist wird die zweite Notation verwendet.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch eine dritte Möglichkeit, die komplexen Zahlen einzuführen. Wir betrachten alle 2×2 Matrizen der Form

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
(9.6)

Die üblichen Regeln zur Addition und Multiplikation von Matrizen liefern:

$$z_{1} + z_{2} = \begin{pmatrix} x_{1} & y_{1} \\ -y_{1} & x_{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{2} & y_{2} \\ -y_{2} & x_{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1} + x_{2} & y_{1} + y_{2} \\ -(y_{1} + y_{2}) & x_{1} + x_{2} \end{pmatrix}$$
(9.7)

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix}$$
(9.8)

$$= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$
(9.9)

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (x_1y_2 + x_2y_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(9.10)

Offenbar erfüllen diese Matrizen dieselben Regeln, wie die oben angegebenen Zahlenpaare bzw. Zahlen der Form x + iy.

Für z = x + iy bezeichnet man x als den *Realteil* [*real part*] von z und schreibt $\operatorname{Re}(z) = x$ und y als den *Imaginärteil* [*imaginary part*] von z, also $\operatorname{Im}(z) = y$.

9.1.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen bilden einen Körper, d.h. Addition und Multiplikation sind kommutativ und assoziativ. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist die reelle Zahl 1 = 1 + i0 bzw. (1,0). Das multiplikativ inverse Element zu einer komplexen Zahl z = x + iy ($z \neq 0$) ist die Zahl $z^{-1} = (x - iy)/(x^2 + y^2)$.

Auf der Menge der komplexen Zahlen ist eine Involution [involution] (eine Abbildung, deren Quadrat - also die zweimalige Hintereinanderausführung - gleich der Identität ist) definiert, die man als komplexe Konjugation [complex conjugation] bezeichnet. Die zu einer komplexen Zahl z = x + iykomplex konjugierte Zahl ist $\overline{z} = x - iy$ (manchmal schreibt man statt \overline{z} auch z^*). Die reellen Zahlen bleiben unter dieser Involution invariant. Außerdem gilt:

$$\overline{(z_1+z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{(z_1z_2)} = \overline{z_1}\overline{z_2} \qquad \overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}.$$
(9.11)

Diese Eigenschaften machen die komplexe Konjugation zu einem Körperautomorphismus. Neben der Identität ist dies der einzige Körperautomorphismus der komplexen Zahlen, der die reellen Zahlen invariant lässt. Allgemeiner gilt:

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$$
 und, z.B. $\exp(\overline{z}) = \overline{(\exp z)}$. (9.12)

9.1. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer komplex konjugierten Zahl ist eine reelle Zahl:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$
 (9.13)

Die Wurzel daraus bezeichnet man als den Betrag [absolute value] der komplexen Zahl:

$$|z| = \sqrt{\overline{z} \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2} \,. \tag{9.14}$$

Nach dem Satz des Pythagoras ist der Betrag einer komplexen Zahl der Abstand des Punktes (x, y)in der Ebene vom Nullpunkt. Im Vektorraum \mathbb{C}^n erhalten wir für einen Vektor $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ die Standardnorm:

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\overline{z_1} \cdot z_1 + \overline{z_2} \cdot z_2 + \dots + \overline{z_n} \cdot z_n} \,. \tag{9.15}$$

Diese Norm macht \mathbb{C}^n zu einem topologischen Raum, d.h. wir können von der Konvergenz von Folgen und der Stetigkeit von Funktionen sprechen.

Eine wichtige Beziehung, die man leicht nachrechnen kann, ist:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{9.16}$$

Das bedeutet (unter anderem): Das Produkt von zwei komplexen Zahlen verschwindet dann und nur dann, wenn eine der beiden komplexen Zahlen 0 ist.

Die komplexen Zahlen sind *algebraisch abgeschlossen* [*algebraically closed*], dies ist die Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra: Die Lösungen einer beliebigen Polynomgleichung

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0 \quad (a_k \in \mathbb{C})$$
(9.17)

liegen wieder in der Menge der komplexen Zahlen. Jedes solche Polynom n. Grades hat auch genau n algebraische Lösungen, d.h., es lässt sich in der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$
(9.18)

schreiben, wobei $z_k \in \mathbb{C}$ die Wurzeln [roots] dieses Polynoms p(z) sind (die Nullstellen der Polynomgleichung p(z) = 0). Dieselbe komplexe Zahl kann natürlich auch mehrfach als Wurzel auftreten. Der Beweis für den Fundamentalsatz wird am Ende dieses Abschnitts (Abschn. 9.1.5) skizziert.

9.1.3 Die Euler'sche Formel

Die Euler'sche Formel stellt eine Beziehung zwischen der Exponentialfunktion einer imaginären Zahl und ihrer Standarddarstellung in der Form x + iy her. Sie lautet:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
(9.19)

Der Beweis kann auf mehrere Weisen erfolgen.

1. Kennt man die Potenzreihenentwicklungen der Exponentialfunktion sowie vom Sinus und Kosinus, kann man die Gleichheit der beiden Seiten direkt nachprüfen:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^{2} + \frac{1}{6}x^{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^{2} + \frac{1}{24}x^{4} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^{n}x^{2n}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^{3} + \frac{1}{120}x^{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^{n}x^{2n+1}.$$

Hierbei (wie auch bei ähnlichen Beweisen für die Exponentialfunktion mancher Matrizen) nutzt man aus, dass für die imaginäre Einheit folgende Regeln gelten:

$$\mathbf{i}^{n} = \begin{cases} (-1)^{n} & \text{für } n \equiv 0 \mod 2\\ (-1)^{n} \mathbf{i} & \text{für } n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$
(9.20)

2. Nutzt man die Standardregel $e^0 = 1$, dann sollte e^{ix} für x = 0 den Wert 1 haben. Die Ableitungsregeln ergeben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,,\tag{9.21}$$

also f'(x) = if(x) für $f(x) = e^{ix}$. Das gleiche Ergebnis erhält man auch für $f(x) = \cos x + i \sin x$. Und da die Funktionen bei x = 0 übereinstimmen, ist das Ergebnis eindeutig.

Diese Herleitung ist zwar sehr elegant, erfordert aber die Kenntnis der Ableitungsregeln sowie Eindeutigkeitssätze zu Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

3. Nach den üblichen Potenzregeln $a^x a^y = a^{x+y}$ sollte $z = e^{ix}$ den Betrag 1 haben und bei x = 0 den Wert 1 annehmen. Damit kann man zeigen, dass $e^{ix} = \cos f(x) + i \sin f(x)$ sein muss, wobei f(x) eine reelle Funktion von x ist und f(0) = 0 ist. Aus den Additionstheoremen des Sinus und Kosinus kann man dann f(x) = ax ableiten, wobei a eine noch offene Konstante ist. Diese Konstante kann man erst festlegen, wenn man Eigenschaften der Eulerzahl e verwendet oder weiß, dass für sehr kleine Werte von x die Exponentialfunktion die Entwicklung $e^x = 1 + x + ...$ hat.

Damit ist die Exponentialfunktion von einer beliebigen komplexen Zahl:

$$e^{x+iy} = e^x \left(\cos y + i\sin y\right). \tag{9.22}$$

9.1.4 Die Polardarstellung komplexer Zahlen

Die Euler-Formel gibt uns zwei Möglichkeiten an die Hand, eine komplexe Zahl algebraisch darzustellen: Einmal in der Standarddarstellung (oder auch Koordinatendarstellung) als Summe aus einem Real- und einem Imaginärteil, z = x + iy, und einmal durch einen Winkel und den Betrag der komplexen Zahl (siehe Abb. 9.1):

$$z = x + iy = r \exp(i\varphi) = r \cos\varphi + ir \sin\varphi.$$
(9.23)



Abbildung 9.1: Darstellung einer komplexen Zahl durch ihren Real- und Imaginärteil z = x + iy oder in der Polardarstellung durch den Betrag und den Winkel zur *x*-Achse: $z = r \exp(i\varphi)$.

9.1. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Offensichtlich gilt:

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

$$\tag{9.24}$$

und umgekehrt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
 und $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. (9.25)

Man bezeichnet r als den Betrag von z und φ als das Argument von z und schreibt r = |z| und $\varphi = \arg z$.

Die Polardarstellung ist oft von Vorteil, wenn man das Produkt von komplexen Zahlen darstellen möchte:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$
(9.26)

Der Absolutbetrag des Produkts ist gleich dem Produkt der Absolutbeträge und die Winkel addieren sich einfach. Insbesondere erhält man für die *n*-te Potenz einer komplexen Zahl:

$$z^{n} = \left(r e^{i\varphi}\right)^{n} = r^{n} e^{in\varphi} .$$
(9.27)

Für spezielle Winkel gelten folgende Identitäten:

$$\exp(2\pi i n) = 1 \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$
(9.28)

$$\exp(\pi i) = -1$$
 und $\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i.$ (9.29)

Mit diesen Identitäten findet man:

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \left(\exp\left(\frac{\pi}{2}\mathbf{i}\right)\right)^{\mathbf{i}} = \exp\left(\frac{\pi}{2}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx 0,20788 \tag{9.30}$$

oder allgemeiner für $z = r e^{i\varphi}$:

$$z^{i} = (r \exp(i\varphi))^{i} = r^{i} \exp(i\varphi i) = \exp(-\varphi) \exp(i\ln r).$$
(9.31)

Allerdings gibt es hier eine Mehrdeutigkeit, da z.B.

$$i = \exp\left(\frac{\pi}{2}i + 2\pi in\right) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$(9.32)$$

ergibt sich

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi n\right) \,. \tag{9.33}$$

Das Potenzieren mit nicht ganzen Zahlen führt also zu Mehrdeutigkeiten, die (unter anderem) Thema der Funktionentheorie sind und in Abschnitt 9.5 behandelt werden.

Die meisten Rechenregeln für Funktionen gelten auch für die komplexen Erweiterungen, insbesondere

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) , \qquad \exp(iz) = \cos z + i\sin z \qquad (9.34)$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 , \qquad \cos iz = \cosh z$$
(9.35)

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 , \qquad \sin i z = i \sinh z$$
(9.36)

Außerdem gilt der Satz von Moivre

$$(\cos z + \mathrm{i}\sin z)^n = \cos nz + \mathrm{i}\sin nz \,. \tag{9.37}$$

Damit ergeben sich insbesondere die n.ten Wurzeln aus einer komplexen Zahl z:

$$z = r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \Rightarrow \quad z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{(\varphi + 2\pi k)}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{(\varphi + 2\pi k)}{n} \right) \qquad (k = 0, 1, ..., n - 1) \,. \tag{9.38}$$

Diese Wurzeln liegen auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden ein regelmäßiges *n*-Eck.

9.1.5 Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass sich jedes Polynom über den komplexen Zahlen als Produkt von Linearfaktoren schreiben lässt:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \prod_{k=0}^{n} (z - \lambda_k), \qquad (9.39)$$

wobei die $\{\lambda_k\}$ (nicht notwendigerweise verschiedene) komplexe Zahlen sind. Für den Beweis reicht es zu zeigen, dass die Gleichung p(z) = 0 mindestens eine Lösung λ in den komplexen Zahlen hat und sich p(z) somit in der Form

$$p(z) = (z - \lambda)q(z) \tag{9.40}$$

schreiben lässt, wobei q(z) nun ein Polynom der Ordnung n-1 ist. Dann lässt sich der volle Satz direkt als Induktionsbeweis über n formulieren.

Die Beweisidee

Es gibt viele Beweise für diesen Satz. Einige verwenden Funktionentheorie (z.B. [Kuwert 2008a], S. 48), andere reine Analysis (z.B. [Rudin 2009, Hildebrandt 2006]). Hier soll eine Beweisidee skizziert werden.

Wir betrachten ein Polynom

$$p(z) = z^{n} + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_{1}z + a_{0}$$
(9.41)

mit $a_i \in \mathbb{C}$. Außerdem soll $a_0 \neq 0$ sein, ansonsten ist offensichtlich z = 0 eine Lösung und wir sind fertig.

Wir benötigen mehrere Teilsätze:

- 1. |p(z)| ist stetig. Dies gilt allgemein für stetige Funktionen: Wenn eine Funktion $f: U \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist, ist auch |f| auf dem Gebiet U stetig.
- Stetige Funktionen nehmen auf einem kompakten Gebiet ihren Minimalwert (und Maximalwert) immer an (dies ist der Satz von Weierstra
 ß).
- 3. Für eine beliebige reelle Zahl a hat die Gleichung $z^k = a$ hat immer eine komplexe Lösung. Dies wird im nächsten Abschnitt bewiesen.

Existenz des Minimums z_0 von |p(z)|

Zunächst zeigt man, dass |p(z)| für $|z| \to \infty$ unbeschränkt ist:

Dazu schreibt man: $|p(z)| = |z^n||(1 + o(1/z))|$. Der Restterm o(1/z) wird für genügend große Werte von z beliebig klein und damit gibt es eine positive Konstante C und eine reelle Zahl X, sodass $|p(z)| > C|z|^n$ für alle |z| > X.

Daraus folgt, dass der Bereich für z, in dem $|p(z)| \leq |p(0)|$ gilt, kompakt ist (also von einer endlichen Kreisscheibe überdeckt werden kann und abgeschlossen ist). Nach dem Satz von Weierstraß nimmt die Funktion |p(z)| irgendwo in diesem Gebiet ihr Minimum an. Dieser Punkt sei z_0 .

$|p(z_0)| = 0$ und damit p(z) = 0

Es wird nun behauptet, dass $|p(z_0)| = 0$ und damit auch $p(z_0) = 0$. Dies zeigt man durch einen Widerspruchsbeweis.

9.1. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Dazu beweist man, dass es für jede Zahl z, für die $p(z) \neq 0$ ist, eine Zahl w gibt, sodass |p(z+w)| < |p(z)|. Man kann also durch eine geeignete Verschiebung in der komplexen Ebene den Absolutbetrag einer Funktion immer verkleinern, sofern dieser Absolutbetrag nicht 0 ist. Diese Aussage gilt nicht für reelle Zahlen. Also muss das Minimum von |p(z)| wirklich 0 sein und es gibt die Nullstelle.

Zu dem Beweis dieser Behauptung schreibt man p(z+w) für festes z als Polynom in w, wobei der konstante Term nun p(z) ist, was nach Voraussetzung nicht 0 sein soll. Es sei k die niedrigste Potenz von w, zu welcher der Koeffizient (nennen wir ihn b_k) nicht verschwindet. Für sehr kleine wkann man alle höheren Potenzen vernachlässigen (auch dies wäre zunächst noch zu zeigen) und man betrachtet die Funktion $p(z) + b_k w^k$. Man zeigt nun, dass man w (als komplexe Zahl) so wählen kann, dass diese Funktion einen kleineren Absolutbetrag hat als p(z). Hier wird ausgenutzt, dass $z^k = a$ immer eine (möglicherweise komplexe) Lösung hat, was im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

$z^k = a$ hat immer eine Lösung

Mithilfe der Euler'schen Formel können wir die Lösung für $z^k = a$ explizit angeben. Wir schreiben $a = r e^{i\varphi}$ und dann lautet eine Lösung

$$z = \sqrt[k]{r} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\varphi}{k}\right) \,. \tag{9.42}$$

An dieser Stelle ist noch zu zeigen, dass zu jeder positiven reellen Zahl r eine k.te Wurzel in den positiven reellen Zahlen existiert. Dies wird hier konstruktiv bewiesen in dem ich einen Algorithmus angebe, wie man die n-te Wurzel berechnen kann.

Die Eindeutigkeit folgt aus den Eigenschaften der Ordnungsrelation. Wenn es zwei verschiedene positive reelle Zahlen y_1 und y_2 gäbe, sodass $y_1^n = y_2^n = x$, dann müsste entweder $y_1 < y_2$ oder $y_2 < y_1$ gelten (da $y_1 \neq y_2$ angenommen wurde und die Ordnungsrelation auf den reellen Zahlen vollständig sein soll). Dann folgt aus Gl. 1.22 aber auch $y_1^n < y_2^n$ oder $y_2^n < y_1^n$. Wir erhalten also einen Widerspruch.

Wir betrachten nun folgende Rekursionsformel:

$$y_{k+1} = \frac{1}{n} \left((n-1)y_k + \frac{x}{y_k^{n-1}} \right)$$
(9.43)

mit Startwert $y_0 = 1$. Sie liefert eine Folge von reellen Zahlen $\{y_k\}$, die gegen die *n*-te Wurzel von x konvergiert. Die Konvergenz ist sogar sehr schnell, allerdings wäre sie an dieser Stelle erst zu beweisen. Unter der Annahme der Konvergenz folgt sofort, dass y mit $y^n = x$ der Grenzwert der Folge ist, denn aus der Gleichung

$$y = \frac{1}{n} \left((n-1)y + \frac{x}{y^{n-1}} \right)$$
(9.44)

folgt $y^n = x$. Da die Menge der reellen Zahlen vollständig ist, liegt der Grenzwert dieser Folge in den reellen Zahlen und somit existiert die *n*-te Wurzel in \mathbb{R}^+ .

9.1.6 Die komplexe Zahlenkugel und Möbius-Transformationen

Oftmals erweitert man die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ noch um das Element ∞ und betrachtet $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Damit diese Menge zu einem kompakten Raum wird, definiert man offene Bälle $B_{\epsilon}(\infty)$ um den Punkt ∞ durch die Vorschrift:

$$B_{\epsilon}(\infty) = \left\{ z \in \mathbb{C} \left| |z| > \frac{1}{\epsilon} \right\} \cup \{\infty\} \right\}.$$
(9.45)

Topologisch handelt es sich nun um eine Kugeloberfläche, also eine kompakte Menge, die man als Riemann'sche Zahlenkugel bezeichnet. Damit gilt unter anderem: Jede unendliche Folge komplexer Zahlen besitzt auf $\overline{\mathbb{C}}$ mindestens einen Häufungspunkt. Oft veranschaulicht man die Riemann'sche Zahlenkugel durch die stereographische Projektion:

Gegeben sei die Kugel $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$ im \mathbb{R}^3 mit dem Nordpol $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ und dem Südpol $\mathbf{s} = (0, 0, -1)$. Außerdem identifizieren wir \mathbb{C} mit der Ebene $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0)\}$, d.h. jede komplexe Zahl z = x + iy entspricht einem Punkt $\mathbf{z} = (x, y, 0)$ in dieser Ebene. Nun betrachten wir zu jedem Punkt $\mathbf{z} = (x, y, 0)$ die Gerade durch \mathbf{n} und \mathbf{z} , also $\mathbf{x}(t) = \mathbf{n} + t(\mathbf{z} - \mathbf{n}) = (tx, ty, 1 - t)$, welche die Kugel im Punkt

$$\boldsymbol{w}(z) = \frac{1}{1+|z|^2} (2x, 2y, |z|^2 - 1) = \frac{1}{1+|z|^2} \left(z + \overline{z}, \frac{z - \overline{z}}{i}, |z|^2 - 1 \right)$$
(9.46)

schneidet. Umgekehrt wird ein Punkt $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ auf der Kugel auf den Punkt $\boldsymbol{z} = (w_1, w_2, 0)/(1 - w_3)$ und damit die komplexe Zahl $z = (w_1 + iw_2)/(1 - w_3)$ abgebildet. Das Bild des Norpols \boldsymbol{n} ist der Punkt $z = \infty$. Diese Beziehung definiert eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf die Kugeloberfläche (Abb. 9.2).



Abbildung 9.2: Stereografische Projektion der Riemann'schen Zahlenkugel auf die Ebene der komplexen Zahlen.

Eine besondere Klasse von komplexen Funktionen sind die *Möbius-Transformationen* (benannt nach August Ferdinand Möbius (1790–1868)) oder auch gebrochen lineare Transformationen:

$$z \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit} \ ad-bc = 1 \ (a,b,c,d \in \mathbb{C}) \,. \tag{9.47}$$

Die Bedingung ad - bc = 1 ist keine Einschränkung, da sich ein gemeinsamer Faktor für alle vier komplexen Zahlen herauskürzt. (Damit die Transformation umkehrbar ist muss allerdings $ad - bc \neq 0$ gelten.) Die Möbius-Transformationen bilden eine Gruppe, d.h. die Hintereinanderschaltung von zwei Möbius-Transformationen ist wieder eine Möbius-Transformation; a = d = 1 und b = c = 0 definieren die Identitätstransformation f(z) = z. Die Gruppe hat dieselben Multiplikationsregeln wie die Gruppe der Matrizen von der Form

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det F = 1.$$
(9.48)

Diese Gruppe bezeichnet man auch als $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, die spezielle lineare Gruppe in 2 Dimensionen mit komplexen Matrixelementen. Da die Möbius-Transformation für die Koeffizienten a, b, c, d dieselbe ist wie für -a, -b, -c, -d, die Matrizen aber verschieden sind, besteht eine Gruppenisomorphie zwischen den Möbius-Transformationen und der Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, wobei sich "modulo \mathbb{Z}_2 " darauf bezieht, dass zwei Elemente F und -F aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ immer zu identifizieren sind.

Die Möbius-Transformationen sind bijektive Abbildungen von der Riemann'schen Zahlenkugel auf sich selbst. Ihre Besonderheit liegt darin, dass sie auf der Zahlenkugel eindeutig und außer bei $z_0 = -d/c$ überall holomorph (siehe nächsten Abschnitt) sind mit einem einfachen Pol bei z_0 (siehe Abschnitt 9.4.1). Diese Transformationen überführen beliebige Kreise (sowohl in $\overline{\mathbb{C}}$ als auch auf der komplexen Kugel) wieder in Kreise (wobei wir in $\overline{\mathbb{C}}$ auch Geraden einbeziehen). Für jede Möbius-Transformation gilt für je vier Punkte z_1, z_2, z_3, z_4

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = \frac{(f(z_1) - f(z_3))(f(z_2) - f(z_4))}{(f(z_1) - f(z_4))(f(z_2) - f(z_3))}.$$
(9.49)

Daher kann man mit einer Möbius-Transformation durch eine geeignete Wahl der Koeffizienten drei beliebig vorgegebene (verschiedene) Punkte z_2, z_3, z_4 in drei beliebig vorgegebene (verschiedene) Punkte $w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3), w_4 = f(z_4)$ überführen. Dazu setze man in obiger Gleichung $z_1 = z$ und löse nach f(z) auf.

9.2 Analytische bzw. holomorphe Funktionen

Wir hatten schon den Begriff der *reell-analytischen* Funktion eingeführt (siehe S. 78). Allgemein heißt eine Funktion *analytisch* in einer offenen Umgebung U eines Punktes $z_0 \in U$, wenn sie sich in U als Potenzreihe um z_0 schreiben lässt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,. \tag{9.50}$$

Bei einer reell-analytischen Funktion ist $U \subset \mathbb{R}$, bei einer komplex-analytischen Funktion ist $U \subset \mathbb{C}$.

9.2.1 Die Ableitung einer komplexen Funktion

Definition: Eine Funktion $f(z) : D \to \mathbb{C}$ $(D \subset \mathbb{C})$ auf einem offenen Gebiet D der komplexen Ebene heißt <u>holomorph</u> [holomorphic] an einem Punkt z, wenn sie in einer offenen Umgebung von z stetig ist und die Ableitung f'(z) der Funktion am Punkt z, definiert durch

$$f(z+h) = f(z) + f'(z) \cdot h + o(h), \qquad (9.51)$$

existiert und eindeutig ist. Ist eine Funktion f(z) in allen Punkten einer offenen Umgebung D in der komplexen Ebene holomorph, so bezeichnet man die Funktion als holomorph auf D.

Insbesondere die Forderung der Eindeutigkeit der Ableitung bzw. der Darstellbarkeit als komplexe Zahl hat weitreichende Folgen, die in den folgenden Abschnitten betrachtet werden.

Für komplexe Funktionen sind die Bezeichnungen *analytisch* und *holomorph* gleichwertig (manchmal sagt man auch *regulär*). Der Begriff *analytisch* ist insofern allgemeiner, als er auch auf reelle Funktionen angewandt werden kann. Dass für komplexe Funktionen *holomorph* (Existenz der Ableitung in einer offenen Umgebung) gleichbedeutend mit *analytisch* ist, folgt aus den Integraldarstellungen für komplexe Funktionen und wird in Abschnitt 9.3 bewiesen.

Die Regeln zur Berechnung der Ableitung sind dieselben wie im Reellen:

$$f(z) = z^n \quad \Rightarrow \quad f'(z) = nz^{n-1} \tag{9.52}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \Rightarrow f'(z) = -n\frac{1}{z^{n+1}}$$
 (9.53)

$$f(z) = \ln|z| \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \frac{1}{z} \tag{9.54}$$

$$f(z) = e^{az} \quad \Rightarrow \quad f'(z) = a e^{az}$$
 (9.55)

$$f(z) = \sin az \quad \Rightarrow \quad f'(z) = a \cos az \quad , \quad f(z) = \cos az \quad \Rightarrow \quad f'(z) = -a \sin az$$
(9.56)

$$f(z) = \sinh az \quad \Rightarrow \quad f'(z) = a \cosh az \quad , \quad f(z) = \cosh az \quad \Rightarrow \quad f'(z) = a \sinh az \, . \tag{9.57}$$

Es gelten die Produktregel,

$$f(z) = g(z)h(z) \Rightarrow f'(z) = g'(z)h(z) + g(z)h'(z),$$
 (9.58)

und die Kettenregel,

$$f(z) = g(h(z)) \Rightarrow f'(z) = g'(h(z))h'(z),$$
 (9.59)

und damit auch die Quotientenregel.

9.2.2 Die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen

Komplexe Zahlen z = x + iy lassen sich als Elemente der Zahlenebene \mathbb{R}^2 interpretieren. Daher kann man eine komplexe Funktion auch als zweikomponentige Funktion auf dem \mathbb{R}^2 darstellen: f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y). Umgekehrt ist aber nicht jede zweikomponentige Funktion auf dem \mathbb{R}^2 holomorph. Die Bedingung der Eindeutigkeit der Ableitung an einem Punkt als komplexe Zahl ist sehr einschränkend.

Wir betrachten eine beliebige, einmal stetig differenzierbare zweikomponentige Funktion auf dem \mathbb{R}^2 , also $(u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren die totale Ableitung nach der allgemeinen Vorschrift:

$$(u(x+h_1, y+h_2), v(x+h_1, y+h_2))$$
(9.60)

$$= (u(x,y),v(x,y)) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2, \frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2\right) + o(h)$$
(9.61)

$$= (u(x,y),v(x,y)) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h).$$
(9.62)

Nun kommt die entscheidende Einschränkung: Der in h_i lineare Ausdruck soll sich als Produkt aus der komplexen Zahl der Ableitung f'(z) = (a(x, y), b(x, y)) mit der komplexen Zahl $h = (h_1, h_2)$ schreiben lassen. Es soll also gelten:

$$f'(z) \cdot h = \left(ah_1 - bh_2, ah_2 + bh_1\right) = \left(\begin{array}{cc}a & -b\\b & a\end{array}\right) \left(\begin{array}{cc}h_1\\h_2\end{array}\right).$$

Durch Vergleich mit Gl. 9.62 erkennen wir, dass dies nur möglich ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
 und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. (9.63)

Man bezeichnet diese beiden Gleichungen als *Cauchy-Gleichungen* oder auch als *Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen*. Es handelt sich um Bedingungen an die Ableitungen einer 2-komponentigen Funktion auf dem \mathbb{R}^2 . Sind diese Bedingungen erfüllt, ist die Funktion holomorph.¹

Etwas anders ausgedrückt kann man auch sagen: Damit die 2×2 Matrix der ersten Ableitung einer Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Matrixdarstellung einer komplexen Zahl entspricht (vgl. 9.6), müssen die Cauchy-Gleichungen erfüllt sein.

Wegen der besonderen Bedeutung dieser Gleichung, möchte ich hier noch eine andere Perspektive betonen. Da es sich bei den komplexen Zahlen um einen Zahlenkörper handelt, ist die Definition

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$
(9.64)

sinnvoll (auf dem \mathbb{R}^2 als 2-dimensionalem Vektorraum ist zunächst nicht definiert, was die Division durch h bedeuten soll - für die komplexen Zahlen schon). Der Ausdruck auf der rechten Seite ist aber nach Gl. 9.61 mit $h^{-1} = (h_1, -h_2)/(h_1^2 + h_2^2)$ und den Regeln der komplexen Multiplikation (Gl. 9.2):

$$\frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2, \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 \right) \cdot (h_1, -h_2)$$

$$= \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} h_1^2 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 h_1 + \frac{\partial v}{\partial x} h_1 h_2 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2^2, -\frac{\partial u}{\partial x} h_1 h_2 - \frac{\partial u}{\partial y} h_2^2 + \frac{\partial v}{\partial x} h_1^2 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 h_1 \right)$$
(9.65)

Die rechte Seite soll nun unabhängig von h (d.h. insbesondere für alle Richtungen, die h in der Ebene auszeichnen kann) im Limes $h \to 0$ immer denselben Ausdruck ergeben. Setzen wir einmal $h_2 = 0$ und einmal $h_1 = 0$ und verlangen, dass die Ausdrücke gleich sind, folgt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
(9.66)

Dies sind wieder die Cauchy-Gleichungen. Man kann sich auch leicht überzeugen, dass in diesem Fall nicht nur die beiden Richtungsableitungen entlang der reellen und imaginären Achse gleich sind, sondern dass alle Richtungsableitungen (also z.B. $h_1 = \alpha h_2$ für beliebige reelle α) denselben Ausdruck für f'(z) ergeben.

Für z = x + iy ist $x = (z + \overline{z})/2$ und $y = (z - \overline{z})/2i$. Das bedeutet, jede Funktion F(x, y) auf einem offenen Gebiet des \mathbb{R}^2 lässt sich auch als $f(z, \overline{z}) := F((z + \overline{z})/2, (z - \overline{z})/2i)$ schreiben. Mit den Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
(9.67)

und
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$
 (9.68)

lassen sich die Cauchy-Riemann'schen Gleichungen auch in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z, \overline{z}) = 0 \tag{9.69}$$

ausdrücken. Eine holomorphe Funktion hängt also nicht von \overline{z} ab. Zum Beweis schreibe man $f(z, \overline{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$, sodass

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z,\overline{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x,y) + iv(x,y))$$
(9.70)

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \right) .$$
(9.71)

¹Es gibt eine Einschränkung: Bei den Cauchy-Gleichungen handelt es sich um partielle Ableitungen, deren Existenz nicht garantiert, dass es auch die totale Ableitung gibt. Beispielsweise erfüllen der Real- und Imaginärteil von $\exp -1/z^4$ bei z = 0 die Cauchy-Gleichungen, aber die Funktion ist trotzdem bei z = 0 nicht holomorph.

Das Verschwinden des Real- und Imaginärteils dieses Ausdrucks entspricht den Cauchy-Riemann'schen Gleichungen.

9.2.3 Holomorphe Funktionen und die 2-dimensionale Laplace-Gleichung

Aufgrund der Cauchy-Gleichungen erfüllen die Funktionen u(x, y) und v(x, y) beide die zweidimensionale Laplace-Gleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)\right) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\,,\tag{9.72}$$

also

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) \equiv \Delta u(x,y) = 0 \quad \text{und entsprechend} \quad \Delta v(x,y) = 0.$$
(9.73)

Lösungen der Laplace-Gleichung bezeichnet man allgemein auch als harmonische Funktionen.

Damit sind Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen geeignete Kandidaten zur Lösung von zweidimensionalen Laplace-Gleichungen, wie sie beispielsweise in der Potenzialtheorie oder auch der Strömungslehre auftreten. Und da mit jeder holomorphen Funktion f(z) auch die Ableitung f'(z) wieder eine holomorphe Funktion ist (möglicherweise bis auf singuläre Punkte, an denen Pole oder Verzweigungsstellen auftreten - siehe Abschnitt 9.4.1), erhält man aus einer einzelnen holomorphen Funktion eine ganze Schar von Lösungen der zweidimensionalen Laplace-Gleichung.

Als einfache Beispiele überzeuge man sich, dass sowohl die Real- als auch die Imaginärteile der folgenden Funktionen die 2-dimensionale Laplace-Gleichung lösen:

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i 2xy$$
(9.74)

$$f(z) = z^{3} = x(x^{2} - y^{2}) - 2xy^{2} + i\left(y(x^{2} - y^{2}) + 2x^{2}y\right)$$
(9.75)

$$\exp z = \exp x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \tag{9.76}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \tag{9.77}$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \tag{9.78}$$

Umgekehrt kann man nun die Frage stellen, unter welchen Bedingungen sich eine (zweimal stetig differenzierbare) Funktion u(x, y) als Realteil einer komplexen Funktion auffassen lässt. Eine notwendige Bedingung ist offensichtlich, dass es sich um eine harmonische Funktion handelt, sie also die Laplace-Gleichung erfüllt. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend und man kann v(x, y) aus u(x, y) berechnen. Sei v(x, y) eine Funktion, für die die Cauchy-Gleichungen mit u(x, y) gelten, also

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}. \tag{9.79}$$

Wir können diese Gleichungen integrieren, wobei das Integral nicht vom Weg abhängt (sofern sich die Wege stetig ineinander überführen lassen):

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial v(x',y')}{\partial x'} dx' + \frac{\partial v(x',y')}{\partial y'} dy' \right)$$
(9.80)

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u(x',y')}{\partial y'} \mathrm{d}x' + \frac{\partial u(x',y')}{\partial x'} \mathrm{d}y' \right) \,. \tag{9.81}$$

Für einen parametrisierten Weg (x(t), y(t)) von $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ nach (x(1), y(1)) = (x, y) folgt:

$$v(x,y) = \int_0^1 \left(-\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \,. \tag{9.82}$$

Ist u(x, y) bekannt und erfüllt u(x, y) die 2-dimensionale Laplace-Gleichung (dies ist die Integrabilitätsbedingung, dass das obige Integral nicht vom Weg abhängt), kann man v(x, y) berechnen. Die Funktion v(x, y) ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Wählt man speziell einen Weg $(x_0, y_0) \rightarrow (x, y_0)$ gefolgt von $(x, y_0) \rightarrow (x, y)$, so kann man auch scheiben:

$$v(x,y) = \int_{x_0}^x \left(-\frac{\partial u(x',y)}{\partial y} \Big|_{y=y_0} \mathrm{d}x' \right) + \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial u(x,y')}{\partial x} \mathrm{d}y' \right) \,. \tag{9.83}$$

In der Literatur findet man dafür gelegentlich den Ausdruck mit unbestimmten Integralen:

$$v(x,y) = \int \left(-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} dx \right) + \int \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} dx \right) dy.$$
(9.84)

Zwei harmonische Funktionen u(x, y) und v(x, y), welche die Cauchy-Gleichungen erfüllen, bezeichnet man auch als *konjugierte harmonische Funktionen*. Die Gradienten solcher Funktionen und damit auch die Äquipotenziallinien stehen senkrecht aufeinander:

$$\nabla u \cdot \nabla v = (\partial_x u, \partial_y u) \cdot \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} = (\partial_x u, \partial_y u) \cdot \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix} = -\partial_x u \, \partial_y u + \partial_y u \, \partial_x u = 0.$$
(9.85)

9.2.4 Beispiel: Potenzialströmung in der Fluiddynamik

Insbesondere 2-dimensionale Potenzial
probleme oder auch Potenzial
probleme in drei Dimensionen mit einer Translations
invarianz in einer Richtung (z.B. die Strömung um einen Zylinder oder das elektrische Feld eines geladenen Zylinders) lassen sich mit komplexen Funktionen gut lösen. Die Aufgabe besteht oft darin, Randwerte zu berücksichtigen, z.B. Dirichlet'sche Randbedingungen $\Phi(x,y) = 0$ o
der von Neumann'sche Randbedingungen $\nabla \Phi(x,y) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ für
 $(x,y) \in \partial G$, wobei ∂G der Rand eines Gebiet
sG im \mathbb{R}^2 ist (und
 \boldsymbol{n} ein Normalenvektor auf diesem Rand) und innerhalb von G die Laplace-Gleichung
 $\Delta \Phi(x,y) = 0$ erfüllt sein soll.

In der Strömungsmechanik kann man oft von einem inkompressiblen Fluid ausgehen. Diese Näherung ist besonders bei Flüssigkeiten sehr gut, es gibt aber auch Luftströmungen, bei denen diese Näherung gerechtfertigt ist. Für das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ eines solchen Fluids bedeutet dies: $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$; das Geschwindigkeitsfeld ist also divergenzfrei. Die Bewegung der einzelnen Teilchen des Fluids $\boldsymbol{x}(t)$ erhält man durch Integration der Gleichung $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$. Hier wurde angenommen, dass es sich um eine stationäre Strömung handelt, also die Strömung nicht explizit zeitabhängig ist. Wie in der Magnetostatik kann man aus der Divergenzfreiheit schließen, dass sich das Feld als Rotation eines Vektorfelds schreiben lässt: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}$. Dieses Vektorfeld wird zu einem skalaren Feld, wenn es sich effektiv um ein zweidimensionales Problem handelt (also $v_z = 0$ ist und v_x und v_y nur von den Koordinaten x und y abhängen):

$$v_x(x,y) = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}$$
 $v_y(x,y) = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}$. (9.86)

Man bezeichnet $\Psi(x, y)$ auch als *Stromfunktion* [stream function]. Offenbar steht \boldsymbol{v} senkrecht zum Gradienten von Ψ ,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \Psi = -v_x v_y + v_y v_x = 0, \qquad (9.87)$$

und damit verlaufen die Bahnkurven der Teilchen $\boldsymbol{x}(t)$ parallel zu den Linien $\Psi = \text{const.}$ Die Stromlinien zu konstanter Stromfunktion entsprechen also den unparametrisierten Bahnkurven.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man die Strömung als wirbelfrei annimmt, d.h. es gilt zusätzlich $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$. In diesem Fall existiert ein skalares Feld $\Phi(\boldsymbol{x})$, sodass $\boldsymbol{v} = \nabla \Phi(\boldsymbol{x})$. Bei

einer effektiv zweidimensionalen Strömung bedeutet dies:

$$v_x(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}$$
 $v_y(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}$. (9.88)

Damit erfüllen die beiden Potenziale offenbar die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, d.h. die Funktion

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \tag{9.89}$$

ist holomorph. Außerdem erfüllen Φ und Ψ beide die Laplace-Gleichung, $\Delta \Phi = 0$ und $\Delta \Psi = 0$, und sie sind harmonisch konjugiert zueinander. Die Ableitung von F(z),

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = v_x - \mathrm{i}v_y\,,\tag{9.90}$$

ist das komplexe Geschwindigkeitsfeld. Da $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ und $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$, erfüllen die Komponenten v_x und $-v_y$ ebenfalls die Cauchy-Gleichungen und definieren eine holomorphe Funktione $f(z) = v_x - iv_y$.

Das Feld $\Phi(x, y)$ bezeichnet man als *Potentialfunktion*. Da sein Gradient gleich dem Geschwindigkeitsfeld ist, stehen die Äquipotentiallinien senkrecht auf dem Geschwindigkeitsfeld und damit auch senkrecht auf den Bahnkurven. An einer Wand muss die Geschwindigkeit der Strömung parallel zur Wand sein, d.h. die Äquipotentiallinien von Φ müssen senkrecht zur Wand stehen. Das wiederum bedeutet, dass die Normalableitung von Φ an der Wand verschwinden muss: $\nabla \Phi \cdot \boldsymbol{n} = 0$. (Für ein ideales Fluid wird angenommen, dass die Viskosität verschwindet; das bedeutet aber, dass die zur Wand parallele Komponente der Geschwindigkeit an der Wand nicht verschwinden muss.)

Ein Beispiel bieten keilförmige Gebiete (siehe Abb. 9.3). Für die Funktion $f(z) = z^k$ gilt

$$f(z) = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi).$$
(9.91)

Die Nullstellen dieser Potenziale liegen auf den Geraden $\varphi = \pi n/k$ für den Imaginärteil und $\varphi = \pi n/k + \pi/2$ für den Realteil und beschreiben somit Keile mit einem Öffnungswinkel $\alpha = \pi/k$.

- k > 2: Es handelt sich um spitze Winkel (Abb. 9.3(a)), z.B. $\alpha = 30^{\circ}$ für k = 6.
- k = 2: Nun ist $\alpha = 90^{\circ}$ (Abb. 9.3(b)).
- 1 < k < 2: Der Winkel ist ein stumpfer Winkel zwischen 90° und 180° (Abb. 9.3(c)).
- 1/2 < k < 1: Es handelt sich um einen Winkel zwischen 180° und 360°. Die Potenziale verschwinden zwar auf dem Rand des Keils, die Gradienten werden aber an der Spitze unendlich groß. (Abb. 9.3(d)).
- k = 1/2: Dies entspricht einem Winkel von 360°, also einer dünnen Wand, die sich vom Ursprung nach unendlich erstreckt. (Abb. 9.3(e)).

Eine ähnliche Situation finden wir in der Elektrostatik in einem ladungsfreien Raum: Die Rotation des elektrischen Feldes \boldsymbol{E} verschwindet, also $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ wegen der Maxwell-Gleichung (da kein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld vorhanden sein soll), und die Divergenz verschwindet, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$, wenn keine Ladungen vorhanden sind. Die Rotationsfreiheit wird durch den Ansatz $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ erfüllt und die Divergenzfreiheit führt wieder auf die Gleichung $\Delta \Phi = 0$.

Handelt es sich bei der Berandung des Gebiets um eine leitende Wand, muss das elektrische Feld senkrecht auf dieser Wand stehen, da sonst Ströme in der Wandfläche induziert würden. Das bedeutet, dass die Äquipotenziallinien parallel zu den Wandflächen verlaufen müssen.

Im effektiv zweidimensionalen Fall können wir auch wieder ein skalares Feld $\Psi(x, y)$ definieren, das man in diesem Fall *Feldfunktion* nennt, und dessen Feldlinien Ψ = const den Feldlinien des elektrischen Feldes entsprechen.



Abbildung 9.3: Verschiedene keilförmige Gebiete, zu denen sich mit den holomorphen Funktionen $f(z) = z^{\alpha}$ Potenziale finden lassen. Eingetragen sind Beispiele für konstante Stomlinien, die den Bahnkurven von Teilchen in der Strörmung entsprechen. (Nach [Guyon 1997])

9.2.5 Konforme Abbildungen und holomorphe Funktionen

Definition: Eine lineare Abbildung $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($C \neq 0$) auf dem \mathbb{R}^n mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Norm $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ heißt konform [conformal linear mapping], wenn

$$\frac{\langle C\boldsymbol{x}, C\boldsymbol{y} \rangle}{\|C\boldsymbol{x}\| \|C\boldsymbol{y}\|} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}.$$
(9.92)

Im \mathbb{R}^2 verlangt man meist noch zusätzlich, dass die Orientierung erhalten bleibt, also det C > 0.

Eine konforme Abbildung ist also winkelerhaltend. Sie besteht im Wesentlichen aus einer Drehung und einer Streckung.

Definition: Eine stetig differenzierbare Funktion $f: U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) heißt konform, wenn $Df(\mathbf{x}) \simeq \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ für alle $\mathbf{x} \in U$ eine lineare konforme Abbildung ist.

Da die Jacobi-Matrix $\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$ einer konformen Funktion an jedem Punkt winkelerhaltend ist, werden Kurven im \mathbb{R}^n so aufeinander abgebildet, dass sich an ihren Schnittpunkten die Tangenten unter demselben Winkel schneiden. Daher sind konforme Abbildungen auch sehr beliebt als Koordinatentransformationen: Orthogonale Koordinatensysteme werden wieder in orthogonale Koordinatensysteme überführt.

In zwei reellen Dimensionen und bezüglich des kanonischen Skalarprodukts $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ hat eine lineare konforme Abbildung immer folgende Form:

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$
(9.93)

 mit

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. (9.94)

Beweis: Für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ und $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ und eine allgemeine Matrix

$$C = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \tag{9.95}$$

ist zu zeigen:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha^2 \langle C \boldsymbol{x}, C \boldsymbol{y} \rangle$$
 (9.96)

bzw.

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \alpha^2(ax_1 + bx_2)(ay_1 + by_2) + (cx_1 + dx_2)(cy_1 + dy_2)$$
(9.97)

$$= \alpha^{2}((a^{2}+c^{2})x_{1}y_{1}+(ab+cd)(x_{1}y_{2}+y_{1}x_{2})+(b^{2}+d^{2})x_{2}y_{2}).$$
(9.98)

Hierbei ist $\alpha > 0$ ein beliebiger Streckungsfaktor. Daraus folgen die beiden Gleichungen

$$a^{2} + c^{2} = b^{2} + d^{2}$$
 und $ab + cd = 0.$ (9.99)

Da außerdem ad - bc > 0 sein soll, haben diese Gleichungen nur die Lösungen a = d und c = -b.

Satz: Die Elemente der Jacobi-Matrizen der konformen Funktionen in zwei reellen Dimensionen erfüllen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Das bedeutet: Holomorphe Funktionen f(z) definieren konforme Abbildungen auf offenen Gebieten (in denen $f'(z) \neq 0$) im \mathbb{R}^2 und alle konformen Abbildungen im \mathbb{R}^2 lassen sich durch holomorphe Funktionen ausdrücken.

Der Riemann'sche Abbildungssatz besagt, dass sich jedes einfach wegzusammenhängende offene (nicht leere) Gebiet in \mathbb{C} konform bijektiv auf die Einheitskreisscheibe in \mathbb{C} abbilden lässt. Die Möbius-Transformationen sind die einzigen globalen konformen Abbildungen der Riemann'schen Zahlenkugel auf sich selbst.

Anwendungen finden konforme Transformationen beispielsweise in der Kartografie, da sich unter konformen Transformationen nicht nur Längen- und Breitengrade wieder unter 90° schneiden, sondern lokal (also in kleinen Gebieten) auch die relativen Längenverhältnisse und damit die Form von Gebieten gleich bleiben. Global muss allerdings berücksichtigt werden, dass die Streckungsfaktoren sehr unterschiedlich sein können und damit manche Gebiete übertrieben groß im Vergleich zu anderen Gebieten dargestellt werden. Eine wichtige Anwendung in der Physik finden konforme Abbildungen in der allgemeinen Relativitätstheorie bzw. allgemeiner in der Differentialgeometrie: Hier werden Mannigfaltigkeiten durch lokale Karten dargestellt und konforme flache Darstellungen einer gekrümmten Mannigfaltigkeit geben oft ein besonders gutes Bild der lokalen Verhältnisse.

9.3 Der Cauchy'sche Integralsatz

Eine komplexwertige stetige Funktion lässt sich entlang eines geschlossenen Weges integrieren. Ein geschlossener Weg $\gamma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $t \mapsto z(t)$ ist dabei wiederum eine Abbildung von einem (reellen) Intervall (das ich der Einfachheit halber gleich dem Intervall $[0, 2\pi]$ gewählt habe) in die komplexen Zahlen, sodass $z(0) = z(2\pi)$. Das Integral ist dann

$$\oint_{\gamma} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{0}^{2\pi} \left(f(z(t)) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) \,\mathrm{d}t \,. \tag{9.100}$$

9.3. DER CAUCHY'SCHE INTEGRALSATZ

Mit der Darstellung f = u(x, y) + iv(x, y) und $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$ können wir explizit schreiben:

$$\int_0^{2\pi} \left(f(z(t)) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(u(x(t), y(t)) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v(x(t), y(t)) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t$$
(9.101)

$$+\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \left(u(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + v(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) \,\mathrm{d}t \,. \tag{9.102}$$

Auf der rechten Seite stehen nun zwei gewöhnliche Riemann'sche Integrale entlang geschlossener Wege. Diese Wege liegen zwar in der xy-Ebene, wir können aber trotzdem den Stokes'schen Satz aus Kapitel 7 anwenden,² wenn wir uns die von dem Weg berandete Fläche ebenfalls als Fläche in der xy-Ebene vorstellen (das von dem Weg umrandete Gebiet sei einfach zusammenhängend). Die Rotation dieses Vektorfeldes hat nur eine z-Komponente, ist also parallel zum Normalvektor der Fläche in der xy-Ebene, über die beim Stokes'schen Satz integriert wird.

Für den Realteil ist das Vektorfeld, das entlang des geschlossenen Weges integriert wird, durch $\vec{F}_{re} = (u, -v)$ gegeben. Aufgrund der Cauchy-Gleichungen $\partial_y u = -\partial_x v$ verschwindet die Rotation dieses Feldes und damit auch der Realteil des Integrals. Für den Imaginärteil wählen wir $\vec{F}_{im} = (v, u)$. Wiederum folgt aus den Cauchy-Gleichungen, $\partial_y v = \partial_x u$, dass die Rotation dieses Vektorfeldes verschwindet und damit auch der Imaginärteil des Integrals.

Integralsatz von Cauchy: Sei f(z) eine in einem Gebiet U holomorphe Funktion, $D \subset U$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in U und $\gamma = \partial D$ der Rand von D (der ganz in U liegen soll). Dann gilt

$$\oint_{\gamma} f(z) \,\mathrm{d}z = 0 \,. \tag{9.103}$$

Diesen Satz können wir auch auf Gebiete D verallgemeinern, die nicht einfach zusammenhängend sind: Sei $\gamma \simeq C$ ein Weg, der das Gebiet D umrande und seien $\gamma_i \simeq -C_i$ (die Wege γ und γ_i werden im mathematisch positiven Sinn durchlaufen, die Wege C_i im mathematisch negativen Sinn; vgl. Abb. 9.4) Wege im Inneren des Gebietes D, die sich nicht schneiden und auch nicht ineinander verschachtelt sind, und sei f(z) eine Funktion, die in dem von C und C_i berandeten Gebiet holomorph ist, dann gilt:

$$\oint_{\gamma} f(z) \,\mathrm{d}z = \sum_{i} \oint_{\gamma_{i}} f(z) \,\mathrm{d}z \,. \tag{9.104}$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Abb. 9.4.

Nun berechnen wir das Wegintegral um den Nullpunkt über die komplexe Funktion $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Für $n \ge 0$ ist f(z) holomorph (sogar in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C} , nicht allerdings auf der Zahlenkugel bzw. $\overline{\mathbb{C}}$), sodass in diesem Fall das Integral nach dem Cauchy'schen Integralsatz verschwinden sollte. Da f(z) außerhalb von z = 0 immer holomorph ist, können wir einen Weg um den Punkt z = 0 immer als Kreisweg mit Radius r wählen. Mit der Parametrisierung $z = z(\varphi) = re^{i\varphi}$ folgt $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$ und wir erhalten

$$\oint_{\gamma} z^n \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \,\mathrm{i}r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} r^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi} \,\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 0 & n \neq -1\\ 2\pi \mathrm{i} & n = -1 \end{cases}$$
(9.105)

bzw.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(9.106)

²Alternativ können wir auch den Gauß'schen Satz in zwei Dimensionen anwenden; wir haben in Kapitel 7.4.3 gesehen, dass diese beiden Integralsätze äquivalent sind. Die beiden Felder \vec{F}_{re} und \vec{F}_{im} sind dual zueinander.

Abbildung 9.4: Die Wege C, C_1 und C_2 lassen sich zu einem Weg verbinden, der sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt. Man beachte, dass C im mathematisch positiven Sinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) durchlaufen wird, die Wege C_1 und C_2 aber im negativen Sinn (im Uhrzeigersinn) durchlaufen werden. Für die Summe aller Wege gilt der Cauchy'sche Integralsatz.



Für $n \neq -1$ verschwindet das Integral über φ , da über ein Vielfaches der vollen Periode der Sinusbzw. Kosinus-Funktion integriert wird.

Dieses zunächst sehr überraschende Resultat lässt sich noch aus einem anderen Blickwinkel verstehen: Jede Potenz $f(z) = z^n$ hat eine Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{n+1}z^{n+1}$ (für $n \neq 1$). Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung hängen Wegintegrale über f(z) somit nur vom Wert von F(z) am Anfangs- und Endpunkt ab, und Integrale über geschlossene Wege verschwinden. Der Fall n = 1 ist eine Ausnahme: Die Stammfunktion zu $f(z) = z^{-1}$ ist $F(z) = \ln z$. Der Logarithmus ist aber mehrwertig:

$$z = r \exp(i\varphi + 2\pi i n) \implies \ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi n) \qquad n \in \mathbb{Z}.$$
(9.107)

Ein geschlossener Weg um den Ursprung bringt uns auf ein anderes Blatt der Riemann'schen Fläche (siehe Abschnitt 9.5), und die Werte des Logarithmus beim selben Argument zwischen benachbarten Flächen unterscheiden sich gerade um $2\pi i$.

Sei γ ein beliebiger stetiger geschlossener Weg in \mathbb{C} um einen Punkt z_0 . Dann gilt

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z-z_0)} dz = (2\pi i) n(\gamma; z_0).$$
(9.108)

Man bezeichnet die ganze Zahl $n(\gamma; z_0)$ als die Windungszahl von γ um den Punkt z_0 .

Satz (Integralgleichung von Cauchy): Sei f(z) eine in einem (einfach zusammenhängenden) Gebiet U holomorphe Funktion und γ ein geschlossener Weg in U, der den Punkt z einmal im positiven Sinne umkreise. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = f(z) \,. \tag{9.109}$$

Liegt z außerhalb des Wegs γ , verschwindet Integral (nach dem Integralsatz von Cauchy).

Zum Beweis verwenden wir die Tatsache, dass wir γ beliebig eng um den Punkt z zusammenziehen können. Da f stetig und holomorph sein soll, ist für einen solchen Weg $f(\zeta) = f(z)$ und damit folgt das Ergebnis aus der obigen Integralformel.

Leiten wir die beiden Seiten von Gl. 9.109 n-mal nach z ab, erhalten wir:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) \,. \tag{9.110}$$

Auf der linken Seite steht das Integral über eine holomorphe Funktion (ausgenommen am Punkt $\zeta = z$, dieser wird jedoch nicht angenommen, sofern der Weg außen herumläuft), rechts steht die *n*-te

9.4. RESIDUENKALKÜL

Ableitung der Funktion f. Damit ist gezeigt, dass eine holomorphe Funktion beliebig viele Ableitungen besitzt. Da man z innerhalb des Bereichs, in dem f holomorph ist, beliebig wählen kann, ist f(z)durch diese Integrale eindeutig definiert.

Damit erhalten wir folgende Äquivalenzen von Aussagen über eine Funktion in der Umgebung einer komplexen Zahl (aus [Wiki-holomorph]):

- 1. Eine Funktion ist einmal komplex differenzierbar.
- 2. Eine Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar.
- 3. Real- und Imaginärteil erfüllen die Cauchy-Gleichungen und sind einmal stetig reell differenzierbar.
- 4. Die Funktion ist komplex-analytisch (d.h., sie lässt sich in eine komplexe Potenzreihe entwickeln).
- 5. Die Funktion ist stetig und das Wegintegral der Funktion über einen beliebigen geschlossenen zusammenziehbaren Weg verschwindet.
- 6. Die Funktionswerte innerhalb einer Kreisscheibe lassen sich aus den Funktionswerten auf dem Rand der Kreisscheibe nach dem Cauchy'schen Integralsatz bestimmen.

9.4 Residuenkalkül

Nach dem Cauchy'schen Integralsatz bzw. den Cauchy'schen Integralgleichungen können Integrale über holomorphe Funktionen entlang geschlossener Wege nur dann von null verschieden sein, wenn die Funktionen an bestimmten Stellen innerhalb dieser Wege nicht definiert sind. Das erlaubt umgekehrt die Berechnung von Integralen, indem man die Funktionen an diesen singulären Stellen untersucht. Eines der wichtigsten Hilfsmittel in diesem Zusammenhang ist der Residuensatz.

9.4.1 Laurent-Entwicklung und isolierte Singularitäten

Es sei $D_0 = \{z | 0 < |z - z_0| < R\}$ das offene Gebiet einer Kreisscheibe ohne den Mittelpunkt. Eine Funktion f(z) sei in D_0 holomorph. Dann gibt es drei Möglichkeiten für das Verhalten von f(z) an der Stelle z_0 :

1. Die Funktion f(z) ist beschränkt in einer Umgebung von z_0 . Dann lässt sich f(z) holomorph fortsetzen. In diesem Fall spricht man von einer *behebbaren Singularität*. Solche "Singularitäten" sind eigentlich keine singulären Stellen. Ein typisches Beispiel ist die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad (z \neq 0) \tag{9.111}$$

Durch die Definition f(0) = 1 wird diese Funktion holomorph auch bei z = 0.

2. Die Funktion besitzt in der Umgebung von z_0 eine Laurent-Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,. \tag{9.112}$$

In diesem Fall ist die Funktion $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ in einer Umgebung von z_0 beschränkt. Man spricht von einer *Polstelle* bzw. einem *Pol n*-ter Ordnung. Man erhält die Koeffizienten a_k aus der Integralformel:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z - z_0)^{k-1} f(z) \, \mathrm{d}z \,, \tag{9.113}$$

KAPITEL 9. EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONENTHEORIE

wobei γ ein geschlossener Weg in D_0 ist, der sich einmal im positiven Sinn um z_0 windet.

3. Die Funktion besitzt in der Umgebung von z_0 eine Laurent-Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$
(9.114)

und die Funktion $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ ist für keinen Wert von *n* beschränkt in einer Umgebung von z_0 . Eine solche Singularität bezeichnet man als wesentliche Singularität [essential singularity]. Ein Beispiel für eine Funktion mit einer wesentlichen Singularität ist

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) \qquad z \neq 0.$$
 (9.115)

Hier gilt der große Satz von Picard: In jeder beliebig kleinen Umgebung von z_0 nimmt die Funktion f(z) jeden beliebigen komplexen Wert, eventuell mit Ausnahme eines Punktes, unendlich oft an. Die Funktion $\exp(\frac{1}{z})$ nimmt in einer Umgebung von z = 0 (diesen Punkt selbst ausgeschlossen) den Wert 0 nicht an. Der Satz von Weierstraß und Casorati besagt, dass man bei einer wesentlichen Singularität einer Funktion f(z) (an der Stelle z_0) zu jedem Wert $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $\{z_i\} \to z_0$ finden kann, sodass $\{f(z_i)\} \to a$.

9.4.2 Meromorphe Funktionen

Eine Funktion f(z), die in einem Gebiet D nur isolierte Singularitäten hat, die Polstellen sind, bezeichnet man als *meromorph* [*meromorphic*]. Insbesondere sind Quotientenfunktionen von Polynomen meromorphe Funktionen auf \mathbb{C} :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad \text{mit} \quad P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \ , \ Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k \ . \tag{9.116}$$

In der Umgebung einer Polstelle z_0 besitzen meromorphe Funktionen eine Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,. \tag{9.117}$$

Eine solche Entwicklung bezeichnet man als *Laurent-Reihe* und n nennt man die Ordnung der Polstelle. Die Koeffizienten a_k erhält man mit der Integralformel:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta = a_k \,. \tag{9.118}$$

Ist f(z) eine meromorphe Funktion in einem Bereich D, dann ist auch der Kehrwert 1/f(z) eine meromorphe Funktion in diesem Gebiet.

9.4.3 Der Residuensatz

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. f(z) sei holomorph in $D - \{z_i\}$, also in dem Gebiet D außer an isolierten Punkten z_i , wo f(z) Polstellen haben soll. γ sei ein Weg in D, der die Polstellen bei z_i insgesamt einmal umschließt (siehe Abb. 9.5). Dann kann nach Gl. 9.104 das Integral entlang γ ersetzt werden durch eine Summe von Integralen jeweils entlang von Kreisen K_i , welche die isolierten Polstellen an den Punkten z_i umranden.


Abbildung 9.5: Das Integral über eine Funktion f(z) entlang des geschlossenen Weges γ lässt sich durch Integrale um die Polstellen z_i von f(z) innerhalb des von γ umrandeten Gebiets bestimmen. Dort tragen jeweils die Residuen von f(z) an den Stellen z_i bei.

Um den Beitrag dieser Integrale zu bestimmen, betrachten wir zu jedem z_i eine Umgebung $U_r(z_i) = \{z | 0 < |z - z_i| < r\}$. Der Radius dieser offenen Umgebung sei kleiner als der Konvergenzradius einer Laurent-Entwicklung von f(z) um den Punkt z_i :

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z_i)(z - z_i)^k \qquad z < r.$$
(9.119)

Die Kreise K_i liegen innerhalb des Gebiets $U_r(z_i)$. Dann folgt aus Gl. 9.106, dass

$$\oint_{K_i} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \, a_{-1}(z_i) \,. \tag{9.120}$$

Den Koeffizienten $a_{-1}(z_i)$ zu dem Pol 1. Ordnung am Punkt z_i bezeichnet man als das *Residuum* der Funktion f(z) an der Stelle z_i . Man schreibt dafür auch schon mal

$$a_{-1}(z_i) = \operatorname{Res} f(z)|_{z_i}$$
 oder auch $\operatorname{Res}_{z_i} f$ bzw. $\operatorname{Res}_{z_i}(f)$. (9.121)

Wir erhalten also insgesamt:

$$\oint_{\gamma} f(z) \,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_i} f \,, \tag{9.122}$$

wobei z_i (i = 1, ..., n) die Polstellen der Funktion f innerhalb des von γ umrandeten Gebiets sind.

9.4.4 Anwendungen des Residuensatzes

Eine wesentliche Anwendung des Residuensatzes besteht in der Berechnung von Integralen. In vielen Fällen handelt es sich dabei um Integrale entlang der gesamten reellen Achse oder entlang einer reellen Halbachse (von 0 bis ∞ oder von $-\infty$ bis 0, etc.).

Zwei Theoreme sind hier hilfreich (nach [Sommer 1970]):

Sei C ein Weg in der komplexen Ebene, der sich an beiden Enden nach Unendlich erstreckt und ein Gebiet G umrande (Abb. 9.6). Außerhalb eines Radius R sollen sich die Teile des Weges innerhalb eines Sektors der komplexen Ebene (Öffnungswinkel α) befinden. Sei f(z) eine Funktion, die holomorph in G ist mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten bei z_i . Außerdem gelte: Es gibt ein a > 1, sodass $\lim_{|z|\to\infty} |z|^a |f(z)| \to 0$ für $z \in G$. Anschaulich: f(z) verschwindet für große Werte von z innerhalb des Segments von G schneller als 1/|z|. Dann kann man den Weg C entlang eines Kreisausschnitts S mit Radius R schließen; dieses Integral trägt im Grenzfall $R \to \infty$ nichts bei und man kann den Residuensatz anwenden. Sehr oft handelt es sich bei dem Kreisausschnitt um einen Halbkreis über die obere oder untere komplexe Halbebene. Abbildung 9.6: Der Weg C verläuft für R groß innerhalb des Segments mit Öffnungswinkel α . Er kann über den Kreisbogen S im Grenzfall $R \to \infty$ geschlossen werden. Wenn die holomorphe Funktion für $|z| \to \infty$ schneller als 1/|z| gegen null geht, trägt das Integral über den Kreisbogen nichts bei.



Ein zweiter Satz betrifft besonders Integrale, die bei Fourier-Transformationen auftreten (siehe Kap. 13). Sei f(z) eine in \mathbb{C} holomorphe Funktion mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, ..., z_n$, die nicht auf der reellen Achse liegen sollen. Außerdem gelte: Es gibt Konstanten R > 0 und K > 0, sodass |z||f(z)| < K für |z| > R. Die obere bzw. untere komplexe Halbebene seien H_0 (Im(z) > 0) und H_u (Im(z) < 0). Dann existiert das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$ für $\alpha \neq 0$ und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{z_k \in H_o} \operatorname{Res}_{z_k} f(z) e^{i\alpha z} & \text{für } \alpha > 0\\ -2\pi i \sum_{z_k \in H_u} \operatorname{Res}_{z_k} f(z) e^{i\alpha z} & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$
(9.123)

Man kann leicht beweisen (siehe z.B. [Sommer 1970]), dass die Halbkreisbögen "im Unendlichen" um die obere bzw. untere Halbebene nicht zum Integral beitragen, da die Exponentialfunktionen in imaginärer Richtung für die jeweiligen Fälle schnell genug abnehmen. Durch einen solchen Halbkreisbogen wird der Integrationsweg geschlossen und man kann den Residuensatz anwenden.

Beispiel:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ erfüllt die Bedinung: Es gibt ein a > 1 (z.B. a = 3/2), sodass $\lim_{|z|\to\infty} |z|^a f(z) \to 0$. Also können wir den Weg über die obere (oder untere, dann dreht sich die Umlaufrichtung um) Halbebene schließen und den Residuensatz anwenden. Es gibt innerhalb der oberen Halbebene nur eine Singularität bei z = i. Da

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$
(9.124)

hat f(z) an der Stelle z = i das Residuum Resf = 1/(2i). Somit folgt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$
(9.125)

Beispiel: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + x^2} e^{ikx} dx$

Die Voraussetzungen für die Anwendung des zweiten Satzes sind wieder erfüllt. Diesmal müssen wir beide Singularitäten berücksichtigen: z = ia in der oberen Halbebene und z = -ia in der unteren Halbebene. Die Residuen sind:

$$\operatorname{Res}_{ia} f(z) e^{ikz} = \frac{1}{2ia} \exp(ik(ia)) = \frac{1}{2ia} \exp(-ka) \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}_{-ia} f(z) e^{ikz} = -\frac{1}{2ia} \exp(ka) \quad (9.126)$$

Damit erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + x^2} e^{ikx} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{a} \exp(-ka) & \text{für } k > 0\\ \\ \frac{\pi}{a} \exp(ka) & \text{für } k < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{a} \exp(-|k|a).$$
(9.127)

9.5 Analytische Fortsetzung - Riemann'sche Flächen

Wie wir geschen haben, besitzt jede auf einem Gebiet D holomorphe Funktion f(z) eine Taylor-Entwicklung um jeden Punkt $z_0 \in D$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,. \tag{9.128}$$

Der Konvergenzradius r dieser Potenzreihe ist mindestens so groß, wie der minimale Abstand von z_0 bis zu einem Randpunkt von D. Er lässt sich aus den Koeffizienten a_n abschätzen:

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{bzw.} \qquad r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{9.129}$$

Satz: Es seien f und g zwei in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1. f(z) = g(z) für alle $z \in D$. Die beiden Funktionen sind in D also identisch.
- 2. Es gibt einen Punkt $z_0 \in D$, für den $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n = 0, 1, \dots$ Die beiden Funktionen haben um den Punkt z_0 also dieselbe Taylor-Entwicklung.
- 3. Es gibt eine Teilmenge $E \subset D$ mit einem Häufungspunkt, sodass f(z) = g(z) für alle $z \in E$. (E kann aus diskreten Punkten bestehen, allerdings muss es ein Element $z_0 \in E$ geben, sodass in jeder Umgebung von z_0 Elemente aus E liegen.) Dieser Satz impliziert, dass die Nullstellen einer holomorphen Funktion, die nicht identisch verschwindet, isoliert sind (also keine Häufungspunkte bilden).

Es seien zwei Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ gegeben; $f_1(z)$ sei holomorph in dem Bereich D_1 und $f_2(z)$ sei holomorph in D_2 . Weiterhin sei $D \subset D_1 \cap D_2$ eine nicht-leere offene Menge, und $f_1(z) = f_2(z)$ für $z \in D$, dann bezeichnet man f_2 als die analytische Fortsetzung von f_1 (und umgekehrt). Es gibt dann eine eindeutige Funktion f(z), die in dem Gebiet $D_1 \cup D_2$ holomorph ist und in D_1 mit f_1 und in D_2 mit f_2 übereinstimmt. Diese Konstruktion erlaubt die analytische Fortsetzung von Funktionen, die zunächst nur in einem eingeschränkten Gebiet definiert sind, zu einem größeren Gebiet.

Eine holomorphe Funktion ist in der Umgebung von regulären Punkten durch ihre Potenzreihenentwicklung eindeutig gegeben. Nun kann man versuchen, durch eine geeignete Wahl von Punkten z_i innerhalb dieser Umgebung (aber möglichst weg von einer Singularität jenseits des Rands dieser Umgebung) die Funktionen analytisch fortzusetzen. Oftmals geschieht dies auch durch Integraldarstellungen der Funktionen.

Betrachten wir als Beispiel die geometrische Reihe der Funktion

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad \text{für } |z| < 1.$$
(9.130)

Der Konvergenzradius dieser Reihenentwicklung ist |z| = 1, da die Funktion bei z = -1 einen Pol erster Ordnung hat. Man kann nun eine Reihenentwicklung um z = 1 vornehmen und erhält:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+(z-1)/2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^k}{2^k} \qquad \text{für } |z| < 2.$$
(9.131)

Bei manchen Punkten, an denen eine Funktion nicht holomorph ist, ist eine analytische Fortsetzung um diese Punkte herum möglich (siehe Abb. 9.7). Dabei kann es vorkommen, dass die Funktion in Bereichen, die sich überlappen, die aber entlang unterschiedlicher (insgesamt nicht zusammenziehbarer) Wege durch analytische Fortsetzung entstanden sind, nicht dieselben Werte annehmen. Ein Beispiel ist die Wurzelfunktion $f(z) = z^{1/2}$, die bei z = 0 nicht holomorph (und damit dort auch nicht analytisch) ist. Die Zweideutigkeit des Vorzeichens der Wurzelfunktion hat zur Folge, dass eine analytische Fortsetzung um den Punkt z = 0 herum zum jeweils negativen Vorzeichen führt. Das erkennt man am deutlichsten, wenn man die Darstellung $z = re^{i\varphi}$ wählt, wodurch $f(z) = \sqrt{z} = +\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ wird. Erst eine "Drehung" um 4π (d.h. eine analytische Fortsetzung, die sich zweimal um z = 0windet) ergibt wieder denselben Funktionswert.

Abbildung 9.7: Analytische Fortsetzung um eine Singularität S. Ausgehend von einem holomorphen Bereich um einen Punkt z_0 kann man die Funktion einmal zu Bereichen um z_1 und z_2 fortsetzen und einmal zu Bereichen um z_3 und z_4 . In dem überlappenden Bereich hinter der Singularität S (schraffierter Bereich) müssen die Werte nicht übereinstimmen. Falls die Werte übereinstimmen, handelt es sich bei S um eine Polstelle, andernfalls um eine Verzweigungsstelle.



In diesem Fall muss man die komplexe Ebene zu einer sogenannten Riemann'schen Fläche erweitern. Bei der Wurzelfunktion ist die zugehörige Riemann'sche Fläche die doppelte Überlagerung der komplexen Ebene (siehe Abb. 9.8a). Bei der Logarithmus-Funktion $f(z) = \ln z$ gibt es sogar eine unendliche Überlagerung, da ein Punkt $z = re^{i\varphi}$ auf $f(z) = \ln r + i\varphi$ abgebildet wird und somit bei einem Umlauf in der komplexen Ebene $\varphi \to \varphi + 2\pi$ das Bild in einer neuen Ebene der Riemann'schen Fläche landet (Abb. 9.8b).

Besitzt eine Funktion mehrere Verzweigungsstellen dieser Art (z.B. $f(z) = \sqrt{z(z-1)(z+1)}$ mit den Verzweigungspunkten z = 0, +1, -1), kann die zugehörige Riemann'sche Fläche recht kompliziert werden.



Abbildung 9.8: Riemann'sche Flächen für verschiedene Funktionen (aus [Dittmaier 2017]). Der Winkel α gibt an, entlang welcher Linie der Verzweigungsschnitt gelegt wurde.

Kapitel 10

Distributionen

Distributionen spielen in der Physik in vielen Bereichen eine wichtige Rolle. Sie beschreiben verallgemeinerte Verteilungen, beispielsweise die Ladungs- oder Massendichte eines Punktteilchens. Sie treten aber auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie auf, z.B. wenn die (kumulative) Wahrscheinlichkeitsfunktion Sprünge macht, wie es bei diskreten Ereignissen der Fall ist.

Paul Dirac (1902–1984) hat das Konzept der Delta-Distribution Anfang der 1930er Jahre im Rahmen seiner Arbeiten an der Quantenmechanik entwickelt; Ende der 1940er Jahre wurde es von Laurent Schwarz (1915–2002) mathematisch präziser gefasst. Allerdings hatte Sergei Lwowitsch Sobolew (1908–1989) schon in den 1930er Jahren bedeutende Ergebnisse auf diesem Gebiet erzielt, die Schwarz aber nicht bekannt waren. Während Dirac noch versuchte, beispielsweise die Delta-'Funktion' als gewöhnliche Funktion aufzufassen, die allerdings an einer Stelle den Wert Unendlich annimmt, und dieses 'Unendlich' dann durch eine Integraleigenschaft spezifizierte, werden Distributionen heute als lineare Funktionale auf sogenannten Testfunktionenräumen verstanden. Oft bezeichnet man Distributionen auch als verallgemeinerte oder generalisierte Funktionen. Der Grund wird später offensichtlich.

Lineare Funktionale haben wir im Zusammenhang mit der Theorie der Vektorräume kennengelernt: Der Dualraum V^* zu einem Vektorraum V ist der Raum aller linearen Abbildungen von Vin den Körper \mathbb{K} von V. Bisher handelte es sich dabei um endlich-dimensionale Vektorräume. Nun werden wir speziell unendlich-dimensionale Vektorräume betrachten. Dabei handelt es sich nahezu ausschließlich um Vektorräume von Funktionen, daher bezeichnen wir die linearen Abbildungen von solchen Funktionenräumen in die reellen oder komplexen Zahlen auch als *lineare Funktionale*. Die Menge aller Funktionen in die reellen oder komplexen Zahlen, die Menge aller stetigen Funktionen oder aller k-mal stetig differenzierbarer Funktionen, oder auch die Menge aller Funktionen mit kompaktem Träger - sie alle bilden Vektorräume: Sie lassen sich (punktweise) addieren und mit einer Zahl (reell oder komplex) multiplizieren, ohne dass sich ihre charakteristischen Eigenschaften (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc.) ändern. Die Beziehungen zwischen einem Vektorraum von Funktionen und seinem Dualraum - dem Raum der linearen Funktionale, den wir nun im Zusammenhang mit Funktionenräumen den Raum der Distributionen nennen - sind im Allgemeinen wesentlich komplexer als bei endlich-dimensionalen Vektorräumen.

Ich beginne dieses Kapitel mit einem Beispiel - der Dirac'schen Delta-Funktion - bevor ich Testfunktionenräume einführe und dann Distributionen allgemein als lineare Funktionale auf diesen Testfunktionen definiere.

10.1 Testfunktionen und Distributionen

10.1.1 Ein physikalisches Beispiel: Punktladungen

Bevor wir den Begriff der Distribution formal definieren, soll das Konzept an Hand eines physikalischen Beispiels motiviert werden. Angenommen, wir möchten die Ladungsverteilung $\delta(\boldsymbol{x})$ (daher auch der Name "Distribution" - es handelt sich um verallgemeinerte "Verteilungen") einer Punktladung am Ort $\boldsymbol{x} = 0$ beschreiben. Die Einheiten seien so gewählt, dass die Gesamtladungsmenge 1 ist. Da sich außerhalb dieses Punktes keine Ladung befindet, müssen wir

$$\rho(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{für } \boldsymbol{x} \neq 0 \tag{10.1}$$

verlangen. Andererseits sollte aber auch für die Gesamtladung in einem Volumen V, das den Punkt $\boldsymbol{x} = 0$ enthält, gelten:

$$\int_{V} \rho(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}^{n} x = 1 \,. \tag{10.2}$$

Beide Eigenschaften zusammen lassen sich von einer gewöhnlichen Funktion (und der gewöhnlichen Definition des Integrals) nicht erfüllen. Auch die gelegentlich zu lesende Eigenschaft $\delta(0) = \infty$ ist eher irreführend und sollte vermieden werden. (Erweitert man die reellen oder komplexen Zahlen um ∞ , wie das in Kapitel 9.1.6 geschehen ist, so gibt es für ∞ Rechenregeln wie für die 0, insbesondere gilt $\infty = 2\infty$, was aber für $\delta(\boldsymbol{x})$ nicht zutrifft.)

Allerdings benötigt man den Wert der δ -Funktion' an der Stelle Null nicht.¹ Benötigt wird die folgende Eigenschaft für jede integrierbare stetige Funktion f:

$$\int \delta(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^n x = f(0) \; . \tag{10.3}$$

Dies fasst beide obigen Eigenschaften zusammen: Falls 0 nicht im Träger von f enthalten ist, verschwindet das Integral, was gleichbedeutend mit der Bedingung $\delta(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \neq 0$ ist. Und für $f(\mathbf{x}) = 1$ folgt Gl. (10.2).

Gleichung (10.3) ist sicherlich nur ein formaler Ausdruck, denn da es sich bei $\delta(\boldsymbol{x})$ nicht um eine Funktion handelt, kann die Integration nicht im Riemann'schen oder Lebesgue'schen Sinne (mit den üblichen Maßen) zu verstehen sein. Besser sollte man von einer Zuordnung bzw. Abbildung sprechen:

$$\delta : f \mapsto f(0)$$
 oder $\delta(f) \equiv \langle \delta, f \rangle = f(0)$. (10.4)

Statt $\delta(f)$ schreibe ich wieder $\langle \delta, f \rangle$, was zum Ausdruck bringen soll, dass es sich bei δ um ein Element des Dualraums zu dem Funktionenraum von f handelt. Der Funktion f wird ihr Wert an der Stelle $\boldsymbol{x} = 0$ zugeordnet. Diese Abbildung ist linear:

$$\langle \delta, \alpha f_1 + \beta f_2 \rangle = \alpha \langle \delta, f_1 \rangle + \beta \langle \delta, f_2 \rangle = \alpha f_1(0) + \beta f_2(0) \,. \tag{10.5}$$

In diesem Sinne ist die δ -Funktion eine lineare Abbildung auf dem Funktionenraum und damit ein Element des Dualraums.

Natürlich kann man einwerfen, dass es in der Physik (vermutlich) keine mathematisch exakten Punktladungen gibt und man daher immer eine winzige aber endliche Ausdehnung z.B. des Elektrons annehmen darf. Aber zum Einen haben wir eine solche Ausdehnung des Elektrons experimentell (noch) nicht nachgewiesen (die experimentellen Grenzen liegen bei einer Ausdehnung von weniger als

¹Obwohl es sich nicht um eine Funktion handelt, spricht man oft von der δ -Funktion, statt die korrektere Sprechweise δ -Distribution zu verwenden. Allerdings bezeichnet man Distributionen auch schon mal als ,Verallgemeinerte Funktionen⁶.

 10^{-19} m), zum Anderen ist es oft auch mathematisch einfacher von einer Punktladung auszugehen, nachdem man dieses Konzept mathematisch rigoros definiert hat.

Eine weitere Motivation für Distributionen stammt aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wir hatten zu einer Zufallsvariablen X die Verteilungsfunktion $P_X(x)$ definiert, die angibt, welche Wahrscheinlichkeit das Ereignis X < x hat (siehe Kapitel 7.1.3). Diese Definition ist sinnvoll, wenn man kontinuierliche Ereignismengen einbeziehen möchte. Bei diskreten Ereignismengen (z.B. dem Wurf eines Würfels) wird $P_X(x)$ zu einer Treppenfunktion und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte w(x)- formal die Ableitung von $P_X(x)$ nach x - ist auf den diskreten Werten x = 1, ..., 6 konzentriert. Auch hier ist es sinnvoll, solche punktförmigen Verteilungen zu verwenden. In manchen Büchern wird die Dirac'sche Delta-Funktion sogar als Ableitung der Treppenfunktion (genauer der Heaviside-Funktion) definiert.

10.1.2 Funktionen als Vektorräume

Als Ausgangsraum für die Definition von Distributionen dienen sogenannte Testfunktionenräume, von denen wir speziell zwei betrachten werden: (1) den Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger und (2) den Raum der beliebig of stetig differenzierbaren Funktionen, die im Unendlichen schneller als jede Potenz verschwinden. Ein Großteil der Darstellungen in diesem Kapitel stammt aus [de Jager 1970].

Die Menge aller Funktionen von einer Menge M in die reellen oder komplexen Zahlen bildet einen Vektorraum: Diese Funktionen lassen sich punktweise addieren und mit einer reellen bzw. komplexen Zahl multiplizieren: Seien $f, g : M \to \mathbb{K}$ (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) zwei Funktionen auf einer Menge M, und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, dann definieren wir:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$
(10.6)

Dies bezeichnet man als punktweise Addition und punktweise Multiplikation mit einem Element des Körpers.

Handelt es sich bei der Menge M um eine endliche Menge, z.B. $M = \{1, ..., n\}$, so ist die Menge der Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ gleich dem Vektorraum \mathbb{R}^n . Das Element *i* wird auf $f(i) = x_i$ abgebildet, d.h. eine Funktion ist charakterisiert durch ihre Funktionswerte $(x_1, ..., x_n)$. Entsprechend ist die Menge der Funktionen $f : M \to \mathbb{C}$ als Vektorraum gleich dem \mathbb{C}^n .

Wenn es sich bei der Menge M um einen topologischen Raum handelt (d.h., wir wissen, was offene Mengen sind bzw. wann eine Folge von Elementen aus M konvergiert), kann man sich auch auf stetige Funktionen beschränken: Da die Summe von zwei stetigen Funktionen wieder eine stetige Funktion ist, bilden auch die stetigen Funktionen einen Vektorraum. Und wenn es sich bei M um den \mathbb{R}^n handelt, was im Folgenden immer der Fall sein wird, können wir auch die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen betrachten; auch sie bilden einen Vektorraum, den man manchmal mit \mathcal{C}^k oder genauer mit $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ bezeichnet. Man kann auch verlangen, dass diese Funktionen an bestimmen Punkten oder auf bestimmten Teilmengen verschwinden (z.B. Dirichlet'sche Randbedingungen erfüllen) oder dass ihre Ableitungen an bestimmten Rändern verschwinden (von Neumann'sche Randbedingungen). Solche Funktionenmengen bilden Vektorräume. Demgegenüber ist beispielsweise die Menge aller Funktionen, die an einer bestimmten Stelle einen bestimmen von Null verschiedenen Wert annehmen, kein Vektorraum, da diese Eigenschaft nicht erhalten bleibt, wenn man die Summe von zwei solchen Funktionen betrachtet oder eine solche Funktion mit einer von 1 verschiedenen Zahl multipliziert.

10.1.3 Die Testfunktionenräume \mathcal{D} und \mathcal{S}

Für die Definition von Distributionen wählen wir meist Räume von Funktionen, die in jeder Hinsicht "gutartig" sind: Sie sollten beliebig oft stetig differenzierbar sein und nach Möglichkeit sollen auch die Integrale über diese Funktionen immer existieren, selbst wenn wir diese Funktionen beispielsweise mit Potenzen von x multiplizieren. Solche Funktionen bezeichnet man als Testfunktionen. Wenn man in der Physik gelegentlich sagt, dass man bestimmte Funktionen (z.B. eine Welle mit scharfer Wellenlänge, die sich mathematisch über die gesamte reelle Achse erstreckt) durch "Wellenpakete" approximieren kann, ist mit diesen Wellenpaketen meist eine Testfunktion gemeint.

Die Multiindexnotation

Bevor nun zwei für die Physik wichtige Testfunktionenräume definiert werden, soll zur Vereinfachung der Notation zunächst der sogenannte *Multiindex* eingeführt werden: Ein Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ist eine *n*-komponentige Größe mit Werten $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (einschließlich 0). Für zwei Multiindizes α, β gilt $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ und $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Damit bezeichnet (für einen *n*-Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$): $\boldsymbol{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$ und $\boldsymbol{\partial}^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Der Testfunktionenraum \mathcal{D}

Hierbei handelt es sich um den Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen vom \mathbb{R}^n in die komplexen Zahlen (die Einschränkung auf reelle Zahlen ist in den meisten Fällen möglich) mit kompaktem Träger. Diesen Raum bezeichnet man oft mit $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ oder auch mit $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Der Index ∞ deutet an, dass die Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar sein sollen, und der Index 0 soll andeuten, dass die Funktionen außerhalb eines kompakten Gebiets (im \mathbb{R}^n ist das ein abgeschlossenes Gebiet, das sich mit einem Ball von endlichem Radius überdecken lässt) verschwinden sollen, also kompakten Träger haben. Dieser Träger kann für verschiedene Funktionen verschieden sein. Ich bezeichnet Vektoren im \mathbb{R}^n durch die Fettschrift, also $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Die meisten Konzepte in diesem Kapitel gelten für solche Vektorräume. Wenn Beispiele konkret für \mathbb{R} formuliert werden, wird dies betont.

Formal können wir schreiben:

$$\mathscr{D} = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \text{supp} \ f \subset K(K \text{ kompakt}), \text{ und } \max_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{\partial}^{\alpha} f(\boldsymbol{x})| < \infty \ \forall \alpha \ (\text{Multiindex}) \}$$
(10.7)

Hierbei bezeichnet 'supp f' den Träger [support] von f. Der Träger ist definiert als der Abschluss der Menge der $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, für die $f(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Die Menge dieser \boldsymbol{x} selbst ist eine offene Menge, da f stetig ist.

Ein Beispiel für eine Funktion in \mathscr{D} ist

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2 - 1}\right) & \text{für } |\boldsymbol{x}|^2 < 1\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(10.8)

Der Träger dieser Funktion ist die Kugel vom Radius 1. Auf dem Rand dieser Kugel (also für $|\boldsymbol{x}|^2 = 1$) verschwinden alle Terme einer Taylor-Entwicklung; dort besteht die Funktion also ausschließlich aus dem Restterm. Alle Funktionen in \mathcal{D} haben diese Eigenschaft, dass die Taylor-Entwicklung auf dem Rand des Trägers verschwinden muss und es dort nur den Restterm gibt (siehe auch Abschnitt 4.4).

Der Testfunktionenraum \mathscr{S}

Dieser Raum besteht aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die zusammen mit all ihren Ableitungen im Unendlichen schneller als jede Potenz verschwinden. Man bezeichnet ihn meist mit \mathscr{S} und spricht vom *Schwarz-Raum* (benannt nach Laurent Schwarz). 'im Unendlichen schneller als jede Potenz verschwinden' bedeutet, dass wir diese Funktionen (oder beliebige Ableitungen von ihnen) mit beliebigen Potenzen von $\{x_i\}$ multiplizieren können und trotzdem verschwindet das Ergebnis noch im Unendlichen (d.h., die Funktionen bleiben integrabel). Die formale Definition ist:

$$\mathscr{S} = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} | \boldsymbol{x}^{\alpha} \boldsymbol{\partial}^{\beta} f(\boldsymbol{x}) | < \infty \quad \forall \alpha, \beta \text{ (Multiindizes)} \}.$$
(10.9)

Dieser Raum von Testfunktionen wird besonders gerne verwendet, wenn man mit analytischen Funktionen arbeiten möchte, da analytische Funktionen keinen kompakten Träger haben können. Ein weiterer Grund ist, dass eine Funktion aus \mathscr{S} unter einer Fourier-Transformation wieder auf eine Funktion aus \mathscr{S} abgebildet wird: Da die definierende Bedingung für die Funktionen in diesem Raum symmetrisch unter der Vertauschung von 'Multiplikation mit Komponenten von \boldsymbol{x} ' und 'Ableitung nach Komponenten von \boldsymbol{x} ' ist, und die Fourier-Transformation diese beiden Operationen vertauscht (siehe Abschnitt 13.1.2), erfüllt auch die Fourier-Transformierte eines Elements aus \mathscr{S} diese definierende Bedingung. Somit ist die Fourier-Transformation ein Automorphismus auf \mathscr{S} .

Ein einfaches Bespiel für eine Funktion aus ${\mathscr S}$ ist die Gauß-Funktion:

$$f(\boldsymbol{x}) = \exp(-\boldsymbol{x}^2). \tag{10.10}$$

Grenzwerte in $\mathcal D$ und $\mathcal S$

Man kann für diese Räume keine adäquate Norm definieren, aber man kann eine Topologie definieren (z.B. über eine Metrik), was hier jedoch ebenfalls nicht geschehen soll. Statt dessen werde ich angeben, unter welchen Bedingungen eine Folge von Funktionen $\{f_i\}$ in \mathscr{D} bzw. \mathscr{S} gegen eine Funktion f konvergiert:

1. Eine Folge von Funktionen $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathscr{D} konvergiert gegen eine Funktion $f \in \mathscr{D}$, wenn es (1) ein kompaktes Gebiet K gibt, sodass der Träger aller f_i in diesem Gebiet K liegt, und (2) die α -ten Ableitungen von f_i gleichmäßig gegen die α -te Ableitung von f konvergieren, d.h.

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{\boldsymbol{x} \in K} |\boldsymbol{\partial}^{\alpha} (f_i(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}))| = 0 \,\,\forall \alpha \,\,(\text{Multiindex}) \,. \tag{10.11}$$

2. Eine Folge von Funktionen $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathscr{S} konvergiert gegen eine Funktion $f \in \mathscr{S}$, wenn

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{x}^{\alpha} \boldsymbol{\partial}^{\beta} (f_i(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}))| = 0 \ \forall \alpha, \beta \ (\text{Multiindizes}) \,.$$
(10.12)

10.1.4 Distributionen als lineare Abbildungen

Nachdem Testfunktionenräume als topologische Vektorräume definiert wurden, können wir Distributionen als Funktionale auf diesen Vektorräumen definieren:

Definition: Distributionen sind stetige lineare Abbildungen (bzw. stetige lineare Funktionale) von einem Testfunktionenraum in die reellen Zahlen, d.h., Distributionen sind Elemente des Dualraums zu Testfunktionenräumen.

(Bei komplexen Testfunktionen betrachtet man auch lineare Abbildungen in die komplexen Zahlen, was hier jedoch nicht untersucht werden soll). Die Einschränkung dieser Definition auf stetige lineare Funktionale ist bei Funktionenräumen wichtig, da es wesentlich mehr allgemeine lineare Funktionale gibt. Diese Einschränkung bedeutet:

Definition: Man bezeichnet ein lineares Funktional ω als stetig, wenn für jede konvergente Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Testfunktionen (in \mathscr{D} oder \mathscr{S}) mit Grenzwert f, also $\lim_{i\to\infty} f_i = f$, gilt:

$$\lim_{i \to \infty} \langle \omega, f_i \rangle = \langle \omega, f \rangle \,. \tag{10.13}$$

Überlegen wir uns zunächst ein paar Beispiele von solchen linearen Abbildungen (die Linearität lässt sich in allen Fällen vergleichsweise leicht zeigen und wird im Folgenden nicht mehr betont):

- Ein einfaches Beispiel haben wir im Zusammenhang mit der δ -Funktion kennengelernt: $\delta : f \mapsto f(0)$ ist eine lineare Abbildung, die einer Funktion eine reelle Zahl zuordnet.
- Die Stelle $\boldsymbol{x} = 0$ ist natürlich nicht ausgezeichnet, d.h. wir können einer Funktion auch ihren Wert an einer anderen Stelle \boldsymbol{x}_0 zuordnen:

$$\delta_{\boldsymbol{x}_0}: f \mapsto \langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, f \rangle = f(\boldsymbol{x}_0). \tag{10.14}$$

Mithilfe der δ -Funktion können wir dies formal auch als Integral schreiben:

$$\langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, f \rangle = \int \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^n x = f(\boldsymbol{x}_0) \,.$$
 (10.15)

- Das Integral einer Funktion

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}^n x$$
 (10.16)

ist ein weiteres Beispiel. Die Linearität dieser Abbildung ist offensichtlich, und da wir für die Funktionen f zunächst nur Testfunktionen zulassen, existiert dieses Integral auch im üblichen Sinne.

- Für jede (integrierbare) Funktion
 $\omega(\pmb{x})$ ist die Abbildung

$$f \mapsto \langle \omega, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d^n x$$
 (10.17)

ebenfalls eine lineare Abbildung in die reellen Zahlen. Bei komplexwertigen Funktionen wählt man für diese Abbildung manchmal auch:

$$f \mapsto \langle \omega, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}) d^n x.$$
 (10.18)

Als Beispiel f
ür eine Distribution, die ein Element von D' ist (dem Dualraum von D) aber kein Element von S', dem Dualraum von S (den Raum S bezeichnet man auch als den Raum der temperierten Distributionen) ist

$$f \mapsto \langle \omega, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d^n x \quad \text{mit } \omega(\boldsymbol{x}) = \exp(+\boldsymbol{x}^2).$$
 (10.19)

Da die Testfunktionen in \mathscr{D} kompakten Träger haben, existiert das Integral dort für alle stetigen Funktionen $w(\boldsymbol{x})$; dies gilt nicht für die Testfunktionen in \mathscr{S} .

- Als letztes Beispiel betrachten wir noch die folgende Abbildung:

$$f \mapsto \partial_i f(\boldsymbol{x}_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0} \,. \tag{10.20}$$

Auch hier ist die Linearität leicht nachgewiesen.

Beginnen wir unsere Diskussion mit Gleichung (10.17). Jede integrierbare Funktion definiert durch das Integral eine lineare Abbildung auf dem Raum der Testfunktionen. Insbesondere sind die Testfunktionen selber integrierbar, d.h. jede Testfunktion kann auch in diesem Sinne als Distribution aufgefasst werden. Aber der Raum der Distributionen ist offensichtlich viel größer. Dies ist ein erster Unterschied zu endlich dimensionalen Vektorräumen: Die dualen Vektorräume sind nicht notwendigerweise isomorph zu den Vektorräumen selber, sie enthalten im Allgemeinen wesentlich mehr Elemente.

10.2. RECHENREGELN FÜR DISTRIBUTIONEN

Zu den Elementen in \mathscr{D}' und \mathscr{S}' gehören auch alle Potenzen $\omega(x) = x^n$ und allgemeiner alle stetigen Funktionen, die im Unendlichen nicht stärker als algebraisch, d.h. nicht schneller als eine Potenz von x, ansteigen. Auch nicht-stetige Funktionen sind meist integrabel. Ein bekanntes Beispiel ist die Heaviside-Funktion:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \,.$$
(10.21)

Der genaue Wert für x = 0 spielt keine Rolle, wird aber wie hier oft gleich 1/2 gesetzt. Als Distribution ist die Heaviside-Funktion folgendermaßen definiert:

$$\Theta: f \mapsto \langle \Theta, f \rangle := \int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}x \,. \tag{10.22}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass eine Funktion, die als Abbildung von \mathbb{R} in \mathbb{R} nicht stetig ist, als lineares Funktional, d.h. als Abbildung von \mathscr{D} bzw. \mathscr{S} in \mathbb{R} , stetig sein kann.

Die Integralschreibweise ist nicht nur der Indexschreibweise bei endlichen Vektorräumen sehr ähnlich,

$$\langle \omega, f \rangle = \int \omega(x) f(x) \, \mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i} \omega_{i} v_{i} \,,$$
 (10.23)

sondern sie ist auch als suggestive Form für eine lineare Abbildung so einprägsam, dass man versucht sein könnte, *jede* Distribution in dieser Form auszudrücken. Wir haben schon gesehen, wie das für die δ -Funktion und ihre Verallgemeinerung δ_{x_0} zumindest formal möglich ist (vgl. Gleichung (10.14)). Bis auf das letzte Beispiel in der obigen Liste können wir daher alle Distributionen formal als Integrale schreiben. Daher erklärt sich auch die Bezeichnung verallgemeinerten Funktionen. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass dies auch für das letzte der Beispiele zutrifft.

10.2 Rechenregeln für Distributionen

Die Sprechweise, dass es sich bei Distributionen um verallgemeinerte Funktionen handelt, legt nahe, dass wir mit Distributionen ähnlich ,rechnen' dürfen, wie mit Funktionen. Dies ist jedoch nur in einem eingeschränkten Sinne richtig.

Distributionen bilden wieder einen Vektorraum, d.h., sie lassen sich addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren. Dies gilt immer für duale Vektorräume:

$$\langle \alpha \omega_1 + \beta \omega_2, f \rangle = \alpha \langle \omega_1, f \rangle + \beta \langle \omega_2, f \rangle.$$
(10.24)

Die Integralschreibweise betont diese Eigenschaft:

$$\int (\alpha \omega_1(\boldsymbol{x}) + \beta \omega_2(\boldsymbol{x})) f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^n x = \alpha \int \omega_1(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^n x + \beta \int \omega_2(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^n x \,.$$
(10.25)

Nicht definiert hingegen ist die Multiplikation von Distributionen. Es macht keinen Sinn, von $\delta(x)\delta(x)$ zu sprechen.² Während für die Testfunktionen also eine allgemeinere mathematische Struktur definiert ist, nämlich die punktweise Multiplikation, die den Vektorraum der Testfunktionen zu einer (kommutativen, assoziativen) Algebra macht, ist für Distributionen zunächst keine Multiplikation möglich.

 $^{^{2}}$ In der Quantenfeldtheorie treten oft Unendlichkeiten auf, die man als Folge von nicht-definierten Produkten von Distributionen auffassen kann. Die Theorie der Regularisierung versucht, solche Produkte zu definieren, und die Renormierungstheorie gibt die Freiheiten an, die dabei bestehen.

Ich möchte nun definieren, wie man Distributionen ableitet. Ich gehe wieder von Gleichung (10.17) aus. Zu jeder integrierbaren und ableitbaren Funktion $\omega(\mathbf{x})$ können wir auch $\partial_i \omega(\mathbf{x})$ bilden, und es gilt:

$$\left\langle \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, f \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \omega(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^n x = -\int_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{x}) \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \, \mathrm{d}^n x = -\left\langle \omega, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle.$$
(10.26)

Randterme tragen hier nicht bei, da Testfunktionen für $x_i \to \pm \infty$ rasch genug gegen null gehen. Für Distributionen fordern wir diese Eigenschaft als *Definition der Ableitung*. Insbesondere gilt für die δ -Funktion in einer Variablen:

$$\delta', f\rangle = -\langle \delta, f' \rangle = -f'(0) \,. \tag{10.27}$$

Entsprechend gilt für die partielle Ableitung der δ -Funktion in mehreren Variablen:

<

$$\left\langle \frac{\partial \delta}{\partial x_i}, f \right\rangle = -\left\langle \delta, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = -\frac{\partial f(0)}{\partial x_i}.$$
 (10.28)

Damit haben wir auch die letzte lineare Abbildung aus unserer obigen Liste durch eine Operation auf der δ -Funktion ausgedrückt. Formal schreibt man auch:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^n x = -\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} \,. \tag{10.29}$$

Ableitungen von Distributionen sind somit durch die partielle Integration bzw. allgemeiner Relation (10.26) definiert.

Wir wollen die obigen Rechenregeln anwenden, um die Ableitung der Heaviside-Funktion zu berechnen:

$$\langle \Theta', f \rangle = -\langle \Theta, f' \rangle = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = -[f(\infty) - f(0)] = f(0) \,. \tag{10.30}$$

Die Ableitung der Heaviside-Funktion ist somit die δ -Funktion:

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x)\,. \tag{10.31}$$

Weiterhin läßt sich leicht zeigen, dass die Ableitung der stetigen Funktion (hier aufgefasst als Distribution)

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \le 0 \end{cases},$$
(10.32)

bzw. in der Distributionsschreibweise

$$\langle T, f \rangle \; = \; \int_0^\infty x f(x) \, \mathrm{d}x \; ,$$

gerade die Heaviside-Funktion ergibt, die zweite Ableitung daher die δ -Funktion:

$$T'(x) = \Theta(x)$$
 $T''(x) = \delta(x)$. (10.33)

Ein allgemeines Theorem aus der Theorie der Distributionen besagt, dass sich jede Distribution als (höhere) Ableitung von stetigen Funktionen darstellen läßt:

Satz: Zu jeder Distribution $\omega(\mathbf{x}) \in \mathscr{D}'$ gibt es eine stetige Funktion $F_{\omega}(\mathbf{x})$ und einen Multiindex α , sodass für alle Testfunktionen $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{D}$ gilt:

$$\langle \omega, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F_\omega(\boldsymbol{x}) \,\partial^\alpha f(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}^n x \,.$$
 (10.34)

Zu jeder Distribution $\omega(\mathbf{x}) \in \mathscr{S}'$ gibt es eine stetige Funktion $F_{\omega}(\mathbf{x})$, die im Unendlichen nicht schneller als Potenzen von x_i anwächst, und einen Multiindex α , sodass für alle Testfunktionen $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{S}$ gilt:

$$\langle \omega, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F_{\omega}(\boldsymbol{x}) \,\partial^{\alpha} f(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}^n x \,. \tag{10.35}$$

Da Distributionen durch ihre Wirkung auf Testfunktionen definiert sind und Ableitungen auf diese Testfunktionen geschoben werden, gilt z.B. auch:

Satz: Jede Distribution ist unendlich oft differenzierbar und für Distributionen ω in mehr als einer unabhängigen Variablen gilt immer:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_i} \,. \tag{10.36}$$

10.3 Distributionen als Grenzwerte regulärer Funktionen

Obwohl die obigen Rechenregeln für Distributionen sehr einfach sind und auch in praktischen Rechnungen meist leichter zum Ziel führen als andere Verfahren, ist es aus physikalischer Sicht manchmal sinnvoll, Distributionen als Grenzwerte regulärer Funktionen zu verstehen. Dabei beschränke ich mich im Wesentlichen auf die δ -Funktion und die Heaviside-Funktion als Distributionen zu Testfunktionen über \mathbb{R} . Verallgemeinerungen auf den \mathbb{R}^n sind meist offensichtlich.

Zunächst kann man die Konvergenz von Distributionenfolgen definieren: Eine Folge von Distributionen $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus \mathscr{D}' (bzw. \mathscr{S}') konvergiert schwach gegen eine Distribution ω aus \mathscr{D}' (bzw. \mathscr{S}'), wenn für alle Testfunktionen $f(x) \in \mathscr{D}$ (bzw. \mathscr{S}) gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \langle \omega_n, f \rangle = \langle \omega, f \rangle \,. \tag{10.37}$$

Wir suchen Funktionen $D_{\epsilon}(x)$ mit folgender Eigenschaft (für alle Testfunktionen f(x)):

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} D_{\epsilon}(x) f(x) \, \mathrm{d}x = f(0) \,. \tag{10.38}$$

(Achtung: Hier lassen sich Grenzwertbildung und Integral im Allgemeinen nicht vertauschen.) Drei solche Funktionen gebe ich hier an:

- Die Kastenfunktion:

$$D_{\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{für } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(10.39)

- Die Gauß-Funktion:

$$D_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \epsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{2\epsilon^2}\right).$$
(10.40)

- Die Lorentz-Kurve:

$$D_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \,. \tag{10.41}$$

In allen drei Fällen lässt sich Gl. 10.38 leicht nachweisen. Bewiesen werden soll dies nur für das Kastenpotenzial, für die anderen Beispiele folgt der Beweis derselben Idee. Zu beweisen ist also, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x) \, \mathrm{d}x = f(0) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (f(x) - f(0)) \, \mathrm{d}x = 0.$$
(10.42)

Da f(x) in jedem Fall Lipschitz-stetig sein soll, lässt es sich in dem Intervall $[-\epsilon, +\epsilon]$ durch eine Gerade abschätzen, d.h., es gibt eine Konstante C, sodass

$$|f(x) - f(0)| < C|x|$$
 für $|x| < \epsilon$. (10.43)

Damit ist

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} (f(x) - f(0)) \,\mathrm{d}x \bigg| \le \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |f(x) - f(0)| \,\mathrm{d}x < \frac{C}{2\epsilon} \epsilon^2 = \frac{C}{2} \epsilon \,. \tag{10.44}$$

Im Grenzfall $\epsilon \to 0$ verschwindet dieser Term.

Die bisherigen Beispiele haben folgende Eigenschaften:

$$\lim_{\epsilon \to 0} D_{\epsilon}(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0 \quad , \qquad D_{\epsilon}(x) \ge 0 \quad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} D_{\epsilon}(x) = 1 \,. \tag{10.45}$$

Für eine hinreichende Bedingung, damit eine Folge $D_{\epsilon}(x)$ gegen die δ -Funktion konvergiert, muss allerdings die erste Bedingung etwas schärfer formuliert werden: Es muss zusätzlich gelten

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \ge 1} D_{\epsilon}(x) \,\mathrm{d}x = 0.$$
(10.46)

Die Funktion

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & |x| < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(10.47)

erfüllt ebenfalls $\lim_{n\to\infty} \chi_n(x) = 0 \ \forall x$, aber trotzdem gilt: $\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

Diese Bedingungen sind allerdings nur hinreichend, nicht notwendig. Insbesondere die ersten beiden Bedingungen müssen nicht erfüllt sein. Ein Beispiel ist

$$D_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{x}{\epsilon}}{x} \,. \tag{10.48}$$

Für eine Testfunktion $\phi(x)$ gilt:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{\epsilon}}{x} \phi(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} \phi(\epsilon y) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} \phi(0) \, \mathrm{d}y = \phi(0) \,. \tag{10.49}$$

Im ersten Schritt wurde eine Variablentransformation $x \to y = x/\epsilon$ vorgenommen, im zweiten Schritt wurden Integral und Grenzwertbildung vertauscht (für $\epsilon \neq 0$ existieren alle Integrale im absoluten Sinn und alle Integranden sind Lipschitz-stetig) und im dritten Schritt wurde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \pi$$
(10.50)

ausgenutzt (siehe Anhang A1.2.1). In diesem Fall verschwinden die Integrale außerhalb des Bereichs um x = 0 nicht deshalb, weil die Funktion $D_{\epsilon}(x)$ gegen null geht, sondern weil $D_{\epsilon}(x)$ im Grenzfall $\epsilon \to 0$ so rasch oszilliert, dass sich in einem Integral über eine Testfunktion die Beiträge für $x \neq 0$ wegheben.

In der Quantentheorie tritt folgende Funktion auf:

$$\Phi(t,x) = \left(\frac{1}{2\pi i t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2it}\right)$$
(10.51)

(Im Vergleich zu der Gauß-Folge wurde hier ϵ^2 durch it ersetzt.) Auch diese Funktion hat im distributiven Sinne die Eigenschaft:

$$\lim_{t \to 0} \Phi(t, x) = \delta(x) \,. \tag{10.52}$$

Diese Funktion oszilliert im Grenzfall $t \to 0$ so rasch, dass das Integral über jede glatte Funktion außer bei x = 0 verschwindet.

Im distributiven Sinne lassen sich die δ -Funktion und auch ihre Ableitungen somit als Grenzwerte von gewöhnlichen Funktionen verstehen. Allerdings ist die explizite Auswertung der Integrale über solche Funktionen oft schwierig.

Auch die Heaviside-Funktion ist als Grenzwert von stetigen Funktionen darstellbar, beispielsweise:

$$\Theta_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2}.$$
(10.53)

Die Ableitung dieser Funktion ist die Lorentz-Kurve. Die meisten "Regularisierungen" dieser Art ergeben für x = 0 den Wert 1/2. So auch das folgende Beispiel:

$$\Theta_{\epsilon}(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\frac{x}{\epsilon})}.$$
(10.54)

10.4 Variablenwechsel

Formal handelt es sich bei Distributionen um ,Dichten', die über ein bestimmtes Gebiet zu integrieren sind, damit man ein sinnvolles Ergebnis erhält. Volumendichten, wie die 3-dimensionale Delta-Funktion $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, die beispielsweise eine Massen- oder Ladungsdichte beschreibt, sind über ein Volumen zu integrieren; Flächendichten, wie eine Stromdichte, über eine Fläche. Das bedeutet, dass man bei einem Variablenwechsel darauf achten muss, dass sich auch das Integrationsmaß ändert.

Beginnen wir zunächst mit dem regulären Fall. Gegeben sei eine Funktion $\omega(\boldsymbol{y})$ (einmal stetig differenzierbar) und eine im Integrationsbereich invertierbare Abbildung $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ (die Umkehrabbildung sei $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$), dann gilt für beliebige Testfunktionen f:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})) \, \left| \frac{\partial x_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j} \right| \, \mathrm{d}^n y \,. \tag{10.55}$$

Allgemein kann man sich als Faustregel merken, dass das Produkt aus einer Distribution mit dem Integrationsmaß unter einer Variablentransformation gleich bleiben soll:

$$\omega(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) \,\mathrm{d}^{n} \boldsymbol{x} = \omega(\boldsymbol{y}) \left| \frac{\partial x_{i}}{\partial y_{j}} \right| \,\mathrm{d}^{n} \boldsymbol{y} \,, \tag{10.56}$$

wobei $\left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right| = J$ die Jakobi-Matrix der Variablentransformation von den Koordinaten von \boldsymbol{x} auf die Koordinaten von \boldsymbol{y} ist. Insbesondere gilt für eine lineare invertierbare Transformation $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$:

$$\langle \omega(A\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \rangle = \frac{1}{|A|} \langle \omega(\boldsymbol{x}), f(A^{-1}\boldsymbol{x}) \rangle.$$
 (10.57)

Man bezeichnet eine Distribution als *invariant* unter einer invertierbaren linearen Transformation, wenn $\omega(A\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})$ oder

$$\langle \omega(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \rangle = \frac{1}{|A|} \langle \omega(\boldsymbol{x}), f(A^{-1}\boldsymbol{x}) \rangle$$
 (10.58)

für alle Testfunktionen $f(\boldsymbol{x})$.

10.4.1 Variablenwechsel in der Delta-Distribution

Betrachten wir als erstes Beispiel verschiedene Variablentransformationen der Dirac'schen Delta-Funktion. Ich beginne mit zwei Beispielen der Delta-Funktion zu Testfunktionen in einem Argument. Was ist $\delta(\alpha x)$? In Analogie zu oben gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x) f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f\left(\frac{y}{\alpha}\right) \frac{1}{|\alpha|} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{|\alpha|} f(0) \,. \tag{10.59}$$

Man schreibt dafür oft

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x) \,. \tag{10.60}$$

Gelegentlich tritt $\delta(x^2 - a^2)$ auf. In diesem Fall ist das Argument keine umkehrbare Funktion, allerdings können wir uns auf den Fall beschränken, wo δ seinen 'Träger' hat, also $x = \pm a$. Hier gilt:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{|x - a|}\delta(x + a) + \frac{1}{|x + a|}\delta(x - a) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x + a) + \delta(x - a)).$$
(10.61)

Man sollte allerdings bedenken, dass diese Beziehung zunächst nur für die Delta-Funktion definiert werden kann; im Allgemeinen ist für eine Distribution ω der Ausdruck $\omega(y(x))$ nicht definiert, wenn y(x) nicht stetig umkehrbar ist. Auch $\delta(x^2)$ ist zunächst nicht definiert.

In kartesischen Koordinaten kann man die Delta-Distribution im \mathbb{R}^3 in folgender Form schreiben:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \delta(x - x_1)\delta(y - y_1)\delta(z - z_1).$$
(10.62)

Ein Variablenwechsel zu Kugelkoordinaten führt zu:

$$\delta(\mathbf{x}(r,\theta,\varphi) - \mathbf{x}_1(r,\theta,\varphi)) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_1) \delta(\theta - \theta_1) \delta(\varphi - \varphi_1) \,. \tag{10.63}$$

10.4.2 Beispiel: Die Planck'sche Strahlungsformel

Die Planck'sche Strahlungsformel gibt die Energiedichte in einem Hohlkörper bei einer Temperatur T an. Genauer ist es eine Beziehung für die spektrale Verteilungsfunktion

$$u(T,\nu) = \frac{1}{V} \frac{dE(T,\nu)}{d\nu},$$
(10.64)

wobei $E(T, \nu)$ die Gesamtenergie der elektromagnetischen Strahlung des Systems ist, die bei einer absoluten Temperatur T auf Frequenzen kleiner oder gleich ν entfällt. V ist das Volumen des Systems. Man kann die Gleichung auch in folgender Form schreiben, die eine andere Sichtweise erlaubt:

$$\frac{1}{V} \mathrm{d}E(T,\nu) = u(T,\nu)\mathrm{d}\nu \tag{10.65}$$

 $dE(T,\nu)$ ist der Anteil der Energie, der bei einer Temperatur T von den Moden im Bereich $[\nu, \nu + d\nu]$ herrührt. Max Planck (1858–1947) konnte dafür folgende Beziehung herleiten:

$$u(T,\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_{\rm B}T}\right) - 1}.$$
 (10.66)

Manchmal findet man statt der Abhängigkeit dieser Energiedichte von der Frequenz auch die Abhängigkeit von der Wellenlänge:

$$\tilde{u}(T,\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_{\rm B}T}\right) - 1} \,. \tag{10.67}$$

Die Vorfaktoren lassen sich nur verstehen, wenn man berücksichtigt, dass es sich hier um eine Verteilungsdichte im Frequenz- bzw. Wellenlängenraum handelt und daher auch das neue Integrationsmaß berücksichtigt werden muss:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda.$$
(10.68)

Andere Unterschiede zu verschiedenen Formen dieses Gesetzes (z.B. Faktoren $4\pi/c$) rühren daher, dass man nicht die Energiedichte pro Volumen sondern die Strahlungsdichte pro Fläche angibt - dies nur der Vollständigkeit halber.

10.5 Distributionen als Randwerte komplexer Funktionen

Oftmals lassen sich Distributionen (die zunächst als Funktionale für Testfunktionen über den reellen Zahlen definiert sind) auch als Randwerte von komplexen Funktionen in folgender Form schreiben:

$$\omega(x) = \lim_{\epsilon \to 0} (g_1(x + i\epsilon) - g_2(x - i\epsilon)).$$
(10.69)

Diese Gleichung ist im Sinne von Distributionen zu verstehen, für Testfunktionen f soll also gelten:

$$\langle \omega, f \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x + i\epsilon) f(x) \, \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x - i\epsilon) f(x) \, \mathrm{d}x \right) \,. \tag{10.70}$$

Auch wenn sich viele der Formeln verallgemeinern lassen, beschränke ich mich im Folgenden auf den eindimensionalen Fall. Außerdem betrachte ich Darstellungen, bei denen die Funktionen $g_1(z)$ und $g_2(z)$ analytische Fortsetzungen voneinander sind.

10.5.1 Das "Cauchy'sche Hauptwert"-Integral

Viele der Integrale, die im Folgenden auftreten, beinhalten eine Integration über einen singulären Punkt. Eine Möglichkeit, ein solches Integral zu definieren, ist der *Hauptwert* [*principal value*] von Cauchy.

Sei $f : [a, b) \cup (b, c] \to \mathbb{R}$ in einem Intervall [a, c] wohl definiert außer an einem Punkt b. Dann definiert man:

$$\mathcal{P}\!\int_{a}^{c} f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{a}^{b-\epsilon} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{b+\epsilon}^{c} f(x) \,\mathrm{d}x \right) \,. \tag{10.71}$$

Wichtig ist die symmetrische Annäherung an den kritischen Punkt. Mit der symmetrischen Funktion

$$I_{\epsilon}(x) = \begin{cases} 1 & |x| > \epsilon \\ 0 & |x| \le \epsilon \end{cases}$$
(10.72)

kann man auch schreiben:

$$\mathcal{P} \int_{a}^{c} f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a}^{c} I_{\epsilon}(x-b) f(x) \,\mathrm{d}x \,. \tag{10.73}$$

Statt $I_{\epsilon}(x)$ kann man auch andere, ähnliche Funktionen wählen. Wichtig ist, dass diese Funktionen symmetrisch sind, für $\epsilon \neq 0$ sollte $I_{\epsilon}(0) = 0$ sein, und für $\epsilon \to 0$ sollten diese Funktionen gegen $I_0(x) = 1$ für $x \neq 0$ gehen. Ein Beispiel ist:

$$I_{\epsilon}(x) = \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2} \,. \tag{10.74}$$

Beispielsweise ist (a < 0, c > 0)

$$\mathcal{P}\!\int_{a}^{c} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{a}^{-\epsilon} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int_{+\epsilon}^{c} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \right) \tag{10.75}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} (\ln |-\epsilon| - \ln |a| + \ln |c| - \ln |+\epsilon|) = \ln |c| - \ln |a|.$$
 (10.76)

Das gleiche Ergebnis erhält man für

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a}^{c} \frac{x^{2}}{x^{2} + \epsilon^{2}} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2} \int_{x=a}^{x=c} \frac{1}{x^{2} + \epsilon^{2}} \, \mathrm{d}x^{2} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2} \ln(x^{2} + \epsilon^{2}) \Big|_{a}^{c} = \ln|c| - \ln|a|.$$
(10.77)

Statt \mathcal{P} schreibt man für den Cauchy'schen Hauptwert auch gelegentlich "p.v." (für "principal value").

10.5.2 Diracs δ -Identität

Für eine Testfunktion f(x) gilt:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\langle \frac{1}{x \pm i\epsilon}, f(x) \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\epsilon} f(x) \, dx = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f(x) \, dx \mp i\pi f(0)$$
(10.78)

Beweis: Mit

$$\frac{1}{x\pm i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$
(10.79)

folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\epsilon} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2} \frac{f(x)}{x} dx \mp i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} f(x) dx$$
(10.80)

Im Grenzfall $\epsilon \to 0$ wird das erste Integral nach den Überlegungen des letzten Abschnitts zum Hauptwert-Integral über f(x)/x, während das zweite Integral bis auf einen Faktor π eine Dirac-Folge darstellt (vgl. Gl. 10.41).

Vereinfacht schreibt man die Dirac-Identität (Gl. 10.78) auch schon mal in der Form:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x)$$
(10.81)

Allerdings sollte man nicht vergessen, dass diese Gleichung im distributiven Sinne, also angewandt auf Testfunktionen, zu verstehen ist.

Bildet man die Differenz der beiden Ausdrücke, hebt sich das Hauptwertintegral weg und wir erhalten:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right)$$
(10.82)

Diese Gleichung lässt sich aus der Cauchy'schen Integralformel (Gl. 9.109) verstehen:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} \,\mathrm{d}z\,,\tag{10.83}$$

wobei γ ein Weg in der komplexen Ebene ist, der sich einmal entgegen dem Uhrzeigersinn um die Polstelle z = 0 windet (und f(z) in einem Gebiet, das γ enthält, holomorph ist). Die Funktion $1/(z - i\epsilon)$ ist überall holomorph, außer bei ihrer Polstelle bei $z_0 = i\epsilon$. Ebenso ist $1/(z + i\epsilon)$ überall holomorph, außer bei $z_0 = -i\epsilon$. Statt also einmal in der komplexen Ebene ein Kreisintegral um eine Polstelle auf der reellen Achse auszuführen, kann man auch entlang der reellen Achse integrieren und die Polstellen in die komplexe Ebene zu $\pm i\epsilon$ verschieben (siehe Abb. 10.1).



Abbildung 10.1: Durch eine Verschiebung einer Polstelle auf der reellen Achse in die komplexe Ebene kann ein Integral entlang der reellen Achse als Halbkreisintegral um die Polstelle interpretiert werden. Ein Kreisintegral um eine Polstelle auf der reellen Achse lässt sich als Differenz von zwei Integralen entlang der reellen Achse darstellen, wobei die Postelle einmal um ϵ in die positive imaginäre Richtung und einmal in die negative imaginäre Richtung verschoben wurde.

Leitet man Gl. 10.81 mehrfach ab, erhält man die höheren Ableitungen der Delta-Distribution:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(x \pm i\epsilon)^n} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x^n}\right) \mp \frac{i\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x)$$
(10.84)

bzw.

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} n! \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{(x+i\epsilon)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i\epsilon)^{n+1}} \right).$$
(10.85)

10.5.3 Die Heaviside-Funktion

Wir können Gleichung 10.81 auch integrieren. Dazu benötigen wir die Stammfunktion zum Cauchy-Hauptwert von 1/x. Für $x \neq 0$ gilt für reelle Zahlen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{10.86}$$

Diese Gleichung können wir im distributiven Sinne auf die gesamte reelle Achse ausdehnen, indem wir definieren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\,.\tag{10.87}$$

Diese Gleichung kann man mit den Ableitungsregeln für Distributionen auch herleiten, wenn man $\ln |x|$ als Distribution definiert:

$$\langle \ln |x|, \phi(x) \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \ln |x| \phi(x) \, \mathrm{d}x \,. \tag{10.88}$$

In der komplexen Ebene ist $\ln z$ aber für alle $z \neq 0$ definiert und es gilt $\frac{d}{dz} \ln z = 1/z$. Beschränken wir uns auf das Blatt der Riemann'schen Ebene, auf dem $\ln z = \ln |z|$ für $0 < z \in \mathbb{R}$, so erhalten wir für $z = r \exp(i\varphi)$:

$$\ln z = \ln |z| + i\varphi \qquad \varphi \in [\pi, -\pi).$$
(10.89)

Somit folgt:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \ln(x \pm i\epsilon) = \begin{cases} \ln x & x > 0\\ \ln |x| \pm i\pi & x < 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$
(10.90)

bzw.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \ln(x \pm i\epsilon) = \ln |x| \pm i\pi \Theta(-x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
(10.91)

Damit erhalten wir:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\ln(x + i\epsilon) - \ln(x - i\epsilon) \right) = 2\pi i \Theta(-x)$$
(10.92)

oder

$$\Theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\ln(-x + i\epsilon) - \ln(-x - i\epsilon) \right).$$
(10.93)

10.6 Die Funktionalableitung

Das Thema "Funktionalableitung" wird gewöhnlich im Rahmen der Variationsrechnung behandelt, hängt aber eng mit Distributionen zusammen. Gegeben sei ein Funktionenraum $\mathcal{F} = \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (auf Verallgemeinerungen auf mehr Dimensionen gehe ich später ein). Es sollte sich bei diesem Funktionenraum um einen affinen Raum handelt, d.h., Differenzen von zwei Funktionen $f_1(x) - f_2(x)$ sollten Elemente eines Vektorraums sein. Das ist beispielsweise der Fall, wenn die Funktionen feste Randbedingungen erfüllen (z.B. Dirichlet'sche Randbedingungen, wobei die Funktionen auf dem Rand nicht verschwinden müssen), da Differenzen solcher Funktionen am Rand verschwinden und somit Elemente eines Vektorraums sein können. Auf \mathcal{F} sei ein *Funktional* definiert, d.h., eine Abbildung, die jedem Element aus \mathcal{F} eine Zahl zuordnet: $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mit $f \mapsto S[f]$. In vielen Fällen handelt es sich um ein Integral über Potenzen von f und ihren Ableitungen, also Funktionale der Form

$$S_1[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x), f''(x), ...; x) \, \mathrm{d}x \,. \tag{10.94}$$

Von dieser Form ist beispielsweise die Wirkung in der klassischen Mechanik, wobei $L(y_0, y_1, y_2, ...; x)$ dort der Lagrange-Funktion entspricht. Es können aber auch andere Ausdrücke auftreten, z.B.

$$S_2[f] = \int_a^b \dots \int_a^b F(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \, \mathrm{d}x_1 \dots \, \mathrm{d}x_n \,, \tag{10.95}$$

wobei $F(x_1, ..., x_n)$ verallgemeinerte Integralkerne (Distributionen) sein können. Natürlich sind auch lineare Funktionale möglich, z.B.

$$S_3[f] = f(x_0) \,. \tag{10.96}$$

Definiert werden soll die Funktionalableitung in Anlehnung an die totale Ableitung von Funktionen in mehreren Variablen (ich unterscheide im Folgenden nicht zwischen den Richtungsableitungen und der totalen Ableitung). In Analogie zu der Definition:

$$f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \epsilon \langle \boldsymbol{D} f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle + o(\epsilon), \qquad (10.97)$$

wobei sich der Ableitungsterm in Koordinaten in der Form

$$\langle \boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} h_i$$
(10.98)

schreiben lässt, definieren wir

$$S[f + \epsilon h] = S[f] + \epsilon \left\langle \delta S[f], h \right\rangle + o(\epsilon) \,. \tag{10.99}$$

Im Sinne von Distributionen soll sich der Ableitungsterm als verallgemeinertes Integral schreiben lassen:

$$\langle \delta S[f], h \rangle = \int_{a}^{b} \frac{\delta S[f]}{\delta f(x)} h(x) \,\mathrm{d}x \,. \tag{10.100}$$

h(x) ist eine Testfunktion, deren genaue Eigenschaften im konkreten Fall zu spezifizieren sind, und $\frac{\delta S[f]}{\delta f(x)}$ ist gewöhnlich eine Distribution.

Betrachten wir die obigen Beispiele: Für S_1 erhalten wir:

$$S_{1}[f + \epsilon h] = \int_{a}^{b} L(f(x) + \epsilon h(x), f'(x) + \epsilon h'(x), f''(x) + \epsilon h''(x), ...; x) dx$$
(10.101)
$$= \int_{a}^{b} L(f(x), f'(x), f''(x), ...; x) dx + \epsilon \sum_{k=0}^{n} \int_{a}^{b} \left. \frac{\partial L}{\partial y_{k}} \right|_{y_{k} = f^{(k)}(x)} h^{(k)}(x) dx + o(\epsilon)$$

$$= S_{1}[f] + (-1)^{k} \epsilon \sum_{k=0}^{n} \int_{a}^{b} \left. \frac{d^{k}}{dx^{k}} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial y_{k}} \right|_{y_{k} = f^{(k)}(x)} \right) h(x) dx + \text{Randterme} + o(\epsilon) .$$

Abgesehen von den Randtermen (die von den Bedingungen an h(x) abhängen und beispielsweise verschwinden, wenn h(x) mit seinen ersten n Ableitungen bei a und b verschwinden soll) erhalten wir somit:

$$\frac{\delta S_1}{\delta f(x)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial y_k} \right|_{y_k = f^{(k)}(x)} \right) = \frac{\partial L}{\partial f(x)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial f'(x)} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \frac{\partial L}{\partial f''(x)} - \dots$$
(10.102)

In der Mechanik ist die Wirkung ein Funktional einer Bahnkurve und die Lagrange-Funktion ist eine Funktion der Bahnkurve zum Zeitpunkt t (also x(t)) sowie der Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt (also $\dot{x}(t)$). Damit folgt:

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{\partial L}{\partial x(t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} \,. \tag{10.103}$$

Das Hamilton'sche Prinzip verlangt, dass die erste Variation der Wirkung für physikalisch realisierte Bahnkurven verschwindet, was zu den Euler-Lagrange'schen Bewegungsgleichungen führt:

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial L}{\partial x(t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} = 0.$$
(10.104)

Man beachte, dass diese Bedingung nach den obigen Bemerkungen im distributiven Sinne gelten soll, d.h., das Integral von $\frac{\delta S}{\delta x(t)}$ über eine beliebige Testfunktion soll verschwinden.

Für die anderen Beispiele von Funktionalen erhalten wir:

$$S_{2}[f + \epsilon h] = \int_{a}^{b} \dots \int_{a}^{b} F(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}) (f(x_{1}) + \epsilon h(x_{1})) \dots (f(x_{n}) + \epsilon h(x_{n})) dx_{1} \dots dx_{n}$$

$$= S_{2}[f] + \epsilon \sum_{k=1}^{n} \int_{a}^{b} \dots \int_{a}^{b} F(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}) f(x_{1}) \dots h(x_{k}) \dots f(x_{n}) dx_{1} \dots dx_{n} + O(\epsilon^{2})$$

und damit:

$$\frac{\delta S_2}{\delta f(x)} = \sum_{k=1}^n \int_a^b \dots \int_a^b F(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) f(x_1) \dots f(x_{k-1}) f(x_{k+1}) \dots f(x_n) \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_n \,.$$
(10.105)

Man beachte, dass der "freie Index" x auf der linken und rechten Seite gleich ist, wohingegen über alle anderen Variablen x_1 bis x_n (außer x_k) integriert wird.

Für das dritte Beispiel folgt schließlich:

$$S_3[f + \epsilon h] = f(x_0) + \epsilon h(x_0) = S_3[f] + \epsilon \int_a^b \delta(x - x_0)h(x) \,\mathrm{d}x \tag{10.106}$$

und somit:

$$\frac{\delta S_3}{\delta f(x)} = \delta(x - x_0). \tag{10.107}$$

Die meisten dieser Ausdrücke lassen sich uneingeschränkt auf den Fall von Funktionalen von Feldern (also Funktionen in mehreren Variablen) übertragen. Für die Wirkung einer Feldtheorie mit einem Feld $\varphi(\boldsymbol{x})$, bei dem die Lagrange-Dichte, die nun über die 4-dimensionale Raumzeit zu integrieren ist und typischerweise von $\varphi(\boldsymbol{x})$ und den ersten Ableitungen $\partial_{\mu}\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x^{\mu}}$ abhängt, gilt:

$$S[\varphi] = \int_{\Gamma \subset \mathbb{R}^4} \mathscr{L}(\varphi(\boldsymbol{x}), \partial_\mu \varphi(\boldsymbol{x})) \,\mathrm{d}^4 x \,. \tag{10.108}$$

Meist wird über den gesamten \mathbb{R}^3 integriert sowie über ein Zeitintervall. Die Funktionalableitung erhalten wir wieder nach der Vorschrift:

$$S[\varphi + \epsilon h] = \int_{\Gamma \subset \mathbb{R}^4} \mathscr{L}(\varphi(\boldsymbol{x}) + \epsilon h(\boldsymbol{x}), \partial_\mu \varphi(\boldsymbol{x}) + \epsilon \partial_\mu h(\boldsymbol{x})) \,\mathrm{d}^4 x$$
(10.109)

$$= S[\varphi] + \epsilon \int_{\Gamma \subset \mathbb{R}^4} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi(\boldsymbol{x})} h(\boldsymbol{x}) + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(\boldsymbol{x}))} \partial_\mu h(\boldsymbol{x}) \right) d^4 x + o(\epsilon) \quad (10.110)$$

$$= S[\varphi] + \epsilon \int_{\Gamma \subset \mathbb{R}^4} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi(\boldsymbol{x})} - \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi(\boldsymbol{x}))} \right) h(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^4 x + o(\epsilon) \,. \quad (10.111)$$

Wenn die erste Variation der Wirkung verschwinden soll, folgen daraus die Euler-Lagrange-Gleichungen der Feldtheorie:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi(\boldsymbol{x})} - \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi(\boldsymbol{x}))} \right) = 0.$$
(10.112)

Teil II

Mathematik für Studierende der Physik II

Kapitel 11

Green'sche Funktionen

11.1 Einführende Vorbemerkungen

In der Vorlesung zur Mechanik (Experimentalphysik I) wurde der Oszillator mit einer äußeren (treibenden) Kraft untersucht. Für den gedämpften Fall mit Dämpfungsfaktor γ führte dies auf eine Differentialgleichung der Form

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) x(t) = K(t), \qquad (11.1)$$

wobei ω_0 die Eigenfrequenz des ungedämpften und ungetriebenen harmonischen Oszillators und K(t)eine zeitabhängige äußere Beschleunigung bezeichnen. (Da die Gleichung bereits durch die Masse dividiert wurde, handelt es sich nicht um eine externe Kraft, sondern eine Beschleunigung a = F/m.) In der Mechanik sowie in Kap. 5.3.4 wurde für K(t) ein harmonisch oszillierender Antrieb betrachtet und dann für die Lösung ein Exponentialansatz gewählt. Eines der Ziele dieses Kapitels ist es, Differentialgleichungen dieser Art allgemein zu behandeln.

Formal hat Gleichung 11.1 die Gestalt:

$$\mathcal{L}x = K$$
 mit $\mathcal{L} = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right)$. (11.2)

Hierbei ist \mathcal{L} ein linearer Operator, der auf eine Funktion x(t) wirkt. Ebenso formal ausgedrückt möchte man gerne "das Inverse" von \mathcal{L} finden, sodass die Lösung lautet:

$$x = \mathcal{L}^{-1}K. \tag{11.3}$$

Das Inverse zu \mathcal{L} ist dabei definiert durch die Bedingung:

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \mathbf{1}. \tag{11.4}$$

Überlegen wir uns kurz die Analogie zur Matrixschreibweise: In der linearen Algebra entspräche Gl. (11.2) einer Gleichung der Form:

$$L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{K}$$
, in Komponenten ausgedrückt $\sum_{j} L_{ij} x_j = K_i$, (11.5)

mit der formalen Lösung analog zu Gl. (11.3)

$$\boldsymbol{x} = L^{-1}\boldsymbol{K}$$
, in Komponenten $x_i = \sum_j (L^{-1})_{ij} K_j$. (11.6)

Hierbei ist die inverse Matrix L^{-1} zur Matrix L durch die Gleichung

$$\sum_{k} L_{ik} (L^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$$
(11.7)

definiert, was Gleichung (11.4) entspricht.

Grundsätzlich können wir auch bei Differentialoperatoren von 'Inversen' sprechen, obwohl in diesem Zusammenhang der Ausdruck *Green'sche Funktion* gebräuchlicher ist. Benannt wurden diese Funktionen nach George Green (1793–1841), einem autodidaktischen Mathematiker und Physiker. Gelegentlich spricht man statt von Green'scher Funktion auch von *Fundamentallösung* [*fundamental solution*], wobei manche Autoren den Begriff Green'sche Funktion speziell dann verwenden, wenn neben der Gleichung 11.4 noch spezielle Randbedingungen erfüllt werden sollen.

11.2 Lineare Abbildungen auf dem Funktionenraum

Im letzten Kapitel haben wir Distributionen als stetige lineare Abbildungen von einem Funktionenraum (z.B. über dem \mathbb{R}^n) in die reellen Zahlen kennengelernt. Es handelte sich also um Elemente des Dualraums zu diesem Funktionenraum. Nun betrachten wir (stetige) lineare Abbildungen auf Testfunktionenräumen, deren Bild (im Allgemeinen) wieder eine Testfunktion sein soll. Ich werde nicht immer angeben, welche Testfunktionen genau gemeint sind. Die Schwarz-Funktionen (also der Raum \mathscr{S}) reichen in der Physik meist aus.

Zunächst wieder ein paar Beispiele:

- Die Identitätsabbildung:

$$f \mapsto f \qquad f(\boldsymbol{x}) \mapsto f(\boldsymbol{x}) .$$
 (11.8)

- Multiplikation mit einer (im Unendlichen nicht stärker als eine Potenz ansteigenden) Funktion g:

$$f \mapsto gf \qquad f(\boldsymbol{x}) \mapsto [gf](\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}).$$
 (11.9)

- Die Faltung mit einer (Test)-Funktion g:

$$f \mapsto \tilde{f} = g * f$$
 $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n y$. (11.10)

- Die Integration über einen Integralkern $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$:

$$f \mapsto Lf \quad Lf(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d^n y.$$
 (11.11)

- Die Anwendung eines Ableitungsoperators:

$$f \mapsto \partial_i \partial_j f \qquad \partial_i \partial_j f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$
 (11.12)

In allen Fällen ist die Linearität der Abbildungen wiederum leicht nachgewiesen. Das Ergebnis - das Bild - der Abbildung ist diesmal jedoch eine Funktion (sofern sich g und L nicht zu "pathologisch" verhalten im Allgemeinen sogar wieder eine Testfunktion).

Zunächst erkennen wir, dass Gleichung (11.10) ein Spezialfall von (11.11) ist. Wiederum erinnert (11.11) an eine Verallgemeinerung der Indexschreibweise bei linearen Abbildungen in endlichdimensionalen Vektorräumen:

$$(L\boldsymbol{v})_i = \sum_j L_{ij} v_j \quad \iff \quad Lf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n y \,.$$
(11.13)

Tatsächlich können wir uns leicht davon überzeugen, dass sich sämtliche Beispiele in obiger Liste formal in dieser Form darstellen lassen, vorausgesetzt dass auch Distributionen, jetzt allerdings als Funktion eines weiteren Arguments, zugelassen sind. So gilt beispielsweise

$$f(\boldsymbol{x}) = \int \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n y \,. \tag{11.14}$$

Die Identitätsabbildung (11.8) wird also durch die δ -Funktion repräsentiert. Man vergleiche auch hier mit der Indexschreibweise in der linearen Algebra:

$$\delta_{ij} \longrightarrow \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$
 (11.15)

(Diese Analogie war für Dirac die Motivation für die Bezeichnung δ .) Die Multiplikation mit einer beliebigen Funktion $g(\boldsymbol{x})$ läßt sich ebenfalls in dieser Form schreiben:

$$(gf)(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) = \int g(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d^n y.$$
(11.16)

In diesem Fall hat der Integrationskern die Form $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$. In einem gewissen Sinn ist dies die funktionale Form einer Diagonalmatrix:

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \,. \tag{11.17}$$

Auch den Ableitungsoperator können wir in dieser Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \int \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right) f(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n y = \int \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \,\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} f(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n y \,. \tag{11.18}$$

Man beachte hierbei, dass bei einer ungeraden Anzahl von Ableitungen genau anzugeben ist, auf welches Argument der δ -Funktion die Ableitung wirkt.

Im Allgemeinen ist es nicht notwendig und auch nicht üblich, die speziellen linearen Abbildungen, die sich als Multiplikation mit einer Funktion (11.9) oder als Ableitungen (11.12) schreiben lassen, in die umständliche Integraldarstellung (11.11) zu bringen. Die bisherigen Überlegungen sollten nur zeigen, dass es prinzipiell möglich ist, auch solche lineare Abbildungen unter Zuhilfenahme von Distributionen als Integral über einen verallgemeinerten Integralkern zu schreiben. Außerdem wird dadurch die Definition der inversen Abbildung einsichtiger.

11.3 Green'sche Funktionen

Wir können nun den Formalismus der linearen Abbildungen anwenden und die inversen Abbildungen definieren. Gegeben sei ein verallgemeinerter Integralkern $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (das kann auch ein Differentialoperator sein):

$$f \to g = Lf$$
 mit $g(\boldsymbol{x}) = \int L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d^n y$. (11.19)

Gesucht ist die Abbildung L^{-1} , so dass für g = Lf gilt:

$$f = L^{-1}g$$
 mit $f(\boldsymbol{z}) = \int L^{-1}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y}) d^n y$. (11.20)

Wenden wir auf diesen Ausdruck die Abbildung L an, so folgt:

$$Lf(\boldsymbol{x}) = \int L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) f(\boldsymbol{z}) \, \mathrm{d}^{n} \boldsymbol{z} = \int L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \int L^{-1}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}^{n} \boldsymbol{z} \, \mathrm{d}^{n} \boldsymbol{y} \stackrel{!}{=} g(\boldsymbol{x}) \,.$$
(11.21)

Andererseits ist

$$g(\boldsymbol{x}) = \int \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n y \,. \tag{11.22}$$

Also muss gelten:

$$\int L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) L^{-1}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n \boldsymbol{z} = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \,. \tag{11.23}$$

Dies ist die Definitionsgleichung für die inverse Abbildung und gibt somit Gleichung (11.4) einen Sinn. Formal ist also $L \cdot L^{-1}$ - d.h. die Hintereinanderschaltung der Abbildung L^{-1} und L - die Identitätsabbildung. Man vergleiche (11.23) wiederum mit dem entsprechenden Ausdruck bei Matrizen:

$$\sum_{k} L_{ik} (L^{-1})_{kj} = \delta_{ij} .$$
(11.24)

Selbstverständlich hat $L^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ im Allgemeinen nichts mit der Funktion $1/L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ zu tun, ebensowenig wie $(L^{-1})_{ij}$ nicht durch das Inverse der Matrixelemente $1/L_{ij}$ gegeben ist. Diese Eigenschaft gilt nur bei Diagonalmatrizen bzw. im vorliegenden Fall für die einfache Multiplikation mit einer Funktion $g(\boldsymbol{x})$ (vgl. Gleichung (11.9)).

Bei sogenannten Differential- oder Ableitungsoperatoren vereinfacht sich Gleichung (11.23) noch. Sei \mathcal{L}_x ein allgemeiner Differentialoperator (hier ist α ein Multiindex; siehe Abschnitt 10.1.3):

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}} \cdots \partial x_{n}^{\alpha_{n}}}, \qquad (11.25)$$

dann ist formal der Integrationskern dazu durch

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$
(11.26)

gegeben und Gl. (11.23) wird zu:

$$\int L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) G(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}^n \boldsymbol{z} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \,.$$
(11.27)

Entsprechend der üblichen Notation habe ich den inversen Operator zu einem Differentialoperator — die sogenannte *Green'sche Funktion* — mit $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ bezeichnet. Die Green'sche Funktion zu einem Differentialoperator $\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}$ erfüllt somit die Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}} \cdots \partial x_{n}^{\alpha_{n}}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad .$$
(11.28)

Für eine allgemeine Differentialgleichung der Form

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}} \cdots \partial x_{n}^{\alpha_{n}}} f(\boldsymbol{x}) = K(\boldsymbol{x})$$
(11.29)

lautet die Lösung, ausgedrückt durch die Green'sche Funktion zum Operator $\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}$:

$$f(\boldsymbol{x}) = \int G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n y \,. \tag{11.30}$$

In diesem Sinne kann man Green'sche Funktionen als das "Inverse" eines Differentialoperators auffassen.

210

11.3.1 Vergleich: Endlich dimensionale Vektorräume und Funktionenräume

Bevor wir Beispiele für Green'sche Funktionen behandeln und dadurch die obigen Überlegungen konkretisieren, werden hier nochmals in tabellarischer Form die Verhältnisse in endlich dimensionalen Vektorräumen mit den Beziehungen in Funktionenräumen verglichen.

	lineare Algebra	Funktionalanalysis
Vektoren	$oldsymbol{v}\in V$	f
Komponenten von Vektoren	$v_i \in \mathbb{R}$	$f(oldsymbol{x})\in\mathbb{R}$
Dualer Vektorraum	$V^* = \{ \boldsymbol{\omega} : V \to \mathbb{R} \}$	$\{g:\{f\}\to\mathbb{R}\}$
Komponentenschreibweise	$\langle oldsymbol{\omega},oldsymbol{v} angle = \sum_i \omega_i v_i$	$\langle g, f \rangle = \int g(\pmb{x}) f(\pmb{x}) \mathrm{d}^n x$
Speziell i -te Komponente	$oldsymbol{v} ightarrow v_i = \sum_j \delta_{ij} v_j$	$f o f(\boldsymbol{x}_0) = \int \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}^n x$
Lineare Abbildungen	$L \boldsymbol{v} \simeq \sum_j L_{ij} v_j$	$\mathcal{L}f \simeq \int L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n y$
Differentialoperatoren		$\mathcal{L}_x f(oldsymbol{x}) = \sum_n a_lpha rac{\partial^{ lpha }}{\partial oldsymbol{x}^lpha} f(oldsymbol{x})$
Identität	$v_i = \sum_j \delta_{ij} v_j$	$f(\boldsymbol{x}) = \int \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n y$
Inverse Abbildung	$\sum_{k} L_{ik} L_{kj}^{-1} = \delta_{ij}$	$\int \mathrm{d}^n z L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) L^{-1}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$
Green'sche Funktion		$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$
Lösung von $\mathcal{L}f = K$	$f_i = \sum_j (L^{-1})_{ij} K_j$	$f(\boldsymbol{x}) = \int G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n y$

Im Folgenden werden einige in der Physik häufig auftretende Beispiele untersucht. Dabei werden die Lösungen aus physikalischen Überlegungen "geraten". Kapitel 13 geht auf Verfahren ein, Green'sche Funktionen zumindest in einigen konkreten Fällen explizit zu berechnen.

11.4 Beispiel: Der gedämpfte Oszillator

Betrachten wir nun Gl. 11.1. Die Green'sche Funktion zu dem Differentialoperator des gedämpften Oszillators muss die Gleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) G(t, t') = \delta(t - t') \tag{11.31}$$

erfüllen. Ist diese Funktion gefunden, lautet die Lösung unserer Gleichung nach den Überlegungen des letzten Abschnitts:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') K(t') \,\mathrm{d}t' \,. \tag{11.32}$$

Bei der Lösung von Gl. 11.31 hilft uns die physikalische Intuition: Da die rechte Seite der Gleichung nur von t - t' abhängt, gilt dies auch für die linke Seite (der Differentialoperator hat keine explizite Zeitabhängigkeit - er ist ,zeittranslationsinvariant⁴), also ist die gesuchte Funktion von der Form G(t - t'). Außerdem soll G(t - t') für t < t' und t > t' (also abgeschen von t = t') eine Lösung der freien Differenzialgleichung sein. Aus der Mechanik ist bekannt (siehe auch Abschnitt 5.3.2), dass dies die folgenden Funktionen f(t) sind, wobei wir hier nur den Schwingungsfall betrachten, die anderen Fälle lassen sich ähnlich lösen:

$$f(t) = (a\cos\omega t + b\sin\omega t)\exp(-\gamma t), \quad \text{mit} \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$
(11.33)

Die rechte Seite von Gl. 11.31 beschreibt eine "Kraft", die die Geschwindigkeit des Systems um den Wert $\Delta v = 1$ ändert. (Wie schon erwähnt wurde im Vergleich zur gewöhnlichen Newton'schen Gleichung hier schon durch die Masse *m* dividiert, sodass K(t) keine Impulsänderung sondern eine Geschwindigkeitsänderung bewirkt.) Dies entspricht auch den Überlegungen aus Abschnitt 10.2, insbesondere Gl. 10.32 und 10.33: Die erste Ableitung der Heaviside-Funktion (also einer Funktion mit dem Sprung $\Delta x = 1$) bzw. die zweite Ableitung einer Funktion, die zwar stetig ist, aber deren Steigung sich um 1 ändert, ist gleich der δ -Funktion.

Also könnte eine mögliche Lösung so aussehen: Der Oszillator ruht für t < t' (d.h., G(t-t') = 0für t < t') und für t > t' handelt es sich um eine Funktion der Form 11.33, wobei diese Funktion bei t = t' mit der Steigung 1 aus der Ruhelage beginnt. Die Anfangsbedingungen für den Bereich $t \ge t'$ sind also f(t = t') = 0 und f'(t = t') = 1. Das ist für a = 0 und $b = 1/\omega$ der Fall. Die Lösung lautet also:

$$G_{\rm ret}(t-t') = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t' \\ \frac{1}{\omega} \sin \omega (t-t') \exp(-\gamma (t-t')) & \text{für } t \ge t' \end{cases}$$
(11.34)

Dies kann man mit der Heaviside-Funktion auch in folgender Form schreiben:

$$G_{\rm ret}(t-t') = \frac{1}{\omega} \sin \omega (t-t') \exp(-\gamma (t-t')) \Theta(t-t').$$
 (11.35)

Diese Lösung ist bei t = t' stetig. Auf die Eindeutigkeit dieser Lösung geht Abschnitt 11.6.1 ein.

11.5 Beispiel: Der Laplace-Operator

Sehr oft tritt in der Physik die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -\rho(\boldsymbol{x}) \tag{11.36}$$

auf, wobei Δ den Laplace-Operator (siehe Gl. 4.32) bezeichnet (im Folgenden zunächst im gesamten \mathbb{R}^3 , Randbedingungen bzw. Lösungen auf endlichen Gebieten werden in Abschnitt 11.6 betrachtet). Ein Beispiel ist die Elektrostatik: Sei $\rho(\mathbf{x})$ eine gegebene Ladungsverteilung, dann lautet die Maxwellgleichung für das elektrische Feld div $\vec{E}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ (der Einfacheit halber setze ich die Permittivität bzw. dielektrische Feldkonstante des Vakuums gleich 1). Da auch rot $\vec{E}(\mathbf{x}) = 0$ gelten soll, macht man den Ansatz $\vec{E}(\mathbf{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\mathbf{x})$ (in einem einfach wegzusammenhängenden Gebiet geht das immer, siehe Abschnitt 7.3.4) und erhält für das skalare Potenzial $\phi(\mathbf{x})$ die obige Gleichung.

Die Green'sche Funktion zum Laplace-Operator erfüllt die Gleichung

$$\Delta_x G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \,. \tag{11.37}$$

Der Index x am Laplace-Operator soll andeuten, dass der Laplace-Operator auf das Argument x in der Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ wirkt. Das Argument \mathbf{x}' ist nur ein Parameter - der Ort der ,äußeren Quelle'. Die Lösung dieser Gleichung ist aber bekannt: Es handelt sich um das elektrische Potenzial einer Punktladung (mit Ladung 1) am Ort \mathbf{x}' , und dieses Potenzial hat die Form:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$
 (11.38)

Zum Beweis zeigt man zunächst durch explizites Nachrechnen, dass

$$\Delta_x G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \qquad \text{für } \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \neq 0.$$
(11.39)

In diesem Bereich (für $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \neq 0$) ist die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ wohldefiniert und zweimal stetig ableitbar. In einem zweiten Schritt zeigt man, dass das Integral über eine Kugel, die den Punkt \mathbf{x}' enthält, den Wert 1 hat. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\mathbf{x}' = 0$ wählen und betrachten eine Kugel vom Radius R um den Ursprung. Wegen des Gauß'schen Satzes (siehe Kap. 7.4.3) und ' $\Delta = \text{div} \cdot \text{grad}'$ gilt:

$$\int_{r \le R} \Delta G(\boldsymbol{x}, 0) \, \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} = \int_{r=R} \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x}, 0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f}$$
(11.40)

und mit

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{4\pi |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$$
(11.41)

und

$$\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \tag{11.42}$$

folgt:

$$\int_{r \le R} \Delta G(\boldsymbol{x}, 0) \,\mathrm{d}^3 x = \int_{r=R} \frac{1}{4\pi R^2} R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi = 1.$$
(11.43)

Man beachte, dass das Ergebnis nicht vom Radius R der Kugel abhängt. Damit gilt das Ergebnis für jedes beliebige Volumen, das den Nullpunkt enthält, denn jedes solche Volumen lässt sich aufspalten in ein Integral über eine Kugel mit ausreichend kleinem Radius um den Nullpunkt und ein Integral über das Volumen ohne diese Kugel, und da ΔG außerhalb des Nullpunkts verschwindet, trägt dieses zweite Integral nichts bei. Damit kann man allgemein beweisen, dass für jede Testfunktion $f(\mathbf{x})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}^3 x = f(\boldsymbol{x}) \,. \tag{11.44}$$

Die Lösung zu Gl. 11.36 lautet somit

$$\phi(\boldsymbol{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rho(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^3 x = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \rho(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^3 x \,. \tag{11.45}$$

11.5.1 Die Green'sche Funktion zu Δ für beliebige Dimensionen

Der obige Beweis und die Tatsache, dass der Gauß'sche Satz in beliebigen Dimensionen gilt, deuten darauf hin, wie man die Green'sche Funktion zum Laplace-Operator in d Dimensionen finden kann. Allgemein gilt:

$$\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{d-2}} = -(d-2)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^d} \quad \text{und} \quad \Delta \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{d-2}} = 0 \quad \text{für } \boldsymbol{x} \neq 0.$$
(11.46)

Speziell für d = 2:

$$\nabla \ln |\boldsymbol{x}| = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$$
 und $\Delta \ln |\boldsymbol{x}| = 0$ für $\boldsymbol{x} \neq 0$. (11.47)

Da $\frac{x}{|x|}$ in beliebigen Dimensionen der Normalenvektor auf dem Flächenelement einer Kugeloberfläche ist, folgt

$$\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = R^{d-1} \mathrm{d}\Omega, \qquad (11.48)$$

wobei $d\Omega$ das Hyperflächenelement einer Kugel in *d* Dimensionen ist. Das Integral über die Kugeloberfläche liefert die Oberfläche der *d*-dimensionalen Einheitskugel (siehe Anhang ??):

$$\Omega(d) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \,. \tag{11.49}$$

Damit erhalten wir für die Green'sche Funktion zum Laplace-Operator in d Dimensionen:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{1}{\Omega(d)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d-2}}$$
(11.50)

und speziell für d = 2:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|.$$
 (11.51)

Für d = 1 folgt:

$$G(x - x') = \frac{1}{2}|x - x'|.$$
(11.52)

Betrachtet man allerdings in Gl. 11.35 den Fall $\gamma = 0$ und bildet den Grenzfall $\omega \to 0$, so erhält man $G(x - x') = (x - x')\Theta(x - x')$. Beides sind Green'sche Funktionen zur zweiten Ableitung, allerdings zu verschiedenen Randbedingungen. Während man in d > 2 Dimensionen erreichen kann, dass die Green'schen Funktionen für $x \to \pm \infty$ verschwinden, ist das in einer Dimension nicht möglich. Hier kann man diese Randbedingung nur für einen Grenzfall fordern. Man kann allerdings erreichen, dass G(x - x') für x = x' verschwindet.

In d = 2 Dimensionen verschwindet die Green'sche Funktion weder bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ noch im Unendlichen sondern für $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = 1$. Man erhält also in zwei Dimensionen eine "Skala", d.h. einen ausgezeichneten Abstand, obwohl der Laplace-Operator zunächst keine solche Skala festlegt (da in der Physik \mathbf{x} die Dimension einer Länge hat, muss im Logarithmus zusätzlich eine Längenskala auftreten). In diesem Zusammenhang spricht man auch schon mal von einer *spontanen Masseerzeugung* (in dimensionslosen Einheiten entspricht eine Masse einer inversen Länge) oder auch von einer *spontanen Brechung der Skaleninvarianz*. Allgemein spricht man von einer *spontanen Symmetriebrechung*, wenn die Lösung einer Gleichung eine geringere Symmetrie als die Gleichung selbst hat.

11.5.2 Der Helmholtz-Operator

Der Helmholtz-Operator lautet $\Delta + k^2$, wobei Δ wieder der Laplace-Operator und k^2 eine beliebige (positive) Konstante sind. Die Green'sche Funktion, also die Lösung zu

$$(\Delta_x + k^2)G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \qquad (11.53)$$

lautet:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.$$
 (11.54)

Der Beweis ist ähnlich wie beim Laplace-Operator. Man zeigt zunächst, dass für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ gilt $(\Delta_x + k^2)G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0$ und nutzt dann den Gauß'schen Satz um zu zeigen, dass das Integral über eine Kugel vom Radius R im Grenzfall $R \to 0$ gegen 1 geht.

11.5.3 Die Diffusionsgleichung

Die Diffusionsgleichung lautet (in d Dimensionen):

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,\boldsymbol{x}) = \lambda \Delta \phi(t,\boldsymbol{x}) \,. \tag{11.55}$$

In Kapitel 13.2.1 werden wir mit Hilfe der Fourier-Transformation eine Lösung dieser Gleichung bestimmen:

$$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\lambda t}\boldsymbol{x}^2\right).$$
(11.56)

Diese Lösung erfüllt die Anfangsbedingung:

$$\phi(0, \boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}) \,. \tag{11.57}$$

Für negative Werte von t, also t < 0, ist diese Lösung nicht sinnvoll (und auch die Herleitung über die Fourier-Transformation ist nur für $t \ge 0$ möglich).

Suchen wir die Green'sche Funktion zur Diffusionsgleichung, also eine Lösung zu

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\boldsymbol{x}) - \lambda \Delta G(t,\boldsymbol{x}) = \delta(t)\delta(\boldsymbol{x}), \qquad (11.58)$$

so können wir

$$G(t, \boldsymbol{x}) = \Theta(t)\phi(t, \boldsymbol{x}) \tag{11.59}$$

ansetzen. Diese Funktion erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\Theta(t)\right)\phi(t,\boldsymbol{x}) + \Theta(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,\boldsymbol{x})\right) = \delta(t)\phi(t,\boldsymbol{x}) + \lambda\Delta\Theta(t)\phi(t,\boldsymbol{x})$$
(11.60)

und somit

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\boldsymbol{x}) - \lambda\Delta G(t,\boldsymbol{x}) = \delta(t)\phi(t,\boldsymbol{x}) = \delta(t)\delta(\boldsymbol{x}).$$
(11.61)

Der letzte Schritt gilt, weil für $t \neq 0$ die rechte Seite ohnehin verschwindet (wegen $\delta(t)$) und für t = 0 gilt Gl. 11.57. Die Fundamentallösung (Green'sche Funktion) zur Diffusionsgleichung lautet somit:

$$G(t - t_0, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \Theta(t - t_0) \frac{1}{(4\pi\lambda(t - t_0))^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^2}{4\lambda(t - t_0)}\right) .$$
(11.62)

11.6 Randbedingungen für Green'sche Funktionen

In diesem Abschnitt geht es um allgemeine Überlegungen, unter welchen Bedingungen die inverse Abbildung L^{-1} zu einer gegebenen linearen Abbildung L überhaupt existiert bzw. welche Freiheiten man hat, diese Abbildung zu definieren. In der linearen Algebra endlich-dimensionaler Vektorräume gibt es ein einfaches Kriterium, wann zu einer Matrix L_{ij} die inverse Matrix L^{-1} existiert: Notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass die Determinante von Null verschieden ist. Diese Aussage ist äquivalent zu der Aussage, dass das Gleichungssystem

$$L \boldsymbol{v} = 0$$
 bzw. $\sum_{j} L_{ij} v_j = 0$ (11.63)

keine Lösungen außer $\boldsymbol{v} = 0$ besitzt. Gibt es solche Lösungen, ist der Rang der Matrix L nicht maximal, d.h., es gibt lineare Unterräume des Vektorraums, die auf die 0 abgebildet werden. Die Abbildung L ist also nicht injektiv, und da es sich um eine lineare Abbildung auf einem endlich dimensionalen Vektorraum handelt auch nicht surjektiv. Es gibt daher keine Umkehrabbildung der Form $L^{-1}: V \to V$.

Trotzdem können wir auch in diesem Fall Gleichungen der Form

$$L \boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}$$
 bzw. $\sum_{j} L_{ij} v_j = k_i$ (11.64)

unter bestimmten Bedingungen lösen. Voraussetzung ist, dass der Vektor k im Bild der Abbildung L liegt. Ist dies der Fall, gibt es nicht nur eine Lösung, sondern jeder Vektor der Form

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0 \tag{11.65}$$

 mit

$$L\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \quad \text{und} \quad L\boldsymbol{v}_0 = 0 \tag{11.66}$$

ist ebenfalls eine Lösung. Zu jeder speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung können wir also eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung addieren. Dies hatten wir schon in Abschnitt 5.3 gesehen.

Überlegen wir uns nun, wie sich die vorherigen Resultate auf Green'sche Funktionen übertragen. Wenn wir eine inhomogene Differentialgleichung der Form

$$\mathcal{L}_x f(x) = K(x) \tag{11.67}$$

lösen wollen, und

$$\mathcal{L}_x f(x) = 0 \tag{11.68}$$

Lösungen besitzt, so werden zwei Dinge zu beachten sein:

- Möglicherweise ist nicht jede Funktion K(x) im Bildraum der Abbildung \mathcal{L}_x . Zu manchen äußeren "Einflüssen" gibt es daher keine (regulären) Lösungen.
- Zu jeder speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir weitere Lösungen, indem wir Lösungen der homogenen Gleichungen addieren. Sei f_k Lösung der inhomogenen Gleichung,

$$\mathcal{L}_x f_{\mathbf{k}}(x) = K(x), \qquad (11.69)$$

und seien $\{f_i(x)\}$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichungen,

$$\mathcal{L}_x f_i(x) = 0, \qquad (11.70)$$

so ist die allgemeinste Lösung der inhomogenen Gleichung von der Form:

$$f(x) = f_{\mathbf{k}}(x) + \sum_{i} \alpha_{i} f_{i}(x).$$
 (11.71)

Durch die Wahl geeigneter Rand- oder Anfangsbedingungen werden die Koeffizienten α_i fest-gelegt.

Insbesondere gelten diese Überlegungen auch für Green'sche Funktionen.

11.6.1 Randbedingungen beim gedämpften Oszillator

In Abschnitt 11.4 hatten wir folgende Lösung für die Green'sche Funktion des gedämpften Oszillators gefunden:

$$G_{\rm ret}(t - t') = \frac{1}{\omega} \sin \omega (t - t') \exp(-\gamma (t - t')) \Theta(t - t').$$
 (11.72)

Doch weshalb diese Lösung? Weshalb nicht eine Lösung, die für t < t' eine Schwingung beschreibt und bei t = t' zu schwingen aufhört, also beispielsweise

$$G_{\rm av}(t-t') = -\frac{1}{\omega} \sin \omega (t-t') \exp(-\gamma (t-t')) \Theta(t'-t) ?$$
(11.73)

Man bezeichnet die erste Lösung gelegentlich als *retardierte* Lösung und die zweite als *avancierte* Lösung. Man kann auch eine Linearkombination der beiden Green'schen Funktionen wählen:

$$G_{\alpha}(t-t') = \alpha G_{\rm ret}(t-t') + (1-\alpha)G_{\rm av}(t-t').$$
(11.74)

Das ist noch nicht die allgemeinste Lösung, da in diesem Fall noch G(t = t') = 0 gilt. Man kann immer noch eine Lösung der homogenen Gleichung (Gl. 11.33) addieren, die bei t = t' nicht verschwindet.
11.6. RANDBEDINGUNGEN FÜR GREEN'SCHE FUNKTIONEN

Wie wir gesehen haben, hängt die Frage nach der Eindeutigkeit einer Lösung für die Green'sche Funktion davon ab, ob es Lösungen zur homogenen Gleichung gibt. Ohne Einschränkungen an die Lösungsfunktionen hat der gedämpfte Oszillator solche Nullmoden, nämlich die Funktionen in Gl. 11.33, die wir immer zu einer Lösung für die Green'sche Funktion addieren können. In der Tat erhalten wir die retardierte Lösung aus der avancierten Lösung, indem wir einfach eine bestimmte Lösung der homogenen Gleichung addieren:

$$G_{\rm ret}(t-t') = G_{\rm av}(t-t') + g(t) \qquad \text{mit} \quad g(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega'(t-t') \exp(-\gamma(t-t')) \,. \tag{11.75}$$

Die Lösungen sind also nicht eindeutig. Durch Addition von allgemeinen homogenen Lösungen (Gl. 11.33) beispielsweise zur retardierten Lösung erhalten wir eine unendliche Schar von Lösungen (diese bilden einen 2-dimensionalen affinen Raum).

Im Fall des gedämpften Oszillators ($\gamma > 0$) gibt es mathematische Gründe, die retardierte Green'sche Funktion zu wählen: Sie verschwindet für $t \to \pm \infty$ und ist auf \mathscr{S} wohl definiert. Alle anderen Lösungen von Gl. 11.31 haben die Eigenschaft, dass sie für $t \to -\infty$ exponentiell ansteigen und daher auch auf \mathscr{S} nicht mehr wohl definiert sind (allerdings immer noch auf \mathscr{D}).

Mit anderen Worten: Wenn wir als Raum der Lösungen für die homogene Differentialgleichung den Dualraum (den Raum der Distributionen) zu \mathscr{S} zulassen, gibt es keine Lösungen zur homogenen Differentialgleichung und damit ist auch die Green'sche Funktion eindeutig (es ist die retardierte Green'sche Funktion). Lassen wir aber als Raum der Lösungen für die homogene Differentialgleichung den Dualraum zu \mathscr{D} zu, gibt es einen zweidimensionalen Vektorraum von Lösungen und die Green'schen Funktionen bilden einen zweidimensionalen affinen Raum.

Ähnliches finden wir auch in anderen Systemen. Eine Gleichung wie

$$x^2 = -1 \tag{11.76}$$

hat keine Lösungen in \mathbb{R} , sie hat aber zwei Lösungen in \mathbb{C}^2 . Es hängt also immer davon ab, in welchem Raum man nach Lösungen sucht.

11.6.2 Randbedingungen beim harmonischen (ungedämpften) Oszillator

Für den ungedämpften, harmonischen Oszillator ($\gamma = 0$) ist die Antwort nicht so eindeutig, da einerseits zwar alle Lösungen für $t \to \pm \infty$ beschränkt sind, andererseits aber keine Lösung die Eigenschaft hat, für beide Grenzwerte zu verschwinden. Hier muss die Antwort, welche Lösung physikalisch sinnvoll ist, aus der Physik kommen. Wenn K(t) in Gl. 11.1 einen kompakten Träger hat, also irgendwann einmal eingesetzt hat und irgendwann auch wieder aufhört, erwarten wir aus physikalischen Gründen, dass die Lösung vor dem Einsetzen der äußeren Kraft null ist und nach dem Abklingen dieser Kraft eine konstante Schwingung darstellt. Dann ist die retardierte Green'sche Funktion wieder die sinnvolle Lösung. Man beachte, dass hier "von Hand" durch die Wahl der Green'schen Funktion eine Zeitrichtung ausgezeichnet wird. Die Differentialgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators ist zeitumkehrinvariant, doch durch die Wahl der retardierten Green'schen Funktion wird die Lösung zu einer vorgegebenen äußeren Kraft nicht mehr zeitumkehrinvariant: Sie beschreibt einen ruhenden Oszillator in der fernen Vergangenheit und einen frei schwingenden Oszillator in der fernen Zukunft.

Im Allgemeinen entscheidet die physikalische Situation, welche Green'sche Funktion im Einzelfall zu nehmen ist. In vielen Fällen ist auch eine Linearkombination aus retardierter und avancierter Green'scher Funktion angebracht:

$$G_{\alpha}(t-t') = \alpha G_{\rm ret}(t-t') + (1-\alpha)G_{\rm av}(t-t') \quad (0 \le \alpha \le 1).$$
(11.77)

Den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ bezeichnet man als kausale Green'sche Funktion. In diesem Fall ist auch die Green'sche Funktion zeitumkehrinvariant. Der avancierte Teil beschreibt Schwingungen, die bei t = t' "absorbiert" werden, der retardierte Teil beschreibt Schwingungen, die bei t = t' angeregt werden.

11.6.3 Randbedingungen für die Green'sche Funktion zum Laplace-Operator

Bisher haben wir für den Laplace-Operator nur eine Green'sche Funktion gefunden, Gl. 11.38 in Abschnitt 11.5 (ich beschränke mich auf drei Raumdimensionen, obwohl viele Überlegungen auch allgemeiner gelten). Diese Funktion verschwindet für $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \to \infty$.

Gerade in der Potenzialtheore der Elektrodynamik spielen Lösungen der homogenen Gleichung (die *Laplace-Gleichung*) und der inhomogenen Gleichung (der *Poisson-Gleichung*) eine wichtige Rolle und die Konstruktion solcher Lösungen unter vorgegebenen Randbedingungen wird dort ausführlich behandelt. Dementsprechend findet man zu diesem Thema auch viel in den Büchern zur Theoretischen Elektrodynamik (z.B. [Jackson 2006], aus dem viele der folgenden Überlegungen entnommen sind). Im Folgenden gehe ich daher im Wesentlichen auf Dirichlet'sche und von Neumann'sche Randbedingungen und die Eindeutigkeit der Lösungen ein. In diesem Zusammenhang spielen die erste und zweite Green'sche Identität eine wichtige Rolle.

Die erste und zweite Green'sche Identität

Der erste und zweite Green'sche Satz sind unmittelbare Folgerungen aus der allgemeineren Gauß'schen Identität (siehe Abschnitt 7.4.3):

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^{3} \boldsymbol{x} = \int_{\partial \mathcal{V}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d} \boldsymbol{f} \,, \qquad (11.78)$$

Wählen wir speziell $F(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x})$, also das Produkt aus einem Skalarfeld und einem Gradientenfeld, so folgt für die linke Seite:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\phi(\boldsymbol{x}) \nabla \psi(\boldsymbol{x})) \, \mathrm{d}^{3} \boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \phi(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \psi(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^{3} \boldsymbol{x} + \int_{\mathcal{V}} \phi(\boldsymbol{x}) \, \Delta \psi(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^{3} \boldsymbol{x}$$
(11.79)

und für die rechte Seite:

$$\int_{\partial \mathcal{V}} \phi(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{\nabla} \psi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}f = \int_{\partial \mathcal{V}} \phi(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial n} \, \mathrm{d}f \,.$$
(11.80)

In der letzten Formel wurde die Richtungsableitung in Richtung der Flächennormalen durch eine partielle Ableitung in n-Richtung ersetzt:

$$\nabla \psi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial n}.$$
 (11.81)

Damit lautet die erste Green'sche Identität (bzw. der erste Green'sche Satz):

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \phi(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \psi(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^{3} x + \int_{\mathcal{V}} \phi(\boldsymbol{x}) \, \Delta \psi(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^{3} x = \int_{\partial \mathcal{V}} \phi(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial n} \, \mathrm{d} f \,.$$
(11.82)

Wir vertauschen nun in dieser Gleichung die Rollen von ϕ und ψ und subtrahieren die Ergebnisse (bzw., wir setzen $F(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})\nabla\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x})$) und erhalten die zweite Green'sche Identität:

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\phi(\boldsymbol{x}) \,\Delta\psi(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{x}) \,\Delta\phi(\boldsymbol{x}) \right) \mathrm{d}^{3}x = \int_{\partial\mathcal{V}} \left(\phi(\boldsymbol{x}) \frac{\partial\psi(\boldsymbol{x})}{\partial n} - \psi(\boldsymbol{x}) \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial n} \right) \,\mathrm{d}f \,. \tag{11.83}$$

Eindeutigkeit von Lösungen

Wir betrachten nun zwei Lösungen $\phi_1(\mathbf{x})$ und $\phi_2(\mathbf{x})$ der Poisson-Gleichung zur selben Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$. Insbesondere ist die Differenz der beiden Lösungen, $U(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) - \phi_2(\mathbf{x})$, eine Lösung der homogenen Gleichung (also der Laplace-Gleichung): $\Delta U(\mathbf{x}) = 0$. Ersetzen wir in der ersten Green'schen Identität (Gl. 11.82) ϕ und ψ durch U, so folgt

$$\int_{\mathcal{V}} |\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}^3 x = \int_{\partial \mathcal{V}} U(\boldsymbol{x}) \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial n} \,\mathrm{d}f \,.$$
(11.84)

Falls also die Lösungen auf dem Rand $\partial \mathcal{V}$ des Gebietes übereinstimmen (Dirichlet'sche Randbedingungen), also $U(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}\in\partial\mathcal{V}}=0$, stimmen sie überall überein, also $\phi_1(\boldsymbol{x})=\phi_2(\boldsymbol{x})$. Falls die Normalenableitungen der Lösungen auf dem Rand übereinstimmen (von Neumann'sche Randbedingungen), also $\frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial n}|_{\boldsymbol{x}\in\partial\mathcal{V}}=0$, können sich die Lösungen nur um eine Konstante unterscheiden, die bei Potenzialen keine Rolle spielt. Man beachte, dass die rechte Seite der obigen Gleichung auch bei gemischten Randbedingungen (also Dirichlet auf einem Teil der Fläche $\partial\mathcal{V}$ und von Neumann auf einem anderen Teil) verschwindet und sich daher die Lösungen nur um eine Konstante unterscheiden können.

Kapitel 12

Hilbert-Räume

Nachdem in den letzten beiden Kapiteln unendlich-dimensionale Vektorräume in Form von Testfunktionenräumen und Distributionenräumen eingeführt wurden, wendet sich dieses Kapitel einer weiteren wichtigen Klasse von Vektorräumen zu, den sogenannten Hilbert-Räumen. Hierbei handelt es sich um Vektorräume, insbesondere unendlich-dimensionale Vektorräume, auf denen ein Skalarprodukt definiert ist. Dieses Skalarprodukt impliziert eine Norm und damit eine Metrik und eine Topologie. Hilbert-Räume sind, ebenso wie Banach-Räume, vollständig bezüglich dieser Topologie. Der mathematische Formalismus der Quantentheorie ist im Wesentlichen der Formalismus der Hilbert-Räume und der linearen Operatoren auf diesen Räumen. Aber auch in anderen Zusammenhängen treten Hilbert-Räume - und hier beziehe ich mich hauptsächlich auf die Hilbert-Räume der quadratintegrablen Funktionen (diese Räume bezeichnet man meist mit \mathcal{L}^2) - immer wieder auf. Insbesondere spielen sie eine wichtige Rolle für bestimmte Klassen von Differentialgleichungen (die in den Kapiteln 14 und 15 behandelt werden) sowie für die Fourier-Transformation (Kapitel 13).

12.1 Grundbegriffe

Hilbert-Räume sind spezielle Banach-Räume und Banach-Räume sind spezielle topologische Vektorräume. Da bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen oftmals sehr feine Unterscheidungen zu beachten sind, soll an dieser Stelle ein kurzer Überblick zu den wichtigsten Begriffen im Zusammenhang mit topologischen Räumen gegeben werden. Dieser Überblick ist nur sehr grob und minimalistisch - die Theorie topologischer Räume ist außerordentlich umfangreich und verlangt eigentlich eine ausführlichere Behandlung der Grundbegriffe.

12.1.1 Topologische Räume

In Kapitel 3.1 wurde der Begriff einer Topologie und eines topologischen Raums schon eingeführt. Daher werden hier nur die wichtigsten Definitionen wiederholt.

Definition: Ein tologischer Raum (M, \mathcal{T}) ist eine Menge M zusammen mit einer Topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(M)$. Eine Topologie \mathcal{T} ist eine Teilmenge der Potenzmenge von M, die abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten ihrer Elemente ist (siehe Kapitel ??). Es wird definiert, dass die leere Menge \emptyset und die Menge M immer Elemente von \mathcal{T} sind. Die Elemente von \mathcal{T} bezeichnet man als offene Mengen.

Definition: Eine Teilmenge $E \subset M$ eines topologischen Raums (M, \mathcal{T}) heißt (<u>abgeschlossen</u> oder geschlossen), wenn sie das Komplement einer offenen Menge ist.

Definition: Ein eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt <u>Subbasis</u> der Topologie \mathcal{T} , wenn sich jedes Element aus \mathcal{T} als beliebige Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus \mathcal{B} darstellen lässt.

Definition: Sei (M, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $x_i \in M$ heißt konvergent mit Grenzwert x, wenn es zu jeder offenen Umgebung von x (also $x \in U_x$) ein N gibt, sodass $x_i \in U_x$ für alle $i \geq N$.

Eine Teilmenge $E \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte aller Folgen (x_i) mit $x_i \in E$ auch wieder in E liegen. Eine abgeschlossene Menge enthält also sämtliche Grenzwerte. Man beachte, dass man an dieser Stelle noch nicht definieren kann, was eine Cauchy-Folge ist. Dazu benötigt man weitere Strukturen (z.B. eine Metrik).

Einerseits bedeutet das Vorhandensein einer Topologie, dass man weiß, was offene Mengen sind. Wichtiger ist aber, dass man von Grenzwerten bzw. der Konvergenz von Folgen sprechen kann. Damit ist auch definiert, ob bzw. wann eine Abbildung von diesem Rraum in andere topologische Räume, z.B. die reellen oder komplexen Zahlen, oder auch von diesem Raum in sich selbst, stetig ist. Da wir Abbildungen auf Vektorräumen betrachten, handelt es sich dabei fast immer um lineare Abbildungen. Während bei endlich dimensionalen Vektorräumen alle linearen Abbildungen auch stetig sind, ist dies bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht der Fall.

Aus den bisherigen Axiomen folgt noch nicht, dass beispielsweise der Grenzwert x einer konvergenten Folge (x_i) eindeutig ist. Um dies zu garantieren benötigt man sogenannte *Trennungsaxiome*. Man unterscheidet bei Topologien verschiedene Trennungsaxiome, von denen ich hier nur drei angebe.

Definition: Eine Topologie ist $\underline{T_0}$ -trennend, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in M$ mindestens eine offene Umgebung gibt, die einen der Punkte enthält, nicht aber den anderen.

Definition: Eine Topologie ist $\underline{T_1}$ -trennend, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in M$ eine offene Umgebung von x gibt, die y nicht enthält, und umgekehrt.

Definition: Eine Topologie ist <u>T₂-trennend</u>, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in M$ eine offene Umgebungen U_x von x und eine offene Umgebung U_y von y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Eine Topologie, die das Trennungsaxiom T_2 erfüllt, bezeichnet man auch als Hausdorff-Topologie (vgl. 3.1). Eine wichtige Eigenschaft der Hausdorff-Topologie ist, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig ist. Im Folgenden betrachten wir nur Hausdorff-Topologien.

12.1.2 Metrische Räume

Ist auf einer Menge M eine Metrik d(x, y) definiert, kann man nach der allgemeinen Vorschrift auch eine Topologie definieren: Die offenen Bälle vom Radius r um einen Punkt x sind definiert durch

$$B_r(x) = \{ y \in V | d(x, y) < r \}.$$
(12.1)

Die Menge aller Teilmengen von V, die sich durch beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte solcher Bälle darstellen lassen, bildet dann die durch die Metrik induzierte Topologie auf V. Die offenen Bälle bilden also eine Subbasis dieser Topologie. Man sagt auch, dass die offenen Bälle diese Topologie generieren.

Definition: Eine Menge, auf der eine Metrik definiert ist, bezeichnet man als <u>metrischen Raum</u>. Auf einem metrischen Raum gibt es immer eine Topologie.

Nicht jede Topologie auf einer Menge stammt von einer Metrik, d.h., es gibt topologische Räume, für die sich keine Metrik definieren lässt, sodass diese Metrik die vorgegebene Topologie nach obiger Vorschrift induziert. Gibt es eine solche Metrik, bezeichnet man den topologischen Raum auch als *metrisierbar*. Beispielsweise ist eine Topologie nicht metrisierbar, wenn sie nicht *trennend* ist. Die von einer Metrik induzierte Topologie ist immer trennend, da wir von einer Metrik verlangen: $x \neq y \Rightarrow$ d(x,y) > 0. Metrisierbare Topologien erfüllen sogar das Hausdorff-Axiom (d.h., sie sind T_2 -trennend). Beweis: Es sei $x \neq y$ und $d(x,y) = \epsilon$. Die Bälle $B_{\epsilon/3}(x)$ und $B_{\epsilon/3}(y)$ sind disjunkt und bilden offene Umgebungen von x und y.

Ist auf einer MengeMeine Metrik gegeben, kann man die Cauchy-Konvergenz einer Folge definieren:

Definition: Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $x_i \in M$ heißt <u>Cauchy-konvergent</u>, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_i, x_j) < \epsilon$ für alle $i, j \geq N$.

Der Begriff der Cauchy-Konvergenz erlaubt es also, von Konvergenz zu sprechen, obwohl der Grenzwert nicht bekannt oder möglicherweise noch nicht einmal Teil dieser Menge ist. Damit können wir auch definieren, wann eine Menge vollständig ist.

Definition: Eine Menge M heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchy-konvergente Folge ihren Grenzwert in M hat.

Man beachte jedoch den Unterschied zwischen "abgeschlossen" und "vollständig": Eine Menge ist abgeschlossen, wenn sie das Komplement einer offenen Menge ist. Dies gilt für eine beliebige Topologie, selbst wenn Cauchy-Konvergenz und damit Vollständigkeit im oben angegebenen Sinne nicht definiert sind. Beispielsweise ist in der Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} mit der üblichen Metrik d(p,q) = |p-q|ein abgeschlossenes Intervall ein Intervall, dessen Randpunkte dazugehören. Die Menge \mathbb{Q} ist jedoch nicht vollständig. Teilmengen von \mathbb{Q} aufgefasst als Teilmenge der reellen Zahlen sind allerdings nie abgeschlossen: Das Komplement von \mathbb{Q} in \mathbb{R} ist keine offene (und keine abgeschlossene) Menge.

Definition: Eine Teilmenge A einer Menge X liegt <u>dicht</u> in X, wenn jede offene Umgebung U_x von einem $x \in X$ Elemente von A enthält, bzw., wenn $U_x \cap A \neq \emptyset$ für alle $x \in X$ und alle offenen Umgebungen U_x von x.

Die Menge \mathbb{Q} liegt beispielsweise dicht in \mathbb{R} . Die Tatsache, dass eine Menge A dicht in einer anderen Menge X liegt, heißt allerdings nicht, dass X vollständig ist. Beispielsweise liegt \mathbb{Q} auch dicht in der Menge der algebraischen Zahlen (also der Zahlen, die sich als Nullstellen von Polynomen endlicher Ordnung mit rationalen Koeffizienten darstellen lassen), trotzdem sind die algebraischen Zahlen nicht vollständig.

12.1.3 Normierte Vektorräume und Vektorräume mit Skalarprodukt

Für Vektorräume kann man auch das Konzept einer Norm definieren (vgl. Kapitel 1.2.3). Ist eine Norm gegeben, erhält man nach der Vorschrift d(x,y) = ||x - y|| auch eine Metrik. Jede Norm definiert also eine Metrik, aber nicht jede Metrik auf einem Vektorraum erlaubt die Definition einer Norm. Eine notwendige Bedingung dafür ist $d(x,y) = d(x+z,y+z) \forall z$ und $d(\alpha x,0) = |\alpha|d(x,0) \forall x$. Ein triviales Gegenbeispiel ist die diskrete Metrik (d(x,y) = 0 für x = y und d(x,y) = 1 für $x \neq y$).

Noch spezieller ist die Struktur eines Skalarprodukts (siehe Kapitel 2.1). Ein Skalarprodukt ermöglicht die Definition einer Norm nach der Vorschrift $||x|| = \sqrt{g(x, x)}$. Eine solche Norm, die von einem Skalarprodukt induziert ist, erfüllt immer die sogenannte Parallelogramm-Identität:

$$||x+y||^{2} + ||x-y||^{2} = 2||x||^{2} + 2||y||^{2}.$$
(12.2)

Umgekehrt kann man aus einer Norm, welche die Parallelogramm-Identität erfüllt, nach folgender Vorschrift ein Skalarprodukt definieren:

$$g(x,y) = \frac{1}{4} \left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i\|y+ix\|^2 - i\|y-ix\|^2 \right).$$
(12.3)

Dies bezeichnet man auch als den Satz von Jordan und von Neumann (siehe Anhang A2.3). (Man beachte, dass in dieser Formel die Konvention so gewählt wurde, dass das Skalarprodukt im zweiten Argument, y, linear und im ersten Argument, x, antilinear ist.)

Insgesamt erhalten wir folgende Implikationen:

Skalarprodukt \implies Norm \implies Metrik \implies Topologie. (12.4)

Für die zugehörigen Vektorräume erhalten wir:

Vektorräume mit Skalarprodukt \subset normierte Vektorräume \subset (12.5)

 \subset metrische Vektorräume \subset topologische Vektorräume.

12.1.4 Kompakte Räume

Der Begriff der kompakten Teilmenge eines metrischen Raumes sollte aus der Analysis bekannt sein:

Definition: Eine Teilmenge E eines metrischen Raums heißt kompakt, wenn jede Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $x_i \in E$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in E enthält.

Diese Definition, die zunächst nur für metrische Räume gilt, lässt sich für allgemeine topologische Räume verallgemeinern:

Definition: Eine Teilmenge E eines topologischen Raumes heißt kompakt, wenn jede Überdeckung von E mit offenen Teilmengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Dies bedeutet Folgendes: Es sei $E \subset M$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes M und $\{A_n\}$ eine beliebige Menge von offenen Teilmengen von M, sodass $E \subset \bigcup_n A_n$ (die Indexmenge muss nicht abzählbar sein). Man sagt in diesem Fall, dass $\{A_n\}$ eine (eventuell unendliche) Überdeckung von E bildet. Dann gibt es für eine kompakte Menge E immer eine endliche Anzahl von offenen Mengen $\{A_i\}(i = 1, ..., N)$ mit $A_i \in \{A_n\}$, sodass $E \subset \bigcup_{i=1}^N A_i$. Umgekehrt ist eine Teilmenge $E \subset M$ eines topologischen Raums M genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung von E mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Für eine kompakte Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ bedeutet dies, dass E abgeschlossen und beschränkt ist (siehe auch Kapitel 3 und 4). Das ist die Aussage des Satzes von Heine und Borel:

Satz von Heine und Borel: Für Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- 1. E ist kompakt.
- 2. E ist abgeschlossen und beschränkt.

(Dies gilt nur bezüglich der Standardtopologie des \mathbb{R}^n ; dieser Satz gilt beispielsweise nicht in Bezug auf die diskrete Topologie.)

Diese Äquivalenz zwischen kompakten Teilmengen und Teilmengen, die abgeschlossen und beschränkt sind, gilt in unendlich-dimensionalen topologischen Vektorräumen nicht mehr. Der Begriff der Existenz einer endlichen Teilüberdeckung zu einer beliebigen Überdeckung ist einschränkender, d.h., es gibt Teilmengen unendlich-dimensionaler topologischer Räume, die zwar beschränkt und abgeschlossen sind, für die eine beliebige Überdeckung mit offenen Mengen aber keine endliche Teilüberdeckung mehr besitzen muss. In unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen V ist beispielsweise die Einheitskugel um den Ursprung, $E_1(0) = \{x \in V | ||x|| \le 1\}$, nicht kompakt (siehe Abschnitt 12.3.2).

12.1.5 Gleichheit von Topologien

Definition: Zwei Topologien heißen gleich, wenn sie dieselben offenen Mengen enthalten.

Insbesondere bedeutet dies, dass zwei Topologien \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 auf einer Menge M gleich sind, wenn alle Funktionen $f: M \to M$, die bezüglich der einen Topologie stetig sind, auch bezüglich der anderen Topologie stetig sind. Gibt es umgekehrt eine Funktion, die bezüglich der einen Topologie stetig ist, nicht aber bezüglich der anderen Topologie, sind die beiden Topologien in jedem Fall verschieden. Insbesondere ist die Identitätsabbildung $(M, \mathcal{T}_1) \to (M, \mathcal{T}_2)$ nicht stetig, wenn \mathcal{T}_1 nicht in \mathcal{T}_2 enthalten ist.

Für metrische Räume kann man ein einfaches Kriterium angeben, wann zwei Topologien gleich sind:

Satz: Zwei Metriken d_1 und d_2 auf einer Menge M induzieren dieselbe Topologie, wenn es für jedes $x \in M$ zwei Zahlen a, b > 0 gibt, sodass für alle $y \in M$ gilt:

$$ad_1(x,y) \le d_2(x,y) \le bd_1(x,y)$$
. (12.6)

a und b dürfen also von x abhängen, nicht aber von y (bzw. sie dürfen von einem Argument abhängen, nicht aber von beiden).

Zwei Metriken, welche dieselbe Topologie definieren, bezeichnet man als *äquivalent*. Man kann sich leicht überlegen, dass es in diesem Fall zu jedem x und jedem $\epsilon > 0$ ein δ_1 bzw. δ_2 gibt, sodass $B_{\delta_1}^1(x) \subset B_{\epsilon}^2(x)$ und $B_{\delta_2}^2(x) \subset B_{\epsilon}^1(x)$, wobei $B_{\epsilon}^i(x)$ der offene Ball vom Radius ϵ um den Punkt x bezüglich der Metrik i ist. Zu jedem offenen Ball bezüglich der einen Metrik gibt es also offene Bälle bezüglich der jeweils anderen Metrik, die in diesem Ball enthalten sind. Eine andere Möglichkeit, äquivalente Topologien zu charakterisieren, betrachtet konvergente Folgen:

Satz: Zwei Metriken sind äquivalent, wenn jede Folge, die bezüglich der einen Metrik eine Cauchy-Folge ist, auch bezüglich der anderen Metrik eine Cauchy-Folge ist.

Diese Kriterien übertragen sich entsprechend auf normierte Vektorräume.

Definition: Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf einem Vektorraum V sind <u>äquivalent</u>, wenn es reelle Zahlen $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ gibt, sodass für alle $\boldsymbol{x} \in V$ gilt

$$c_1 \|\boldsymbol{x}\|_a \le \|\boldsymbol{x}\|_b \le c_2 \|\boldsymbol{x}\|_a \,. \tag{12.7}$$

Äquivalente Normen definieren dieselbe Topologie. In der Anwendung wichtiger ist vielleicht, dass eine Folge, die bezüglich der einen Norm konvergent bzw. Cauchy-konvergent ist, auch bezüglich der anderen Norm konvergent bzw. Cauchy-konvergent ist. Entsprechend kann man auch sagen: Eine Funktion oder Abbildung, die bezüglich der einen Norm stetig ist, ist auch bezüglich einer äquivalenten Norm stetig. Auch in endlich-dimensionalen Vektorräumen kann man verschiedene Normen definieren. Beispielsweise gibt es auf dem \mathbb{R}^n oder dem \mathbb{C}^n die sogenannten ℓ_p -Normen:

$$\|\boldsymbol{x}\|_{p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$
(12.8)

und für $p = \infty$ definiert man:

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty} = \sup_{i} \{|x_i|\}.$$
(12.9)

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass es sich hierbei für alle $p \ge 1$ um eine Norm handelt (die Positivität und die Skaleneigenschaft sind offensichtlich, die Dreiecksungleichung folgt aus der Minkowski-Ungleichung, siehe Anhang A2.2). Diese Normen sind jedoch für endlich-dimensionale Vektorräume wie dem \mathbb{R}^n im oben genannten Sinne gleichwertig.

Betrachtet man den Grenzwert $n \to \infty$, gelangt man zum Raum der reellen oder komplexen Folgen. Auch auf diesen Räumen kann man die obigen ℓ_p -Normen definieren und gelangt so zu den Vektorräumen ℓ^p (um die Norm ℓ_p , die auch im \mathbb{C}^n so bezeichnet wird, von dem Folgenraum ℓ^p mit dieser Norm zu unterscheiden, verwende ich bei der Norm das Subskript und bei dem Folgenraum das Superskript):

$$\ell^{p} = \left\{ x = (x_{1}, x_{2}, ...) | x_{i} \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_{i}|^{p} < \infty \right\} .$$
(12.10)

In diesen unendlich-dimensionalen Vektorräumen sind die verschiedenen ℓ_p -Normen jedoch nicht mehr äquivalent.

Zum Beweis betrachten wir die Folgen $x_n = (x_1, x_2, ...)$ mit $x_i = n^{-\alpha}$ für $i \le n$ und $x_i = 0$ für i > n. Offensichtlich ist

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(n\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)^{1/p} = n^{1/p-\alpha}.$$
(12.11)

Für $1/p - \alpha < 0$ oder $p > 1/\alpha$ konvergiert die Norm dieser Folgen gegen 0 und somit konvergieren diese Folgen gegen die Nullfolge. Für $p = 1/\alpha$ bleibt die Norm konstant 1, die Folge konvergiert nicht, allerdings ist diese Folge Element des zugehörigen Raums ℓ^p . Für $p < 1/\alpha$ divergiert die Folge der Normen, diese Folgen sind also keine Elemente des zugehörigen ℓ^p .

12.1.6 Banach-Räume

Definition: Ein <u>Banach-Raum</u> $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum (also ein Vektorraum \mathcal{B} , auf dem eine Norm definiert ist), der bezüglich der induzierten Topologie vollständig ist.

Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Der topologische Dualraum zu einem Banach-Raum \mathcal{B}^* ist der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $\omega : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Man bezeichnet diese Abbildungen auch als *lineare Funktionale*.

Solche linearen Funktionale ω sind genau dann stetig, wenn es eine reelle Zahl C > 0 gibt, sodass $|\langle \omega, x \rangle| \leq C ||x||$ für alle $x \in \mathcal{B}$. Man kann auf \mathcal{B}^* eine Norm definieren durch

$$\|\omega\| = \max_{\{x \in \mathcal{B} | \|x\| = 1\}} |\langle \omega, x \rangle|.$$
(12.12)

Offensichtlich ist $\|\omega\|$ genau die kleinste Zahl C, für die die Bedingung $|\langle \omega, x \rangle| \leq C \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{B}$ erfüllt ist.

Ein sehr wichtiges Theorem für normierte Vektorräume (die Vollständigkeit des Vektorraums wird für dieses Theorem nicht benötigt) ist das *Hahn-Banach-Theorem*:

Satz (Hahn-Banach): Es sei V ein normierter Vektorraum (über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und W ein linearer Unterraum. Es sei weiterhin $\omega : W \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional, das durch C > 0beschränkt sei. Dann gibt es eine lineare Erweiterung von ω zu einer linearen Abbildung auf V mit derselben Schranke C.

Diese Erweiterung ist nicht eindeutig und das Theorem gibt auch nicht an, wie man eine solche Erweiterung konstruiert.

Weitere wichtige Eigenschaften von Banach-Räumen sind sogenannte *Fixpunktsätze*. Sei $f : X \to X$ eine Abbildung einer Menge X in sich selbst, dann bezeichnet man ein Element $x \in X$ als *Fixpunkt* von f, wenn f(x) = x. Das Element x wird also unter der Abbildung f auf sich selbst abgebildet. Einer der bekanntesten Fixpunktsätze ist der Fixpunktsatz von Brouwer, der zunächst nur für endlich-dimensionale Vektorräume (bzw. den \mathbb{R}^n) formuliert wurde. Er besagt:

Satz (Fixpunktsatz von Brouwer): Sei D ein konvexes, kompaktes Gebiet im \mathbb{R}^n , dann besitzt jede stetige Abbildung $f: D \to D$ einen Fixpunkt.

(Eine Teilmenge D eines Vektorraums heißt konvex, wenn mit je zwei Elementen $x, y \in D$ auch die Verbindungslinie $\alpha x + (1-\alpha)y$ für $0 \le \alpha \le 1$ in D liegt.) Insbesondere ist eine Kugel, $\{x \in \mathbb{R}^n | ||x|| \le 1\}$ ein solches kompaktes, konvexes Gebiet. Diese Satz wurde auf unendlich-dimensionale normierte Vektorräume erweitert. Es gibt hier verschiedene Versionen (Satz von Schauder, Satz von Banach-Picard, Satz von Tychonoff) mit leicht unterschiedlichen Annahmen. Sehr oft erlauben diese Sätze einen Beweis für die Existenz und teilweise auch Eindeutigkeit für die Lösungen von Differentialgleichungen.

Sei beispielsweise $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ die Abbildung, die eine (eventuell mehrkomponentige) Funktion $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (mit $t \mapsto x(t)$) auf die Funktion T(x) abbildet, mit:

$$T(x)(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^t F(x(\tau), \tau) \,\mathrm{d}\tau \,.$$
(12.13)

Dann kann man (unter bestimmten Bedingungen an die Funktion F; insbesondere soll sie Lipschitzstetig im Argument x sein) beweisen, dass die Abbildung T einen Fixpunkt hat und dass man diesen Fixpunkt ausgehend von einer beliebigen Funktion $x_0(t)$ als Grenzwert der Iteration $x_n(t) = T(T(...(T(x_0(t))))) = T^n(x_0(t))$ erhalten kann. Diese Iteration tritt beispielsweise bei dem Verfahren von Picard und Lindelöf zum Lösen von Differentialgleichungen auf (siehe Kap. 5.2). Die Fixpunktsätze erlauben also Beweise für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen.

Ein Beispiel für Banach-Räume sind die Folgenräume ℓ^p mit den ℓ_p -Normen, die wir schon im letzten Abschnitt definiert haben. Ein weiteres Beispiel für Banach-Räume sind die \mathcal{L}^p -Räume. Hierbei handelt es sich um Funktionenräume, auf denen die \mathcal{L}_p -Normen definiert sind:

$$||f||_{p} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} |f(\boldsymbol{x})|^{p} \,\mathrm{d}^{n} x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad ||f||_{\infty} \equiv ||f||_{\sup} = \max_{x} \{f(x)\}, \qquad (12.14)$$

Diese Normen sind im Allgemeinen nicht äquivalent. Außerdem gibt es bei Funktionenräumen noch weitere Normen, die z.B. auch die Ableitungen von Funktionen einbeziehen, was die Theorie dieser Banach-Räume sehr reichhaltig macht.

Funktionen in \mathcal{L}^1 sind absolut integrierbar. Für solche Funktionen existiert beispielsweise das Fourier-Integral (Näheres siehe Kap. 13):

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right| \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(\boldsymbol{x}) \right| \, \mathrm{d}x \,. \tag{12.15}$$

Als Beispiel für die Verschiedenheit der Normen betrachten wir die \mathcal{L}_1 -Norm und die Supremumsnorm $||f||_{\sup} = \max_x |f(x)|$. Wir wählen die Funktionenfolge

$$f_n(x) = e^{-n(x-n)^2}$$
. (12.16)

Die \mathcal{L}_1 -Norm dieser Funktionen ist:

$$||f_n(x)||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(x-n)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$
(12.17)

Die Supremumsnorm ist

$$||f_n(x)||_{\sup} = \max_x |e^{-n(x-n)^2}| = 1.$$
(12.18)

Offenbar gibt es keine Zahl c, sodass $||f_n||_{\sup} < c||f_n||_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bezüglich der \mathcal{L}_1 -Norm handelt es sich bei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um eine Null-Folge, bezüglich der Supremumsnorm konvergiert die Folge nicht. Dies sieht man allerdings erst, wenn man das Cauchy-Kriterium verwendet: Da $\lim_{m\to\infty} ||f_n(x) - f_m(x)|| =$ $1 \forall n$ ist diese Folge auch nicht Cauchy-konvergent. Hätte man statt der obigen Folge die Folge $g_n(x) = e^{-nx^2}$ gewählt, würde diese Folge gegen die Funktion $g_{\infty}(x)$ konvergieren mit $g_{\infty}(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $g_{\infty}(0) = 1$.

12.2 Der Hilbert-Raum

Definition: Ein <u>Prä-Hilbert-Raum</u> ist ein Vektorraum mit einem (positiv definiten, nicht entarteten) Skalarprodukt.

Definition: Ein <u>Hilbert-Raum</u> ist ein Vektorraum mit einem (positiv definiten, nicht entarteten) Skalarprodukt, der bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Topologie vollständig ist.

Wenn nicht explizit erwähnt betrachte ich in diesem Kapitel immer einen Hilbert-Raum über den komplexen Zahlen.

Wie schon erwähnt erlaubt ein Skalarprodukt, also eine Abbildung $x, y \in \mathcal{H} \mapsto g(x, y) \in \mathbb{C}$ (wobei $g(\cdot, \cdot)$ die Eigenschaften aus Kap. 2.1 hat), die Definition einer Norm (und damit einer Topologie) auf einem Vektorraum: $||x|| = \sqrt{g(x, x)}$.

In der Physik spricht man auch bei endlich-dimensionalen Vektorräumen - insbesondere über den komplexen Zahlen - von Hilbert-Räumen, wenn auf diesen Vektorräumen ein Skalarprodukt definiert ist. In der Mathematik wird der Begriff Hilbert-Raum oft nur für unendlich-dimensionale Vektorräume verwendet. Die Forderung der Vollständigkeit ist für endlich-dimensionale Hilbert-Räume (über \mathbb{R} oder \mathbb{C}) nicht notwendig, da diese bereits vollständig sind. Für unendlich-dimensionale Hilbert-Räume muss die Vollständigkeit jedoch gefordert werden.

Bei Hilbert-Räumen schreibe ich für das Skalarprodukt meist $g(x, y) = \langle x|y \rangle$. Die Gründe werden in Abschnitt 12.4 im Zusammenhang mit dem Dualraum offensichtlich. Die Notation wurde 1939 von Paul Dirac eingeführt [Dirac 1939]. Sie ist insbesondere in der Quantenmechanik verbreitet und wird dort in den meisten Büchern verwendet. Sie ist aber allgemein für Hilbert-Räume sinnvoll, daher werde ich sie auch hier verwenden. In dieser Notation wird ein Vektor des Hilbert-Raums durch einen *ket*-Vektor $|\cdot\rangle$ gekennzeichnet und ein dualer Vektor durch einen *bra*-Vektor $\langle \cdot|$. Die Bezeichnungen ,bra' und ,ket' stammen von Dirac und sind ein Wortspiel mit dem englischen Ausdruck ,bracket' für Klammer. Der hier verwendete Punkt ,·' in einem bra- oder ket-Vektor ist durch ein Symbol zu ersetzen, das ausdrückt, um welchen Vektor es sich handelt. Die Notation $|x\rangle$ für einen Vektor ist durchaus zu vergleichen mit dem Vektorpfeil (\vec{x}) , den ich hauptsächlich für Vektoren im \mathbb{R}^3 verwende, oder der Fettschrift \boldsymbol{x} , die ich bei endlich-dimensionalen Vektorräumen und Koordinatensystemen verwendet habe. Der duale Vektor $\langle x |$ entspricht bei reellen Vektorräumen der Transposition, also dem Zeilenvektor $\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_n)$ und bei komplexen Vektorräumen zusätzlich noch der komplexen Konjugation: $\overline{\mathbf{x}^T} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$.

Auch in Hilbert-Räumen, also unendlich-dimensionalen Vektorräumen mit Skalarprodukt, gelten die Ungleichung von Cauchy und Schwarz (vgl. Gl. 2.19) und die Dreiecksungleichung:

 $|\langle x|y\rangle| \le ||x\rangle|| ||y\rangle|| \quad \text{bzw.} \quad |\langle x|y\rangle|^2 \le \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \quad , \qquad (12.19)$

$$|||x\rangle + |y\rangle|| \le |||x\rangle|| + |||y\rangle|| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}. \tag{12.20}$$

Zur Erinnerung: Die Elemente einer Menge $\{|x_n\rangle \in \mathcal{H}\}$ $(|x_n\rangle \neq 0)$ heißen orthogonal, wenn die Elemente paarweise orthogonal sind, also

$$\langle x_n | x_m \rangle = 0 \quad \forall n \neq m \,. \tag{12.21}$$

(Man beachte, dass der Index nicht diskret sein muss.) Die Elemente heißen orthonormal, wenn

$$\langle x_n | x_m \rangle = \delta_{nm}$$
 für alle $m, n.$ (12.22)

Definition: Eine Menge orthogonaler Elemente $\{|x_n\rangle\}$ $(|x_n\rangle \neq 0)$ heißt <u>Basis</u> von \mathcal{H} , wenn sie maximal ist, d.h., wenn es in \mathcal{H} kein Element $|y\rangle \neq 0$ gibt, sodass $\langle y|x_n\rangle = 0$ für alle n.

Eine maximale Menge orthogonaler Elemente kann also nicht um weitere Elemente erweitert werden. Um dem Grad der Unendlichkeit zumindest eine gewisse Grenze zu setzen, definieren wir den separablen Hilbert-Raum:

Definition: Ein separabler Hilbert-Raum ist ein Hilbert-Raum mit einer abzählbaren Basis.

Ein separabler Hilbert-Raum hat somit die Eigenschaft, dass es Basen gibt, bei denen man die Basisvektoren durchnummerieren kann $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, ...\}$. Bezüglich einer solchen Basis kann man oftmals wie mit gewöhnlichen Vektoren oder Matrizen rechnen, sofern man berücksichtigt, dass Summen auch divergent sein können. Die Konvergenz von Summen in Vektorräumen ist ähnlich wie bei Reihen definiert. Eine Summe

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i |e_i\rangle, \qquad (12.23)$$

wobei $x_i \in \mathbb{C}$ und $\{|e_i\rangle\}$ eine Folge von Vektoren (z.B. eine Basis) in \mathcal{H} ist, heißt konvergent mit Grenzwert $|x\rangle$, wenn

$$\lim_{N \to \infty} \left\| |x\rangle - \sum_{i=1}^{N} x_i |e_i\rangle \right\| \to 0.$$
(12.24)

Zu beachten ist, dass hier die durch das Skalarprodukt definierte Norm gemeint ist. Das spielt gerade bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen eine wichtige Rolle, da man oft verschiedene Normen definieren kann, in Bezug auf die die Konvergenz von Folgen unterschiedlich sein kann.

Ein Banach-Raum kann genau dann zu einem Hilbert-Raum gemacht werden, wenn für die Norm die sogenannte *Parallelogramm-Identität* gilt (siehe Abschnitt 12.1.3):

$$||x\rangle + |y\rangle||^{2} + ||x\rangle - |y\rangle||^{2} = 2(||x\rangle||^{2} + ||y\rangle||^{2}).$$
(12.25)

Wie wir noch sehen werden, ist dies bei den ℓ_p -Normen und \mathcal{L}_p -Normen für p = 2 der Fall.

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\{|e_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine abzählbare Orthonormalbasis von \mathcal{H} .

2. Für jedes Element $|x\rangle \in \mathcal{H}$ gilt

$$|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n |x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n |e_n\rangle.$$
(12.26)

Die Koeffizienten $x_n = \langle e_n | x \rangle$ bezeichnet man auch als verallgemeinerte Fourier-Koeffizienten.

3. Für jede zwei Elemente $|x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle y|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y|e_n\rangle \langle e_n|x\rangle.$$
(12.27)

 $\textit{Mit}\; \langle e_n | x \rangle = x_n \; \textit{ist das das}\; \ell^2 \text{-} \textit{Skalarprodukt}\; \langle y | x \rangle = \sum_n \overline{y_n} x_n.$

4. Für jedes Element $|x\rangle$ in \mathcal{H} gilt

$$\langle x|x\rangle = ||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||\langle e_n|x\rangle||^2.$$
 (12.28)

Die Gleichungen 12.27 und 12.28 bezeichnet man auch gelegentlich als <u>Prazeval'sche Identitäten</u>.

Beweis (aus [Richtmyer 1981]): Wir zeigen $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$. $1 \Rightarrow 2$: Das Element $|x\rangle \in \mathcal{H}$ sei beliebig, dann ist $|x\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle\langle e_n |x\rangle$ orthogonal zu jedem Element $|e_n\rangle$:

$$\langle e_k | g \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_k | e_n \rangle \langle e_n | x \rangle = \langle e_k | g \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{nk} \langle e_n | x \rangle = \langle e_k | g \rangle - \langle e_k | x \rangle = 0.$$
(12.29)

Da nach Voraussetzung $\{|e_n\rangle\}$ eine Basis bildet und damit vollständig sein soll, muss $|x\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle\langle e_n|x\rangle = 0$ sein. Damit folgt 2.

 $2 \Rightarrow 3$: Man multipliziere beide Seiten von links mit $\langle y |$.

 $3 \Rightarrow 4$: Man setze $|y\rangle = |x\rangle$.

 $4 \Rightarrow 1$: Wäre $|x\rangle$ orthogonal zu allen $|e_n\rangle$, würde die rechte Seite von Gl. 12.28 verschwinden, also wäre $|x\rangle = 0$. Damit ist $\{|e_n\rangle\}$ vollständig (kann also nicht erweitert werden).

Jedes Element eines Hilbert-Raums kann also nach den Basiselementen entwickelt werden (Gl. 12.26).

12.3 Zwei Beispiele separabler Hilbert-Räume

Die folgenden zwei Beispiele - der Raum der quadratsummierbaren Folgen und der Raum quadratintegrierbarer Funktionen - sind die wichtigsten Beispiele für Hilbert-Räume in der Physik und auch die einzigen Beispiele, auf die wir näher eingehen werden.

12.3.1 ℓ^2 – Quadratsummierbare Folgen komplexer Zahlen

Dieser Raum besteht aus der Menge aller abzählbar unendlichen, quadratsummierbaren Folgen von komplexen Zahlen $\{(x_1, x_2, x_3, ...) | x_i \in \mathbb{C}\}$, für die also gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \,. \tag{12.30}$$

Aus der Dreiecksungleichung für die Norm folgt, dass auch die Summe von zwei solchen Folgen quadratsummierbar ist; dasselbe gilt für die Multiplikation mit einer komplexen Zahl. Solche Folgen bilden also einen Vektorraum.

230

12.4. DER DUALE VEKTORRAUM UND DIE BRA-KET NOTATION

Durch die Definition des Skalarprodukts

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i} y_i \tag{12.31}$$

wird dieser Vektorraum zu einem Hilbert-Raum, der mit der Forderung der Quadratsummierbarkeit auch schon vollständig ist. Die Forderung der Quadratsummierbarkeit bedeutet, dass dieser Hilbert-Raum nur Elemente mit endlicher Norm enthält. Die Norm ist hierbei die ℓ_2 -Norm:

$$||x|| \equiv ||x||_2 = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}.$$
 (12.32)

Die abzählbar unendlich vielen Vektoren

$$|e_i\rangle = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$$
 (1 an *i*-ter Stelle) (12.33)

bilden eine Orthonormalbasis. Die Folge $(|e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$ ist ein Beispiel für eine Folge mit Elementen aus einem beschränkten, abgeschlossenen Gebiet (der abgeschlossenen Einheitskugel), die keine konvergente Teilfolge bzw. keinen Häufungspunkt enthält. Dies ist ein Beispiel dafür, dass in unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen der Satz von Heine und Borel nicht gilt.

12.3.2 \mathcal{L}^2 – Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

Der zweite wichtige Hilbert-Raum besteht aus der Menge der quadratintegrablen (oder auch quadratintegrierbaren) komplexwertigen Funktionen über den reellen Zahlen (bzw. über dem \mathbb{R}^n). Diesen Raum bezeichnet man mit $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$ (oder kurz \mathcal{L}^2) bzw. $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, wobei hier der Urbildraum sowie das Maß, bezüglich dessen Quadratintegrabilität verlangt wird, angegeben wird. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt dabei quadratintegrabel oder quadratintegrierbar [square-integrable], wenn gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}^n x < \infty \,. \tag{12.34}$$

Auch hier kann man sich leicht überzeugen, dass die Menge solcher Funktionen einen Vektorraum bildet.

Das Skalarprodukt für zwei Funktionen f und g ist definiert als:

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\boldsymbol{x})} g(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}^n x \,.$$
 (12.35)

Wir werden später (Kapitel 15) verschiedene Sätze von Basisfunktionen, die den Raum der quadratintegrablen Funktionen aufspannen, kennenlernen.

Man kann natürlich sowohl den Definitionsbereich der Funktionen für einen \mathcal{L}^2 -Raum einschränken, beispielsweise auf ein abgeschlossenes Gebiet $\Gamma \in \mathbb{R}^n$, als auch ein verallgemeinertes Integrationsmaß $d\mu(\boldsymbol{x})$ verwenden, wobei ich mich später auf Integrationsmaße beschränke, die sich durch eine reelle, positive Gewichtsfunktion $w(\boldsymbol{x})$ ausdrücken lassen (also $d\mu(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x})d^n x$). Solche Räume kennzeichnet man durch $\mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu(\boldsymbol{x}))$.

12.4 Der duale Vektorraum und die Bra-Ket Notation

Auch bei Hilbert-Räumen betrachten wir ausschließlich den topologischen Dualraum, d.h., die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von dem Hilbert-Raum in seinen Körper \mathbb{C} :

$$\omega : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

$$\forall |f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{H}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \langle \omega, (\alpha|f\rangle + \beta|g\rangle) \rangle = \alpha \langle \omega, |f\rangle \rangle + \beta \langle \omega, |g\rangle \rangle$$
(12.36)

KAPITEL 12. HILBERT-RÄUME

(Die komplizierte Notation $\langle \omega, |f\rangle \rangle$ wird überflüssig, wenn man die Bra-Ket-Notation verwendet. In diesem Abschnitt möchte ich jedoch zwischen dem Skalarprodukt $\langle \omega|f\rangle$ und der Wirklung eines Elements des Dualraums ω auf ein Elemente des Vektorraums $|f\rangle$ underscheiden. Das Ergebnis dieses Abschnitts rechtfertigt erst die Bra-Ket-Notation für Elemente von \mathcal{H} und seinem Dualraum.) Da der Hilbert-Raum vollständig ist, konvergiert jede Cauchy-Folge ($|f_i\rangle$) gegen ein Element $|f\rangle$ in diesem Hilbert-Raum, und die Forderung der Stetigkeit an ein Element $\omega \in \mathcal{H}^*$ bedeutet wieder, dass für solche Folgen gilt:

$$\lim_{i \to \infty} \||f_i\rangle - |f\rangle\| = 0 \implies \lim_{i \to \infty} |\langle \omega, |f_i\rangle\rangle - \langle \omega, |f\rangle\rangle| = 0.$$
(12.37)

Durch das Skalarprodukt gibt es eine natürliche Abbildung, die jedem Vektor einen dualen Vektor zuordnet:

$$|f\rangle \in \mathcal{H} \mapsto \omega_f = \langle f| \cdot \rangle \equiv \langle f| \in \mathcal{H}^* \quad \text{mit} \ \langle \omega_f, |g\rangle \rangle = \langle f|g\rangle \ \forall |g\rangle \in \mathcal{H}$$
(12.38)

Der *Riesz'sche Darstellungssatz* (oder auch Darstellungsatz von Riesz-Fréchet) besagt, dass sich umgekehrt auch jeder duale Vektor auf dem Hilbert-Raum auf diese Weise darstellen lässt:

Satz: In einem Hilbert-Raum \mathcal{H} gibt es zu jedem Element $\omega \in \mathcal{H}^*$ ein Element $|v\rangle \in \mathcal{H}$, sodass $\langle \omega, |f\rangle \rangle = \langle v|f\rangle \; \forall |f\rangle \in \mathcal{H}$.

Dieses Ergebnis mag zunächst überraschen, denn bei den Distributionen hatten wir gesehen, dass z.B. der Dualraum zu den Testfunktionenräumen wesentlich größer ist und viele Elemente enthält, denen keine Testfunktionen zugeordnet werden können. Das Skalarprodukt und die Vollständigkeit des Hilbert-Raums ermöglichen jedoch die explizite Konstruktion der Umkehrabbildung:

Beweis (aus [Richtmyer 1981]): Sei ω ein beschränktes lineares Funktional auf dem Hilbert-Raum. Der Kern dieses Funktionals, d.h. die Teilmenge

$$M = \{ |f\rangle \in \mathcal{H} | \langle \omega, |f\rangle \rangle = 0 \} \subset \mathcal{H}, \qquad (12.39)$$

ist ein linearer, abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} . Da ω nicht identisch auf \mathcal{H} verschwinden soll, ist das orthogonale Komplement M^{\perp} nicht leer (falls ω die Nullabbildung ist, kann man $|v\rangle = 0$ wählen). Es seien $|g\rangle, |h\rangle \in M^{\perp}$ (ungleich 0), dann sind diese beiden Elemente linear abhängig, d.h. M^{\perp} ist 1-dimensional; denn da sowohl $\langle \omega, |g \rangle$ als auch $\langle \omega, |h \rangle$ ungleich 0 sind, gibt es eine Zahl a, sodass

$$\langle \omega, |g \rangle \rangle = a \langle \omega, |h \rangle \rangle \implies \langle \omega, (|g \rangle - a|h \rangle) \rangle = 0 \implies |g \rangle = a|h \rangle.$$
(12.40)

Der erste Schritt folgt aus der Linearität von ω , der zweite, weil eine Linearkombination zweier Elemente aus M^{\perp} wieder in M^{\perp} liegen muss (M^{\perp} ist ebenfalls ein Vektorraum wenn M ein Vektorraum ist), die spezielle Kombination $|g\rangle - a|h\rangle$ aber gleichzeitig auch ein Element von M ist, somit ist $|g\rangle - a|h\rangle = 0$. Definieren wir nun:

$$|v\rangle = \frac{\overline{\langle \omega, |h\rangle\rangle}}{\langle h|h\rangle} |h\rangle \in \mathcal{H}$$
(12.41)

so folgt $\langle \omega, |f \rangle \rangle = \langle v|f \rangle$ für alle $|f \rangle \in \mathcal{H}$. Um das zu sehen zerlegen wir $|f \rangle$ in seinen Anteil in M^{\perp} (proportional zu $|h \rangle$) und den dazu senkrechten Anteil, der orthogonal zu $|h \rangle$ ist und dessen Beitrag verschwindet, wenn man ω darauf anwendet. Der Anteil von $|f \rangle$ proportional zu $|h \rangle$ ist:

$$|f^{\perp}\rangle = \frac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle}|h\rangle \tag{12.42}$$

und damit gilt

$$\langle \omega, |f\rangle \rangle = \left\langle \omega, \left(\frac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle} |h\rangle\right) \right\rangle = \frac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle} \langle \omega, |h\rangle \rangle .$$
(12.43)

12.5. PERIODISCHE FUNKTIONEN UND FOURIER-REIHEN

Andererseits gilt auch:

$$\langle v|f\rangle = \frac{\langle \omega, |h\rangle\rangle}{\langle h|h\rangle} \langle h|f\rangle.$$
(12.44)

Der Grund, dass hier $\langle \omega, |h \rangle \rangle$ und nicht $\overline{\langle \omega, |h \rangle \rangle}$ steht, ist, dass der Bra-Vektor zu $|v \rangle$ (also $\langle v |$) der komplex konjugierte (und transponierte) Vektor ist.

Im Zusammenhang mit diesem Ergebnis sollte man sich nochmals vor Augen halten, dass die Elemente von \mathcal{L}^2 Äquivalenzklassen von Funktionen sind und nicht Funktionen. Daher ist beispielsweise die Dirac'sche Delta-Funktion kein Element des Dualraums von \mathcal{L}^2 .

Dieser natürliche Isomorphismus zwischen einem Hilbert-Raum \mathcal{H} und seinem Dualraum veranlasste Paul Dirac zu der Bra-Ket-Notation für Hilbert-Räume. Zu jedem Vektor $|f\rangle \in \mathcal{H}$ gibt es den dualen Vektor $\langle f |$ und umgekehrt.

Statt also zu schreiben $x \in \mathcal{H}$, schreibe ich oft $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Und für den dualen Vektor $\omega_x = g(x, \cdot)$ schreibe ich Zukunft $\langle x|$. Für das Skalarprodukt von zwei Vektoren - bisher oft durch g(x, y) ausgedrückt - schreibe ich nun $\langle x|y\rangle$, was nach dem obigen Satz dasselbe ist wie die Wirkung des dualen Vektors ω_x auf den Vektor $|y\rangle$, also $\langle \omega_x, |y\rangle\rangle$. Für eine allgemeine Linearkombination zweier Vektoren $|x\rangle$ und $|y\rangle$ schreibt man $\alpha |x\rangle + \beta |y\rangle$. Für den Nullvektor schreibt man meist einfach 0.

12.5 Periodische Funktionen und Fourier-Reihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn f(x + L) = f(x) für alle $x \in \mathbb{R}$ und einen festen Wert L, die sogenannte Periode. Eine solche Funktion lässt sich auch als Funktion auf einem Kreis mit Umfang L interpretieren.

Periodische Funktionen können unter sehr allgemeinen Bedingungen nach Sinus- bzw. Kosinusfunktionen entwickelt werden. Diese Entwicklung bezeichnet man als Fourier-Reihe.

Periodische Funktionen lassen sich addieren oder mit einer reellen Zahl multiplizieren und das Ergebnis ist wieder eine periodische Funktion mit derselben Periode. Periodische Funktionen bilden also einen Vektorraum. Das gilt auch, wenn man sich beispielsweise auf stetige, stückweise stetige, Lipschitz-stetige oder differenzierbare periodische Funktionen einschränkt. Wir betrachten zunächst den Vektorraum reell-wertiger periodischer Funktionen; im nächsten Abschnitt verallgemeinern wir die Überlegungen auf komplex-wertige Funktionen.

Man kann auf diesem Vektorraum ein Skalarprodukt definieren: Für je zwei reellwertige periodische Funktionen f und g sei

$$\langle f|g \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \,.$$
 (12.45)

Dass es sich hierbei um ein Skalarprodukt handelt, ist offensichtlich: Das Produkt ist symmetrisch, $\langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle$, es ist positiv, $\langle f|f \rangle \ge 0$, und es ist bilinear, also linear in jedem seiner Argumente. Wie üblich, kann man mit dem Skalarprodukt eine Norm definieren:

$$||f||^{2} = \langle f|f\rangle = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x)^{2} \,\mathrm{d}x \,.$$
(12.46)

Gilt ||f|| = 0, so ist f = 0 (bis auf eine Menge vom Maß 0, also fast überall).

Man kann nun zeigen, dass die Funktionen

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right\} \quad (\text{für } n = 1, 2, 3, ...)$$
(12.47)

bezüglich des Skalarprodukts 12.45 eine Orthonormalbasis für stetige periodische Funktionen der Periode L bilden. Dazu sind folgende Formeln hilfreich:

$$\int_{0}^{L} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx = 0 \qquad \int_{0}^{L} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$
(12.48)

sowie:

$$\int_{0}^{L} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) = \frac{L}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_{0}^{L} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) = \frac{L}{2} \delta_{mn} \qquad (12.49)$$

$$\int_{0}^{L} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) = 0 \qquad (n, m = 1, 2, 3, ...).$$

Zum Beweis dieser Orthogonalitätsrelationen kann man folgende Additionstheoreme der Winkelfunktionen ausnutzen:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \right)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \right).$$

(12.50)

Im Folgenden seien die Funktionen, für die Fourier-Reihen aufgestellt werden, alle Lipschitzstetig. Dann kann man zeigen, dass die Fourier-Reihen überall konvergieren. Da der Definitionsbereich kompakt ist, ist diese Konvergenz auch gleichförmig. Man kann die Lipschitz-Stetigkeit auch durch stückweise Stetigkeit ersetzen, allerdings gilt die Konvergenz dann nur noch "fast überall" und sie ist nicht mehr gleichförmig.

Eine periodische Funktion der Periode L besitzt also die Darstellung:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) .$$
(12.51)

Die Koeffizienten a_n und b_n ergeben sich aus:

$$a_{0} = \langle 1|f \rangle = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x) dx$$

$$a_{n} = \left\langle \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \left|f\right\rangle = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) f(x) dx \qquad (12.52)$$

$$b_{n} = \left\langle \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \left|f\right\rangle = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) f(x) dx \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Anschaulich geben die Koeffizienten a_n bzw. b_n die Amplitude an, mit der eine reine Kosinus- bzw. Sinusfunktion in einer allgemeinen periodischen Funktionen enthalten ist. (Nach der hier angegebenen Definition bezieht sich der Koeffizient a_0 auf die konstante Funktion $e_0(x) = 1$, der Koeffizient bezüglich der normierten konstanten Funktion $1/\sqrt{2}$ ist entsprechend $\sqrt{2}a_0$.)

Je "scharfkantiger" eine Funktion f(x) ist, umso intensiver treten hohe Wellenzahlen $k = 2\pi n/L$ in der Entwicklung auf. Bei periodische Funktionen, die Lipschitz-stetig sind, fallen die Amplituden typischerweise wie $1/k^2$ ab, bei Funktionen, die ein (oder mehrere) Unstetigkeitsstellen haben, verhalten sich die Amplituden wie 1/k (siehe auch Anhang ??). In diesem Fall konvergieren die Reihen nicht mehr punktweise und in den Bereichen, wo sie punktweise konvergieren, ist die Konvergenz nicht gleichförmig.

12.6 Komplexe Fourier-Reihen

Nun betrachten wir komplex-wertige periodische Funktionen über der reellen Achse mit Periode L (bzw. auf dem Kreis S mit Umfang L). Wir definieren das Skalarprodukt (vgl. S. ??):

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \overline{f(x)}g(x) \,\mathrm{d}x \,. \tag{12.53}$$

Der Grund für die Wahl der Integrationsgrenzen (die eine volle Periode umfassen) wird später offensichtlich. Ebenso die Wahl der Normierung, bei der ich den Faktor 1/L weggelassen habe.

Statt der Sinus- und Kosinusfunktionen bestehe die Basis nun aus den Funktionen

$$|n\rangle \equiv e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$
 (12.54)

Man beachte, dass für n nun auch negative ganze Zahlen zugelassen sind (dies wäre auch bei den Fourier-Reihen durch die Definition $b_n = a_{-n}$ möglich gewesen). Außerdem habe ich einen Faktor $1/\sqrt{L}$ eingefügt, sodass diese Funktionen bezüglich des obigen Skalarprodukts auf 1 normiert sind:

$$\langle n|m\rangle = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i(m-n)x}{L}\right) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n\\ 1 & m = n \end{cases}$$
 (12.55)

Jede komplexwertige, stetige, periodische Funktion lässt sich nach dieser Basis entwickeln:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n = -\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \,. \tag{12.56}$$

Dies nennt man eine (diskrete) Fourier-Entwicklung. Die Koeffizienten $\{c_n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$ berechnen sich nach

$$c_n = \langle n|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{L}\right) f(x) \,\mathrm{d}x \tag{12.57}$$

und sind somit im Allgemeinen beliebige komplexe Zahlen.

Falls f(x) eine reellwertige Funktion ist, folgt aus Gl. 12.56

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n = -\infty}^{\infty} \overline{c_n} \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{L}\right) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n = -\infty}^{\infty} \overline{c_{-n}} \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = f(x)$$
(12.58)

und damit

$$\overline{c_{-n}} = c_n \,. \tag{12.59}$$

Diese Bedingung bezeichnet man manchmal auch als *Realitätsbedingung*. Unter anderem ist c_0 reell. Außerdem ist offensichtlich, dass die Koeffizienten c_n zu einer reellen Funktion im Allgemeinen nicht reell sind.

Die Koeffizienten $\{c_n\}$ bezeichnet man als die Fourier-Koeffizienten der Funktion f(x). In den Koeffizienten $\{c_n\}$ steckt (fast) dieselbe Information wie in der Funktion f(x). Ist f(x) Lipschitzstetig (oder von beschränkter Varianz oder stückweise stetig differenzierbar - diese Bedingungen sind gleichwertig), konvergiert die Summe (Gl. 12.56) gleichförmig gegen f(x). Ist f(x) stückweise stetig, gilt die Konvergenz nur "fast überall".

Den Zusammenhang mit der Reihenentwicklung nach Sinus- und Kosinusfunktionen (Gl. 12.51) für reellwertige Funktionen erkennt man, wenn man die Realitätsbedingung ausnutzt und die Fourier-Entwicklung in der Form

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) + \overline{c_n} \exp\left(-\frac{2\pi m i n x}{L}\right) \right) \right)$$
(12.60)

schreibt. Mit $c_n = \frac{\sqrt{L}}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n)$ folgt die Entwicklung aus Gleichung 12.51.

Für die periodische δ -Funktion

$$\delta_{\rm p}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL) \tag{12.61}$$

erhält man formal aus den Integralen

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \tag{12.62}$$

und somit:

$$\delta_{\rm p}(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \,. \tag{12.63}$$

Diese Darstellung ist im distributiven Sinn zu verstehen. Bricht man die Reihe nach $|n| \leq N$ Termen ab (es handelt sich dann um endliche geometrische Reihen), folgt:

$$\frac{1}{L}\sum_{n=-N}^{N} \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = \frac{1}{L} \frac{\sin(2N+1)\frac{\pi x}{L}}{\sin\frac{\pi x}{L}}.$$
(12.64)

Diese Folge konvergiert nicht für $N \to \infty$ im regulären Sinn, es handelt sich aber um eine Regularisierung der periodischen δ -Funktion in folgendem Sinne (für eine Testfunktion f(x)):

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \frac{\sin(2N+1)\frac{\pi x}{L}}{\sin\frac{\pi x}{L}} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(Ln) \,. \tag{12.65}$$

12.7 Die Elemente von \mathcal{L}^2 -Räumen

Man kann beweisen, dass alle unendlich-dimensionalen separablen Hilbert-Räume über demselben Zahlenkörper isomorph sind. Es gibt also eigentlich nur einen solchen Hilbert-Raum. Das mag zunächst erstaunen, wenn man die obigen Beispiele sieht. Doch da man nach Voraussetzung jedes Element des Hilbert-Raums in einer abzählbaren Basis darstellen kann - und man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Entwicklungskoeffizienten dann quadratsummierbar sein müssen -, erhält man einen Isomorphismus von einem separablen Hilbert-Raum in den Hilbert-Raum ℓ^2 .

12.7.1 Gleichheit von Elementen - Konvergenz von Folgen

Eine erste Besonderheit ergibt sich aus der Fragestellung, wann zwei unterschiedliche Darstellungen von Vektoren dasselbe Element des Hilbert-Raums bezeichnen. Zwei Elemente $|x\rangle$ und $|y\rangle$ eines Hilbert-Raums sind identisch (bzw. in dem Hilbert-Raum zu identifizieren), wenn

$$|x\rangle = |y\rangle \iff ||x\rangle - |y\rangle|| = 0.$$
(12.66)

Das entspricht natürlich der Forderung an ein nicht-entartetes Skalarprodukt und erscheint somit trivial. Doch die Folgerungen daraus sind es nicht immer.

Betrachten wir zunächst zwei Elemente des ℓ^2 . Es seien $|x\rangle = (x_1, x_2, ...)$ und $|y\rangle = (y_1, y_2, ...)$ zwei Elemente des ℓ^2 , dann gilt

$$|x\rangle = |y\rangle \iff ||x\rangle - |y\rangle||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 = 0 \iff x_i = y_i \ \forall i.$$
(12.67)

Zwei solche Folgen definieren also dasselbe Element im Hilbert-Raum genau dann, wenn alle ihre Folgenglieder gleich sind. Das würde man auch so erwarten.

12.7. DIE ELEMENTE VON \mathcal{L}^2 -RÄUMEN

Betrachten wir nun jedoch zwei Elemente f und g (quadratintegrierbare Funktionen) aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, so folgt:

$$|f\rangle = |g\rangle \iff \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$
(12.68)

Diese Bedingung lässt im Allgemeinen nicht den Schluss zu, dass $f(x) = g(x) \forall x$. Der Hilbert-Raum \mathcal{L}^2 besteht somit aus Äquivalenzklassen von Funktionen: Zwei Funktionen f(x) und g(x)sind äquivalent, wenn das Integral über das Absolutquadrat ihrer Differenz verschwindet. Auf diesen Äquivalenzklassen ist die Norm beispielsweise nicht mehr entartet, d.h., nur die Äquivalenzklasse zur Nullfunktion hat die Norm null. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass auch die Äquivalenzklassen einen Vektorraum bilden (z.B. ist die Summe zweier Repräsentanten aus Äquivalenzklassen wieder in einer Äquivalenzklasse, die nicht von der Wahl dieser Repräsentanten abhängt).

Betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$d_0(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$
(12.69)

Diese Funktion ist quadratintegrierbar, aber ihre Norm ist 0, d.h., sie ist im Sinne der \mathcal{L}_2 -Norm mit der Null-Funktion zu identifizieren. Während diese beiden Funktionen $(d_0(x)$ und die Null-Funktion) bezüglich der Supremumsnorm (also $||f||_{\sup} = \max_x |f(x)|$) verschieden sind, sind sie bezüglich der \mathcal{L}_2 -Norm äquivalent. Das betont nochmals, dass die Elemente von \mathcal{L}^2 keine Funktionen sind, die an jedem Punkt einen wohl definierten Funktionswert haben.

Ganz entsprechend konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n(x))$ gegen ein Element f(x) in \mathcal{L}^2 (manchmal sagt man auch "konvergiert im Mittel" [converges in the mean]), wenn

$$\lim f_n(x) \to f(x) \quad \iff \quad \lim_{n \to \infty} \|f(x) - f_n(x)\|^2 = \lim_{n \to \infty} \int |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0.$$
(12.70)

Daher kann man Funktionen wie $d_0(x)$ auch nicht ohne weiteres ausschließen und sich nur auf stetige oder differenzierbare Funktionen beschränken. Die folgende Funktionenfolge (f_n) besteht aus integrierbaren stetigen Funktionen:

$$f_n(x) = \exp(-nx^2).$$
 (12.71)

Diese Folge konvergiert punktweise (allerdings nicht gleichmäßig) gegen die obige Funktion $d_0(x)$. Bezüglich der \mathcal{L}_2 -Norm konvergiert sie aber zu der Äquivalenzklasse von Funktionen, zu der als Repräsentant auch $f(x) \equiv 0$ gehört.

12.7.2 \mathcal{L}^2 enthält auch nicht-stetige Funktionen

Man könnte zunächst einwerfen, dass man sich bei den Funktionen im \mathcal{L}^2 auf stetige Funktionen beschränken solle, die ja schließlich auch einen Vektorraum bilden. Doch die Funktionenfolge in Gl. 12.71 zeigt, dass dies nicht möglich ist: Alle Funktionen in dieser Folge sind stetig und quadratintegrierbar, doch der Grenzwert (bezüglich der punktweisen Konvergenz) ist es nicht. Andererseits ist der Grenzwert dieser Folge bezüglich der \mathcal{L}_2 -Norm die (Äquivalenzklasse zur) Null-Funktion, und die ist stetig. Man könnte sich in diesem Fall also noch auf stetige Funktionen als Repräsentanten der Äquivalenzklasse beschränken.

Doch der Hilbert-Raum \mathcal{L}^2 enthält auch nicht-stetige Funktionen. Betrachten wir dazu die Approximationen zur Heaviside-Funktion aus Kapitel 10.3,

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(-nx)},$$
(12.72)

und bilden das Produkt:

$$B_n(x) = \Theta_n(1-x)\Theta_n(1+x) = \frac{1}{1+\exp(-n(1-x))}\frac{1}{1+\exp(-n(1+x))}.$$
(12.73)

Die Funktionen $B_n(x)$ sind alle quadratintegrabel und stetig (sie sind sogar Elemente des Schwarz-Raums \mathscr{S}). Im Grenzfall $n \to \infty$ konvergiert diese Folge punkweise (aber nicht gleichförmig) gegen die Funktion:

$$B_{\infty}(x) = \begin{cases} 0 & x^2 > 1 \\ \frac{1}{2} & x^2 = 1 \\ 1 & x^2 < 1 \end{cases}$$
(12.74)

Diese Funktion ist quadratintegrabel und somit Element des \mathcal{L}^2 (die obige Folge (B_n) konvergiert natürlich auch bezüglich der \mathcal{L}_2 -Norm gegen B_{∞}). Diese Funktion hat zwei Sprungstellen und lässt sich nicht durch eine stetige Funktion ersetzen.

12.7.3 Stückweise stetige Funktionen

Wir haben gesehen, dass der Hilbert-Raum \mathcal{L}^2 aus Äquivalenzklassen von Funktionen besteht, wobei zwei Funktionen als äquivalent gelten, wenn sie sich nur auf einer Menge vom Maß null unterscheiden. Auf der Menge der quadratintegrierbaren¹ Funktionen ist die \mathcal{L}_2 -Norm entartet (d.h., außer der identischen Null-Funktion gibt es noch weitere Funktionen mit der Norm null). Da die Elemente von \mathcal{L}^2 jedoch Äquivalenzklassen von Funktionen sind (zwei Funktionen f und g sind äquivalent, wenn $||f - g||_2 = 0$), und nicht einzelne Funktionen, ist die \mathcal{L}_2 -Norm in dem Hilbert-Raum \mathcal{L}^2 auch nicht entartet.

Das hat zur Folge, dass der Wert eines Elements aus \mathcal{L}^2 an einer bestimmten Stelle nicht definiert ist. Ähnlich wie schon bei den Distributionen ist es eigentlich nicht sinnvoll, von Funktionen zu sprechen (sofern man damit Abbildungen von \mathbb{R}^n in \mathbb{C} meint) sondern die Elemente von \mathcal{L}^2 sind durch ihre Integraleigenschaften definiert, d.h., es sind spezielle Distributionen.

Trotz dieser Eigenschaft kann man zumindest bei einigen Äquivalenzklassen (viele, die in der Physik von Interesse sind) einen Äquivalenzklassenvertreter finden, der als Funktion sinnvoll ist: Dies sind die stückweise stetigen Funktionen. Diese Funktionen besitzen an jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ einen rechts- und einen linksseitigen Grenzwert (die nicht gleich sein müssen und, wie in obigem Beispiel bei der Funktion $B_{\infty}(x)$, auch nicht mit dem definierten Funktionswert übereinstimmen müssen). Die Sprungstellen sind daher isoliert und abgesehen von diesen Sprungstellen sind die Funktionen stetig.

12.7.4 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ enthält auch Funktionen, die für $|x| \to \infty$ nicht gegen 0 konvergieren

Sehr oft hört man, dass Funktionen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, für die also gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \,, \tag{12.75}$$

die Eigenschaft haben müssen, dass $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Das ist nicht ganz richtig, wie die folgenden zwei Beispiele zeigen (aus [Richtmyer 1981]):

$$f_1(x) = \exp(-x^4 \sin x^2)$$
 und $f_2(x) = x^2 \exp(-x^8 \sin x^2)$. (12.76)

238

¹Streng genommen sollte man zwischen Lebesgue-integrierbar und Riemann-integrierbar unterscheiden; beispielsweise ist die Dirichlet-Funktion, d(x) = 1 für $x \in \mathbb{Q}$ und d(x) = 0 sonst, Lebesgue-integrierbar aber nicht Riemannintegrierbar.

12.7. DIE ELEMENTE VON \mathcal{L}^2 -RÄUMEN

Die zweite Funktion ist sogar ein Beispiel für eine quadratintegrable Funktion, die für $|x| \to \infty$ nicht beschränkt ist. Für $x_n = \sqrt{\pi n}$ divergiert $f_2(x_n)$ wie πn , trotzdem ist die Funktion quadratintegrabel: Die Beiträge zum Integral aus der Umgebung dieser Punkte verschwinden ausreichend rasch, sodass ihre Summe endlich bleibt.

Die Ableitungen dieser Funktionen sind allerdings nicht quadratintegrabel. Man kann zeigen, dass für quadratintegrable Funktionen, deren Ableitungen ebenfalls quadratintegrabel sind, tatsächlich gilt $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Der folgende Beweis stammt aus [Richtmyer 1981]:

Beweis: Es seien f und f' quadratintegrierbar, dann gilt nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)f'(x) \,\mathrm{d}x \right|^{2} \leq \left(\int_{a}^{b} |f(x)|^{2} \mathrm{d}x \right) \left(\int_{a}^{b} |f'(x)|^{2} \mathrm{d}x \right) \,. \tag{12.77}$$

Da der Integrand auf der linken Seite eine totale Ableitung darstellt, folgt:

$$\frac{1}{2} \left| f(b)^2 - f(a)^2 \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x \right) \,. \tag{12.78}$$

Wir lassen nun a und b unabhängig voneinander gegen $+\infty$ gehen (für $-\infty$ ist der Beweis entsprechend). Die rechte Seite muss in diesem Grenzfall verschwinden, andernfalls wären die Funktionen nicht quadratintegrabel. Das bedeutet aber f(a) = f(b) bzw. f(x) geht für $x \to \infty$ gegen eine Konstante. Diese Konstante kann aber wegen der Quadratintegrabilität nur null sein.

12.7.5 \mathcal{L}^2 enthält auch singuläre Funktionen

Selbst die Beschränkung auf stückweise stetige Funktionen wird dem \mathcal{L}^2 nicht gerecht. Auch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}} \exp(-x^2) \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
(12.79)

ist quadratintegrierbar. Diese Situation wird im \mathbb{R}^n mit wachsendem *n* schlimmer: In 3 Dimensionen darf sich eine Funktion in einer Umgebung von 0 wie $1/|\mathbf{x}|$ verhalten, um quadratintegrierbar zu sein. Solche Funktionen lassen sich auch als Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen (sogar Elementen aus \mathscr{S}) erhalten, z.B.:

$$f_{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp(-\boldsymbol{x}^2)}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \epsilon^2}} \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.$$
(12.80)

Im Grenzfall $\epsilon \to 0$ konvergieren diese Funktionen bezüglich der \mathcal{L}_2 -Norm gegen $\exp(-\mathbf{x}^2)/|\mathbf{x}|$. Diese Beispiele zeigen, dass die Charakterisierung der Elemente von \mathcal{L}_2 durch gewöhnliche Funktionen nicht trivial ist.

Streng genommen sollte man in Bezug auf den \mathcal{L}^2 nicht sagen ,eine Folge konvergiert gegen die Funktion f(x), sondern man sollte eher sagen ,eine Folge konvergiert gegen die Äquivalenzklasse, zu der die Funktion f(x) gehört. Diese Äquivalenzklasse enthält neben stückweise stetigen und quadratintegrierbaren Funktionen auch Distributionen (d.h. Elemente, die zunächst nur über ihre Wirkung auf Testfunktionen definiert sind). Der Einfachheit halber werde ich trotzdem häufig die erste Sprechweise verwenden, auch wenn meist die zweite gemeint ist.

12.7.6 Dichte Teilmengen des \mathcal{L}^2

Ein ,Lichtblick' im Umgang mit dem Hilbert-Raum \mathcal{L}^2 ist, dass viele reguläre Funktionenräume dicht in diesem Raum liegen. Erinnern wir uns: Eine Menge A liegt dicht in einem topologischen Raum M, wenn jede offene Umgebung $U_x \subset M$ von einem Punkt $x \in M$ auch Elemente von A enthält, oder anders ausgedrückt:

A dicht in
$$M \iff \forall x \in M \text{ und } \forall U_x \ni x \text{ (offen)} : U_x \cap A \neq \emptyset.$$
 (12.81)

In jeder beliebig kleinen offenen Umgebung von jedem Punkt $x \in M$ befinden sich also Elemente von A, bzw., x lässt sich durch Elemente in A beliebig approximieren. Nochmals anders ausgedrückt: Jedes Element $x \in M$ lässt sich als Grenzwert einer Folge in A darstellen.

Beispielsweise liegt die Menge der quadratintegrablen stetigen Funktionen dicht in \mathcal{L}^2 . Ebenso liegen der Schwarz-Raum \mathscr{S} und der Raum der kompakten unendlich oft differenzierbaren Funktionen \mathscr{D} dicht in \mathcal{L}^2 . Wir haben oben schon mehrere Beispiele gesehen, wie sich Elemente aus \mathcal{L}^2 durch Folgen von Elementen aus \mathscr{S} approximieren lassen. Die \mathscr{S} -Folge (f_n) mit $f_n(x) = \exp(-x^2/n)f(x)$ konvergiert in der \mathcal{L}_2 -Norm gegen f(x), sofern f(x) quadratintegrierbar ist (sie konvergiert allerdings nicht als Folge in \mathscr{S} nach dem Kriterium aus Abschnitt 10.1.3).

Wir werden später lineare Abbildungen betrachten, die nur auf dichten Teilmengen im \mathcal{L}^2 definiert sind.

12.8 Lineare Operatoren in Hilbert-Räumen

Die Definition eines linearen Operators \mathcal{A} in Hilbert-Räumen entspricht der üblichen Definition:

$$\mathcal{A}(\alpha|f\rangle + \beta|g\rangle) = \alpha \mathcal{A}(|f\rangle) + \beta \mathcal{A}(|g\rangle).$$
(12.82)

Zusätzlich verlangen wir, dass lineare Operatoren stetig sein sollen, also

$$\lim_{i \to \infty} |f_i\rangle = |f\rangle \implies \lim_{i \to \infty} \mathcal{A}(|f_i\rangle) = \mathcal{A}(|f\rangle), \qquad (12.83)$$

bzw.

$$\lim_{i \to \infty} \||f_i\rangle - |f\rangle\| = 0 \implies \lim_{i \to \infty} \|\mathcal{A}(|f_i\rangle) - \mathcal{A}(|f\rangle)\| = 0.$$
(12.84)

Da ich jetzt konkret lineare Abbildungen von $\mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu(x)) \to \mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu(x))$ betrachten werde, ist hier unter $\|\cdot\|$ immer die \mathcal{L}_2 -Norm gemeint, d.h. Gl. 12.84 bedeutet:

$$\lim_{i \to \infty} \int_{\Gamma} |f_i(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = 0 \implies \lim_{i \to \infty} \int_{\Gamma} |\mathcal{A}(f_i)(x) - \mathcal{A}(f)(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$
(12.85)

Ein linearer Operator ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist, d.h., wenn es eine Zahl K gibt, sodass

$$\|\mathcal{A}(|x\rangle)\| \le K \||x\rangle\| \qquad \forall |x\rangle \in \mathcal{H}.$$
(12.86)

Die kleinste Schranke K, die dieser Ungleichung genügt, bezeichnet man als Norm von \mathcal{A} (siehe Abschnitt 12.8.3).

12.8.1 Beispiele linearer Operatoren

Es folgen ein paar Beispiele für lineare Operatoren. Manche dieser Operatoren sind nur auf einem Teilraum des \mathcal{L}^2 definiert; da die Testfunktionen jedoch dicht in \mathcal{L}^2 liegen, sind alle Operatoren auf einer dichten Teilmenge definiert. Inwieweit diese Operatoren auch stetig (d.h. beschränkt) sind, wird teilweise noch untersucht.

12.8. LINEARE OPERATOREN IN HILBERT-RÄUMEN

1. Die Multiplikation mit x ist eine lineare Abbildung, da

$$x(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha x f(x) + \beta x g(x).$$
(12.87)

Dementsprechend ist auch die Multiplikation mit einer Potenz von x, also x^n , oder auch mit einer Funktion h(x) eine lineare Abbildung:

$$h(x)(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha h(x)f(x) + \beta h(x)g(x).$$
(12.88)

Auf dem $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ ist die Multiplikation mit x oder Potenzen von x allerdings nicht stetig, da dies unbeschränkte Operationen sind (siehe auch Abschnitt 12.9.1). Beschränkte und daher stetige lineare Multiplikationsoperatoren sind z.B. die Multiplikation mit $h(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ oder $h(x) = \exp(\mathrm{i}\alpha x)$. Außerdem ist die Multiplikation mit x eine stetige Abbildung auf \mathcal{L}^2 -Räumen über einem kompakten Gebiet (beispielsweise dem Intervall [-1, 1]).

2. Die Ableitung nach x ist eine lineare Abbildung, da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x).$$
(12.89)

Dementsprechend sind auch höhere Ableitungen nach x oder (in mehr als einer Dimension) z.B. der Laplace-Operator lineare Abbildungen:

$$\Delta(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})) = \alpha \Delta f(\boldsymbol{x}) + \beta \Delta g(\boldsymbol{x}).$$
(12.90)

Auch diese Abbildungen sind unbeschränkt (Abschnitt 12.9.1) und daher nicht stetig. Ein interessanter stetiger Operator, der eine Funktion von Ableitungen ist, ist $T_{\alpha} = \exp(\alpha \frac{d}{dx})$. Für Funktionen $f \in \mathscr{S}$ gilt

$$(T_{\alpha}f)(x) = \exp\left(\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = f(x+\alpha).$$
(12.91)

Die Wirkung dieses Operators auf eine Testfunktion entspricht also einer Translation des Arguments um den Wert α . Die Translation ist aber für alle Elemente aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ definiert, daher ist die Wirkung von T_{α} auf eine beliebige $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ -Funktion: $(T_{\alpha}f)(x) = f(x + \alpha)$.

3. Die Faltung mit einer Testfunktion ist eine stetige lineare Abbildung:

$$h * (\alpha f + \beta g)(x) = \int_{\Gamma} h(x - y)(\alpha f(y) + \beta g(y)) dy$$
(12.92)

$$= \alpha \int_{\Gamma} h(x-y)f(y)dy + \beta \int_{\Gamma} h(x-y)g(y)dy \qquad (12.93)$$

$$= \alpha h * f(x) + \beta h * g(x). \qquad (12.94)$$

4. Das Integral über einen (verallgemeinerten) Integralkern ist eine lineare Abbildung:

$$\int_{\Gamma} K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\alpha f(\boldsymbol{y}) + \beta g(\boldsymbol{y})) d\boldsymbol{y} = \alpha \int_{\Gamma} K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} + \beta \int_{\Gamma} K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \,.$$
(12.95)

Ob diese Abbildung stetig (d.h. beschränkt) ist, hängt von dem Integralkern ab.

12.8.2 Matrixdarstellung linearer Operatoren

Auch in unendlich-dimensionalen Vektorräumen ist eine lineare Abbildung bereits eindeutig festgelegt, wenn ihre Wirkung auf eine Basis bekannt ist, da für einen beliebigen Vektor $|x\rangle = \sum_{i} x_{i} |e_{i}\rangle$ gilt:

$$\mathcal{A}|x\rangle = \mathcal{A}\left(\sum_{i} x_{i}|e_{i}\rangle\right) = \sum_{i} x_{i} \mathcal{A}|e_{i}\rangle.$$
(12.96)

Bezüglich einer abzählbaren Basis $\{|e_i\rangle\}$ kann man die lineare Abbildung auch durch ihre Matrixelemente kennzeichnen:

$$a_{ij} = \langle e_i | \mathcal{A} | e_j \rangle \tag{12.97}$$

In Bezug auf eine abzählbare Basis kann man daher auch bei unendlich-dimensionalen Hilbert-Räumen eine Matrixdarstellung angeben:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
(12.98)

Speziell für einen Funktionenraum wie den $\mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu(x))$ bedeutet dies Folgendes: Gegeben eine Basis orthonormaler Funktionen $\{f_n(\boldsymbol{x})\}$, sodass

$$\int_{\Gamma} \overline{f_n(\boldsymbol{x})} f_m(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) = \delta_{nm} , \qquad (12.99)$$

dann gilt für die Matrixdarstellung eines linearen Operators:

$$a_{mn} = \langle n | \mathcal{A} | m \rangle = \int_{\Gamma} \overline{f_n(\boldsymbol{x})} \mathcal{A} f_m(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) . \qquad (12.100)$$

Es wurde zwar betont, dass wir uns auf separable Hilbert-Räume beschränken und dass separable Hilbert-Räume immer eine abzählbare Basis haben, das bedeutet jedoch nicht, dass die Operatoren auch immer bezüglich einer solchen abzählbaren Basis ausgedrückt werden müssen. Wie wir gesehen haben, ist der Ableitungsoperator $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ein linearer Operator auf dem separablen Hilbert-Raum der quadratintegrablen Funktionen, doch erst wenn wir die quadratintegrablen Funktionen nach einer Basis entwickeln, wird aus dem Ableitungsoperator in dieser Basis eine Matrix:

$$p_{nm} = \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \right| m \right\rangle = \int_{\Gamma} \overline{f_n(\boldsymbol{x})} \frac{\partial}{\partial x_i} f_m(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) .$$
(12.101)

(Anmerkung: Der Ableitungsoperator spielt in der Quantentheorie eine wichtige Rolle, allerdings wird er mit der imaginären Einheit i multipliziert. Die Gründe werden später offensichtlich.)

12.8.3 Die Norm von Operatoren

Man kann für lineare Operatoren verschiedene Normen definieren. Noch schlimmer: Man kann sehr viele Topologien auf der Menge der linearen Operatoren definieren und daher insbesondere sehr viele verschiedene Konvergenzbegriffe.

Ich beschränke mich hier auf die sogenannte *Operatornorm* und die *schwache Operatornorm*. Mit jeder Norm erhält man auf der Menge der Operatoren auch eine entsprechende Topologie, aus den genannten Normen beispielsweise die sogenannte *Normtopologie* (oder auch *gleichförmige Topologie*) und die *schwache Operatortopologie*. **Definition** Es sei \mathcal{A} ein linearer Operator auf einem Banach-Raum, dann ist die <u>Operatornorm</u> definiert als:

$$||A||_{S} = \sup_{|x\rangle} \frac{||A|x\rangle||}{||x\rangle||}.$$
 (12.102)

Handelt es sich um einen Operator auf einem Hilbert-Raum, kann man auch schreiben

$$\|A\|_{S} = \sup_{|x\rangle} \frac{\sqrt{\langle x|A^{\dagger}A|x\rangle}}{\sqrt{\langle x|x\rangle}} = \sup_{\{|x\rangle|\langle x|x\rangle=1\}} \sqrt{\langle x|A^{\dagger}A|x\rangle}$$
(12.103)

und es gilt

$$||A||_{S}^{2} = ||A^{\dagger}A||_{S}, \qquad (12.104)$$

wobe
i A^{\dagger} der adjungierte Operator zu A ist.

Definition: Die schwache [weak] Operatornorm ist:

$$\|A\|_W = \sup_{\||\omega\|=1, \|x\|=1} |\langle \omega, A(x) \rangle| \qquad \omega \in \mathcal{B}^*, x \in \mathcal{B}.$$
(12.105)

Für einen Hilbert-Raum gilt:

$$||A||_{W} = \sup_{||x\rangle||=||y\rangle||=1} |\langle y|A|x\rangle|.$$
(12.106)

Bei endlich-dimensionalen Hilbert-Räumen definieren beide Normen dieselbe Topologie auf der Menge der linearen Abbildungen. Dies ist bei unendlich-dimensionalen Hilbert-Räumen nicht mehr der Fall.

Wie schon erwähnt bezeichnet man Operatoren mit endlicher Operatornorm als *beschränkt*, andernfalls sind sie *unbeschränkt*. In endlich-dimensionalen Vektorräumen sind alle linearen Abbildungen beschränkt. Dies ist in unendlich-dimensionalen Räumen nicht mehr der Fall.

Nach unserer Definition für lineare Abbildungen gehören die Beispiele unbeschränkter Operatoren streng genommen nicht zu den linearen Operatoren auf den jeweiligen Hilbert-Räumen, denn eine Minimalvoraussetzung für eine Abbildung ist, dass sie jedem Element des Urbildraums ein Element des Bildraums zuordnet, was aber bei unbeschränkten Operatoren nicht erfüllt ist. Man umgeht diese Probleme meist, indem man diese Operatoren nicht auf dem gesamten Hilbert-Raum \mathcal{H} definiert, sondern nur auf jenem Teilraum $D \subset \mathcal{H}$, auf dem die Bilder wieder im Hilbert-Raum liegen. Diesen Teilraum bezeichnet man als den Definitionsbereich der Operatoren.

Besondere Vorsicht ist dann geboten, wenn mehrere unbeschränkte lineare Abbildungen hintereinander ausgeführt werden. Damit sich lineare Abbildungen hintereinanderschalten lassen, muss der Bildraum der ersten Abbildung im Urbildraum (Definitionsbereich) der zweiten Abbildung enthalten sein. Dies ist für lineare Abbildungen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen immer der Fall, gilt aber im Allgemeinen bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen nur, wenn die Abbildungen beschränkt sind. Ich werde hier jedoch fast nie eine Einschränkung machen und auch unbeschränkte Operatoren, die in der Physik sehr oft vorkommen, hintereinanderschalten. Stößt man an manchen Stellen auf scheinbare Widersprüche, sollte man immer überlegen, ob nicht unbeschränkte Operatoren daran Schuld sind.

Beispiel eines unbeschränkten Operators im ℓ_2

Es kann in unendlich-dimensionalen Vektorräumen mit einer vorgegebenen Basis vorkommen, dass lineare Abbildungen zwar auf jedem Basiselement definiert sind, trotzdem aber keine linearen Abbildungen auf dem gesamten Vektorraum darstellen. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel aus dem Raum ℓ_2 . Auf der Standardbasis $|e_n\rangle = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ (1 an der *n*. Stelle) sei die Abbildung

$$N|e_n\rangle = n|e_n\rangle \tag{12.107}$$

gegeben. Angewandt auf den quadratsummierbaren Vektor

$$|x\rangle = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) , \qquad ||x\rangle|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$
(12.108)

folgt

$$N|x\rangle = (1, 1, 1, ..., 1, ...) . (12.109)$$

Dieser Vektor ist jedoch nicht mehr quadratsummierbar und daher kein Element des Vektorraums der quadratsummierbaren Folgen. Die Menge der Vektoren, auf denen die lineare Abbildung N definiert ist, liegt jedoch dicht in dem Hilbert-Raum ℓ_2 . Zum Beispiel ist N auf allen Folgen wohldefiniert, die ab einer bestimmten Stelle nur noch das Element 0 haben.

12.8.4 Der Kommutator von Operatoren

Das Produkt von Matrizen hängt im Allgemeinen von ihrer Reihenfolge ab, d.h., $AB \neq BA$. In diesem Sinne handelt es sich bei dem Produkt von Matrizen um ein *nichtkommutatives* Produkt. Dies gilt natürlich auch für linearen Operatoren in einem Hilbert-Raum. Unter anderem in der Quantenmechanik spielt die Frage, ob zwei Operatoren miteinander kommutieren oder nicht, eine wichtige Rolle. Daher definiert man gewöhnlich den *Kommutator* von zwei Operatoren als die Differenz zwischen den beiden Produkten und somit als ein Maß für die Nichtkommutativität von Operatoren:

$$[A,B] := AB - BA \tag{12.110}$$

Wir wollen ein paar formale Eigenschaften des Kommutators zusammenfassen, die für beliebige lineare Operatoren A, B, C gelten:

1. Der Kommutator ist ein anti-symmetrisches Produkt:

$$[A, B] = -[B, A].$$
(12.111)

2. Der Kommutator ist ein bilineares Produkt:

$$[A, \alpha B + \beta C] = \alpha[A, B] + \beta[A, C] \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$
(12.112)

mit einer entsprechenden Identität für den ersten Eintrag.

3. Der Kommutator erfüllt die sogenannte Jacobi-Identiät:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$
(12.113)

4. Der Kommutator ist eine Derivation, d.h.:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C].$$
(12.114)

Als Beispiel soll der Kommutator der beiden Operatoren x und $i\frac{d}{dx}$ berechnet werden. Dabei muss berücksichtigt werden, dass es sich um Operatoren handelt, die auf eine Funktion anzuwenden sind. Wir berechnen somit:

$$\left[x, i\frac{d}{dx}\right]f(x) = x\left(i\frac{d}{dx}f(x)\right) - i\frac{d}{dx}\left(xf(x)\right)$$
(12.115)

$$= x \cdot i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) - i f(x) - i x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \qquad (12.116)$$

$$= -\mathrm{i}f(x) \tag{12.117}$$

(Der erste und dritte Term in der zweiten Zeile heben sich weg.) Damit schreibt man für den Kommutator:

$$\left[x, i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] = -\mathrm{i}\,.\tag{12.118}$$

12.8.5 Adjungierte und selbst-adjungierte Operatoren

Definition: Sei \mathcal{D} : $\mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu(x)) \to \mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu(x))$ ein linearer Operator, dann ist der dazu <u>adjungierte</u> Operator \mathcal{D}^{\dagger} definiert durch:

$$\int_{\Gamma} \overline{(\mathcal{D}^{\dagger}\phi(x))}\psi(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Gamma} \overline{\phi(x)}\mathcal{D}\psi(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \,.$$
(12.119)

Für einen selbst-adjungierten Operator gilt $\mathcal{D}^{\dagger} = \mathcal{D}$.

Kapitel 15 beschäftigt sich mit einer besonders wichtigen Klasse von selbst-adjungierten Operatoren, den sogenannten Sturm-Liouville-Operatoren, daher gehe ich an dieser Stelle nur kurz auf diese Operatoren ein. Die wesentlichen Aussagen, die wir in Kap. 2.3 für den endlich-dimensionalen Fall bewiesen haben, gelten auch hier:

- 1. Selbst-adjungierte Operatoren haben reelle Eigenwerte.
- 2. Die Eigenräume selbst-adjungierter Operatoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- 3. Zu einem selbst-adjungierten Operator gibt es eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

Die Beweise zu den ersten beiden Aussagen sind identisch zu den Beweisen im endlichen dimensionalen Fall. Die Vollständigkeit der Eigenräume erfordert einen etwas größeren Aufwand. Eines der Probleme ist, dass viele selbst-adjungierte Operatoren unbeschränkt und daher streng genommen nicht auf dem gesamten Hilbert-Raum definiert bzw. nicht stetig sind.

An dieser Stelle betrachten wir zwei wichtige Operatoren der Quantentheorie, die "Multiplikation mit x", den sogenannten *Ortsoperator*, und die "Ableitung nach x, multipliziert mit i", den sogenannten *Impulsoperator*. Auf beide Operatoren geht Abschnitt 12.9 genauer ein.

Der Ortsoperator - Multiplikation mit x - ist selbst-adjungiert, da

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} x g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \overline{(xf(x))} g(x) \, \mathrm{d}x \,. \tag{12.120}$$

Entsprechend ist der Impulsoperator - Ableitung nach x multipliziert mit i - selbst-adjungiert, da

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \left(i \frac{d}{dx} g(x) \right) dx = -\int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\frac{d}{dx} f(x) \right)} ig(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(i \frac{d}{dx} f(x) \right)} g(x) dx.$$
(12.121)

Der Faktor i ist also wichtig, um den Vorzeichenwechsel durch die partielle Integration (Schritt 1) wieder rückgängig zu machen, indem dieser Faktor komplex konjugiert wird (Schritt 2). Außerdem ist wichtig, dass bei der partiellen Integration keine Randterme hinzukommen, weil die Funktionen f und g quadratintegrabel (und natürlich ableitbar) sein sollen.

12.8.6 Unitäre und isometrische Operatoren

Wir hatten uns in endlich-dimensionalen Vektorräumen schon mit unitären Abbildungen beschäftigt (Abschnitt 2.5). In unendlich-dimensionalen Hilbert-Räumen muss man zwischen isometrischen (das Skalarprodukt erhaltenden) und unitären Abbildungen unterscheiden.

Definition: Eine lineare Abbildung $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt <u>isometrisch</u>, wenn

$$\langle x|y\rangle = \langle Ux|Uy\rangle \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}.$$
 (12.122)

Eine lineare Abbildung $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt <u>unitär</u>, wenn sie isometrisch und bijektiv ist.

Während in endlich-dimensionalen Vektorräumen die Unitarität aus der Isometrie folgt, ist dies in unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht mehr der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei $\mathcal{H} = \ell_2$ und der Operator S (für Shift-Operator) sei definiert durch:

$$S|x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle = |0, x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle.$$
 (12.123)

Der Operator verschiebt also jeden Eintrag in diesem unendlichen Vektor um eine Stelle nach rechts. Dieser Operator ist isometrisch, denn offensichtlich gilt:

$$\langle x|y\rangle = \langle Sx|Sy\rangle \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}.$$
(12.124)

Dieser Operator ist aber nicht unitär, da er nicht bijektiv ist: Der Vektor $|1, 0, 0, ...\rangle$ hat kein Urbild. Damit gibt es zu S auch keinen rechtsinversen Operator, sondern nur einen linksinversen, d.h., es gilt

$$S^{-1}S|x\rangle = |x\rangle \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{H},$$
 (12.125)

wobei S^{-1} definiert ist durch

$$S^{-1}|x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle = |x_2, x_3, x_4, \ldots\rangle,$$
 (12.126)

also ein Verschiebe
operator nach links, wobei die erste Komponente wegfällt.
 S^{-1} ist aber kein rechts-inverser Operator z
uS,da

$$SS^{-1}|x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle = S|x_2, x_3, x_4, \ldots\rangle = |0, x_2, x_3, \ldots\rangle.$$
(12.127)

Sei ${\cal U}$ eine bijektive, isometrische Abbildung auf dem Hilbert-Raum, dann folgt

$$\langle Uy|Ux\rangle = \langle y|U^{\dagger}U|x\rangle = \langle y|x\rangle \tag{12.128}$$

Die erste Gleichung ist dabei eine identische Umformung und impliziert die Definition des adjungierten Operators zu U, die zweite Gleichung ist eine Bedingungsgleichung. Damit diese Bedingung für alle Vektoren $|x\rangle, |y\rangle$ erfüllt ist, muss gelten:

$$U^{\dagger}U = \mathbf{1} \tag{12.129}$$

Für diesen Schritt ist wichtig, dass U bijektiv ist. Daher können wir auch sagen, ein Operator heißt unitär, wenn gilt:

$$U^{\dagger} = U^{-1} \,, \tag{12.130}$$

wobei U^{-1} sowohl rechts- als auch linksinvers zu U sein soll.

Auch in unendlich-dimensionalen Vektorräumen gilt, dass ein unitärer Operator U mit seinem adjungierten Operator U^{\dagger} kommutiert und somit ein normaler Operator ist und sich als Funktion eines selbst-adjungierten Operators schreiben lässt:

$$U = e^{iA}$$
 (A selbst-adjungiert) (12.131)

Der adjungierte bzw. inverse Operator dazu ist

$$U^{\dagger} = e^{-iA} \,. \tag{12.132}$$

Die Eigenwerte eines unitären Operators erfüllen die Bedingung $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$ bzw. $\overline{\lambda}\lambda = 1$ und sind daher alle von der Form $\lambda = e^{i\alpha}$, wobei α eine reelle Zahl ist.

Eine besonders wichtige unitäre Transformation auf dem \mathcal{L}^2 ist die Fourier-Transformation (siehe Kapitel 13).

246

12.8.7 Eigenwerte und Spektrum eines Operators

Wir haben in Abschnitt 1.4 den Begriff des Eigenwerts definiert. Für endliche Matrizen sind die Eigenwerte diskret. Sie können zwar entartet sein, aber letztendlich bleibt die Menge der Eigenwerte eine diskrete Punktmenge.

Bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen und linearen Operatoren auf diesen Vektorräumen kann es vorkommen, dass die Gleichung

$$\mathcal{A}|x\rangle = \lambda|x\rangle \tag{12.133}$$

für manche Werte von λ keine wirklichen Lösungen $|x\rangle \in \mathcal{H}$ hat, allerdings liegen die Eigenräume "fast" in dem Vektorraum. Dieses "fast" wird in diesem und den folgenden Abschnitten etwas erläutert. Wir unterscheiden in unendlich-dimensionalen Vektorräumen zwischen Eigenwerten und dem sogenannten *Spektrum* eine Operators.

Um den Begriff des Spektrums exakter definieren zu können, überlegen wir uns zunächst, dass die Eigenwertgleichung (Gl. 12.133)

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{1})|x\rangle = 0 \tag{12.134}$$

impliziert, dass der Operator $(A - \lambda \mathbf{1})$ nicht invertiert werden kann. Diese Beobachtung kann man für Operatoren in einem unendlich-dimensionalen Banach-Raum verallgemeinern:

Definition: Das <u>Spektrum</u> eines Operators A besteht aus allen komplexen Zahlen λ , für die der Operator $(A - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ ein unbeschränkter Operator ist.

Der Begriff des Spektrums ist allgemeiner als der Begriff des Eigenwerts. Alle Eigenwerte liegen zwar im Spektrum eines Operators, aber sie bilden dort eine diskrete Punktmenge. Das Spektrum kann jedoch auch Elemente λ enthalten, die ein Kontinuum (z.B. ein Intervall) bilden. Zu diesem Teil des Spektrums gibt es zwar keine Eigenvektoren, die Elemente des Vektorraums sind, allerdings kann die Eigenwertgleichung "fast" erfüllt werden. Mit anderen Worten: Es gibt Eigenvektoren zu diesen Werten von λ , aber diese Eigenvektoren liegen nicht in dem Banach-Raum, z.B. weil sie nicht normierbar sind. Man bezeichnet diese Eigenvektoren auch schon mal als "uneigentliche Eigenvektoren", weil sie eben nur "fast" in dem Vektorraum liegen. Es gibt allerdings normierbare Elemente in dem Banach-Raum, die diesen Eigenvektoren "beliebig nahe" kommen. Auch dieses Konzept wird im Folgenden (Abschnitt 12.9) erläutert. Dabei beschränke ich mich auf Hilbert-Räume, obwohl viele Überlegungen allgemeiner für Banach-Räume gelten. Außerdem erläutere ich diese Konzepte anhand von zwei Beispielen: dem Operator "Multiplikation mit x" und dem Operator "Ableitung nach x".

Im Allgemeinen hat die Frage, ob ein Operator ein kontinuierliches Spektrum besitzt, nichts damit zu tun, ob dieser Operator unbeschränkt ist oder nicht. Es gibt unbeschränkte Operatoren mit diskreten Eigenwerten (beispielsweise der Operator N in Gl. 12.107), und es gibt beschränkte Operatoren, die keine Eigenwerte sondern nur ein Spektrum besitzen (beispielsweise die Multiplikation mit $1/(x^2 + a^2)$). Man kann beweisen, dass die diskreten Teile des Spektrums eines Operators auch gleichzeitig Eigenwerte sind (d.h. die zugehörigen Eigenvektoren sind Elemente des Hilbert-Raums), wohingegen ein kontinuierlicher Teil des Spektrums keine Eigenvektoren im Hilbert-Raum besitzt.

Mit etwas größerem Aufwand kann man auch zeigen, dass nicht nur die Eigenwerte, sondern auch das Spektrum von selbst-adjungierten Operatoren reell ist. Ähnliches gilt für die Orthogonalität von uneigentlichen Eigenvektoren (die keine wirklichen Eigenvektoren sind) zu verschiedenen Werten des Spektrums. Und auch die Spektraldarstellung (manchmal spricht man auch von Spektralzerlegung) lässt sich auf normale Operatoren mit einem kontinuierlichen Spektrum erweitern. Der Aufwand besteht darin, ein ,operatorwertiges Integrationsmaß' dP_{λ} zu definieren, mit dem gilt:

$$\mathcal{A} = \int \lambda \,\mathrm{d}P_{\lambda} \tag{12.135}$$

Dazu definiert man für den selbstadjungierten Operator \mathcal{A} zunächst den Projektionsoperator $P(\langle \lambda)$ als den Operator auf den Unterraum aller Vektoren $|x\rangle$, für die gilt $||\mathcal{A}|x\rangle|| < \lambda ||x\rangle||$. Man kann dann den Operator $\Delta P(\lambda) = P(\langle (\lambda + \Delta \lambda)) - P(\langle \lambda)$ betrachten. Dieser Operator ist wieder ein Projektionsoperator (dazu muss man sich überlegen, dass der Unterraum zu $P(\langle \lambda)$ in dem Unterraum zu $P(\langle (\lambda + \Delta \lambda))$ enthalten ist, das Produkt dieser beiden Projektionsoperatoren also immer gleich $P(\langle \lambda)$ ist). Nun kann man das Integral als Grenzwert im ,üblichen' Sinne definieren.

Auch in diesem Fall lassen sich Funktionen $f(\mathcal{A})$ definieren, sofern die Funktion f auf dem Spektrum von \mathcal{A} definiert ist:

Definition: Set \mathcal{A} ein normaler Operator mit Spektrum $\{\lambda\}$ und der Spektraldarstellung

$$\mathcal{A} = \sum_{i} \lambda_{i} P_{\lambda_{i}} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A} = \int \lambda \, \mathrm{d}P_{\lambda} \,, \tag{12.136}$$

so ist für eine Funktion f (auf dem Spektrum von A) die Funktion f(A) definiert durch

$$f(\mathcal{A}) = \sum_{i} f(\lambda_{i}) P_{\lambda_{i}} \quad \text{bzw.} \quad f(\mathcal{A}) = \int f(\lambda) \, \mathrm{d}P_{\lambda} \,. \tag{12.137}$$

Natürlich gibt es Operatoren, deren Spektrum sowohl diskrete Eigenwerte als auch einen (oder mehrere) kontinuierliche Anteile umfassen kann. In diesem Fall besteht die Spektraldarstellung aus einer Summe und einem Anteil, der dem Kontinuum entspricht und durch ein Integral gegeben ist.

12.8.8 Spurklasseoperatoren

Auch für Operatoren in einem unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum kann man eine Spur definieren.

Definition: Set $\{|e_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine (der Einfachheit halber orthonormale) Basis, so ist

$$\operatorname{Sp} A = \sum_{i} \langle e_i | A | e_i \rangle \tag{12.138}$$

die Spur des Operators A.

Falls die Spur existiert, hängt sie nicht von der gewählten Orthonormalbasis ab. Operatoren, für welche die Spur endlich ist, bezeichnet man als *Spurklasseoperatoren*.

In unendlich-dimensionalen Hilbert-Räumen muss die Spur eines linearen Operators nicht notwendigerweise existieren. Für unbeschränkte Operatoren existiert sie nie. Als Beispiel betrachte man den Operator N (Gl. 12.107). Aber auch für beschränkte Operatoren existiert die Spur nicht immer. Ein Beispiel ist der Identitätsoperator, dessen Spur gewöhnlich gleich der Dimension des jeweiligen Vektorraums ist.

Wenn Operatoren keine Spurklasseoperatoren sind, erhält man meist unsinnige Ergebnisse, wenn man trotzdem die Spur berechnet. Ein klassisches Beispiel sind die kanonischen Vertauschungsrelationen in der Quantenmechanik:

$$[Q, P] = QP - PQ = i\hbar\mathbf{1} \tag{12.139}$$

Die Spur des Identitätsoperators auf der rechten Seite ist offenbar unendlich, für die linke Seite hat man zunächst den Eindruck, als ob die Spur null ergibt: Die Spur der Summe zweiter Operatoren ist gleich der Summe der Einzelspuren und die Spur des Produkts der Operatoren hängt nicht von deren Reihenfolge ab. Damit erhielte man $0 = \infty$. Dieses unsinnige Ergebnis beruht darauf, dass keiner der Operatoren $(Q, P, \mathbf{1})$ ein Spurklasseoperator ist. Für Spurklasseoperatoren kann die obige Gleichung tatsächlich nie erfüllt werden. Daher gibt es auch keine (endlichen) Matrizen, welche die kanonischen Vertauschungsregeln erfüllen.

Eine Untermenge der Spurklasseoperatoren sind die Hilbert-Schmidt-Operatoren. Für sie ist

$$\operatorname{Sp}\left(A^{\dagger}A\right) < \infty \,. \tag{12.140}$$

Die Menge dieser Operatoren definiert sogar wieder einen Hilbert-Raum, indem man für das Skalarprodukt zweier Operatoren definiert:

$$(A,B) = \operatorname{Sp}(A^{\dagger}B) \tag{12.141}$$

12.9 *Der Orts- und Impulsoperator

Wie schon erwähnt, sind zwei wichtige Operatoren für die Quantentheorie der Operator Q = x(Multiplikation mit x, diesen Operator nennt man in der Quantentheorie den Ortsoperator) und der Operator $P = i \frac{\partial}{\partial x}$ (Ableitung nach x - der Grund für den Faktor i wird später deutlich). Diesen Operator bezeichnet man in der Quantentheorie als Impulsoperator, wobei in der Quantentheorie noch ein Faktor \hbar , die reduzierte Planck'sche Konstante, hinzukommt. Beide Operatoren sind unbeschränkt auf dem $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Im Folgenden geht es allerdings hauptsächlich darum, die "uneigentlichen" Eigenvektoren dieser Operatoren etwas genauer zu untersuchen.

12.9.1 Orts- und Impulsoperator sind unbeschränkt

Wir betrachten zunächst die Multiplikation einer Funktion mit x. Als Beispiel einer quadratintegrierbaren Funktion wählen wir

$$f(x) = \frac{1}{x + ia},$$
(12.142)

sodass

$$|f(x)|^2 = \frac{1}{x^2 + a^2} \tag{12.143}$$

und somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \left. \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a} \,. \tag{12.144}$$

Diese Funktion ist also Teil des Hilbert-Raums. Anwendung des Operators Q, Multiplikation mit x^4 führt jedoch auf

$$xf(x) = \frac{x}{x + ia}$$
 und somit $|xf(x)|^2 = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$. (12.145)

Diese Funktion ist offensichtlich nicht mehr quadratintegrierbar.

Der Ableitungsoperator ist ebenfalls unbeschränkt. Man betrachte als Beispiel die Funktion $|\sqrt{x}| \exp(-x^2)$. Auch für die beiden quadratintegrierbaren Funktionen aus Abschnitt 12.7.4 gilt, dass ihre Ableitungen nicht mehr quadratintegrierbar sind.

12.9.2 Das Spektrum von x und $-i\frac{\partial}{\partial x}$

Wie wir gesehen haben, sind sowohl die Multiplikation einer Funktion mit x als auch die Ableitung (multipliziert mit der imaginären Einheit i) lineare und selbst-adjungierte Operatoren für Funktionen.

Wir versuchen zunächst, mögliche Eigenwerte von x und $-i\frac{\partial}{\partial x}$ zu bestimmen. Dabei beginnen wir mit dem Ableitungsoperator, d.h., wir suchen Lösungen zu der Gleichung

$$-i\frac{\partial}{\partial x}f(x) = kf(x). \qquad (12.146)$$

Wir wissen, dass bei Gleichungen dieser Art ein Exponentialansatz zum Ziel führt und finden als Lösungen

f

$$\mathcal{C}_k(x) = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \,. \tag{12.147}$$

Die Lösungen sind also durch einen Parameter k charakterisiert, der gleichzeitig formal der Eigenwert von $-i\frac{\partial}{\partial x}$ wäre, falls $f_k(x)$ eine zulässige Lösung darstellte. Die Amplitude A ist eine Integrationskonstante und deutet an, dass beliebige Vielfache eines möglichen Eigenvektors ebenfalls Eigenvektoren sind.

Hier tritt jedoch ein Problem auf: Diese Funktionen $f_k(x)$ sind nicht quadratintegrabel. Für komplexe Werte von k mit einem nicht verschwindenden Imaginärteil steigen die Funktionen zumindest auf einer Seite (für x gegen plus oder minus unendlich) exponentiell an. Diese Funktionen sind noch nicht einmal näherungsweise quadratintegrabel. Für reelle Werte von k gilt $|f_k(x)|^2 = |A|^2$; das Integral über die gesamte reelle Achse ist daher unbeschränkt (außer für A = 0, wozu aber keine sinnvolle Lösung gehört). Trotzdem beziehen wir solche Funktionen in unsere Betrachtungen ein (die mathematische Begründung für diesen Schritt ist unter der Bezeichnung ,Gel'fand Tripel' oder ,rigged Hilbert space' bekannt und wird in Abschnitt 12.9.4 angedeutet). Das physikalische Argument lautet, dass man es ohnehin nie mit wirklich unendlich langen Wellenzügen zu tun hat und man eher von Wellenpaketen sprechen sollte; diese haben zwar keine mathematisch scharfe Wellenlänge (bzw. keine wohldefinierte Wellenzahl k), doch die Verteilung der zugehörigen Wellenzahlen lässt sich auf ein beliebig kleines Intervall beschränken. Ein weiterer Grund ist, dass das Produkt aus $f_k(x)$ mit einer quadratintegrablen Funktion integriert werden kann, was in diesem Fall auf die Fourier-Transformierte führt (auch dies wird in Abschnitt 12.9.4 näher erläutert).

Man spricht bei den Funktionen $f_k(x)$ (für reelle k) auch von *uneigentlichen Eigenfunktio*nen. Und statt von der Menge der Eigenwerte (deren Eigenfunktionen Elemente des Hilbert-Raums sein müssen) spricht man in diesem Fall vom *Spektrum*. Das Spektrum von $-i\frac{\partial}{\partial x}$ (sofern die Eigenfunktionen keinen weiteren Einschränkungen unterliegen) besteht somit aus allen reellen Zahlen $k \in \mathbb{R}$:

Spec
$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \{k|k \in \mathbb{R}\}$$
 (12.148)

Aus der Theorie der Fourier-Transformationen ist folgende Gleichung bekannt (vgl. auch Abschnitt 13):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(k-k')} dx = 2\pi\delta(k-k').$$
 (12.149)

Offensichtlich sind die uneigentlichen Eigenfunktionen zu verschiedenen Werten von k bezüglich des Skalarprodukts (Gl. 12.35) orthogonal. Ich werde im Folgenden die normierten komplexen Exponentialfunktionen

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{12.150}$$

mit dem Parameter k durch $\langle x|k\rangle$ kennzeichnen. Es wurde also gezeigt, dass

$$-i\frac{\partial}{\partial x}\langle x|k\rangle = k\langle x|k\rangle \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} dx \langle k'|x\rangle \langle x|k\rangle = \langle k'|k\rangle = \delta(k-k').$$
(12.151)

Da dieser Operator selbst-adjungiert ist hat er ein reelles Spektrum.

Wir betrachten nun den Operator , Multiplikation mit x^{\cdot} . Eine Eigenfunktion $f_{x_0}(x)$ zum Eigenwert x_0 sollte folgende Gleichung erfüllen:

$$xf_{x_0}(x) = x_0 f_{x_0}(x) \,. \tag{12.152}$$

Das bedeutet aber, dass diese Eigenfunktion für $x \neq x_0$ verschwinden muss. Die Funktion

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(12.153)

erfüllt zwar die Eigenwertgleichung, ihre Norm (bzgl. des Skalarprodukts Gl. 12.35) ist aber null und damit entspricht sie im Hilbert-Raum \mathcal{L}^2 dem Nullvektor.

Die Delta-Distribution $f_{x_0}(x) = \delta(x-x_0)$ hat fast alle gewünschten Eigenschaften. Der Träger ist auf den Punkt x_0 konzentriert und das Integral mit (stetigen) quadratintegrablen Funktionen definiert eine lineare Abbildung:

$$x\delta(x-x_0) = x_0\delta(x-x_0) \qquad \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0) \qquad (12.154)$$

Aber $\delta(x - x_0)$ ist ebenfalls nicht quadratintegrierbar. Somit besitzt auch der Multiplikationsoperator mit dem Argument x keine Eigenfunktionen im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, aber er besitzt uneigentliche Eigenfunktionen (streng genommen Distributionen) und sein Spektrum ist die gesamte reelle Achse:

$$\operatorname{Spec}(x) = \{x | x \in \mathbb{R}\}, \quad \text{uneigentliche ,Eigenfunktionen': } f_{x_0}(x) = \delta(x - x_0). \quad (12.155)$$

Formal schreibe ich im Folgenden für die Distribution $\delta(x - x_0)$ auch $\langle x | x_0 \rangle$ und wir haben gezeigt:

$$x\langle x|x_0\rangle = x_0\langle x|x_0\rangle$$
 und $\langle x_0|x_1\rangle = 0$ für $x_0 \neq x_1$. (12.156)

12.9.3 Die x- und k-Basis

Das Skalarprodukt auf dem \mathcal{L}^2 ist (vgl. Gl. 12.35):

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g(x) \,\mathrm{d}x \,. \tag{12.157}$$

Wir betrachten nun das Skalarprodukt von quadratintegrablen Funktionen mit den uneigentlichen Eigenfunktionen des Abschnitts 12.9.2.² Offenbar gilt:

$$\langle x|f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)f(y)\,\mathrm{d}y = f(x) \tag{12.158}$$

und
$$\langle k|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \tilde{f}(k).$$
 (12.159)

Hierbei ist \tilde{f} die Fourier-Transformierte der Funktion f.

Wir sollten Ausdrücke der Form $\langle x|f\rangle = f(x)$ ähnlich interpretieren wie beispielsweise bei diskreten Basisvektoren Ausdrücke der Form $\langle e_i|x\rangle = x_i$ (Gl. ??). Das Skalarprodukt eines Vektors $|f\rangle$ mit dem Vektor $|x\rangle$ (einer Eigenfunktion des Multiplikationsoperators mit x) ist vergleichbar mit der Projektion eines Vektors auf eine seiner Komponenten und besteht in diesem Fall in der Auswertung

 $^{^{2}}$ Streng genommen gelten diese Überlegungen nicht für alle Elemente des \mathcal{L}^{2} , sondern nur für eine dichte Teilmenge.

der Funktion an einer bestimmten Stelle x. Hier wird der Unterschied zwischen der Funktion selbst und dem Wert der Funktion an einer bestimmten Stelle besonders deutlich.

Interessant ist noch das Matrixelement $\langle x|k\rangle$, für das formal gilt:

$$\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x) e^{iky} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} . \qquad (12.160)$$

12.9.4 Das Gel'fand-Tripel

Wir hatten gesehen, dass die Lösungen zu den Eigenwertgleichungen zum Multiplikationsoperator mit x - dem Ortsoperator - und zum Ableitungsoperator - bis auf einen Faktor i dem Impulsoperator - keine Elemente des Hilbert-Raums sind. In einem gewissen Sinne sind sie aber "fast"— Elemente. Dieses "fast" soll nun etwas erläutert werden. Dabei handelt es sich eher um eine Skizze der Idee als um eine wirkliche Erläuterung.

In der Physik wird oft argumentiert, dass es sich bei "reinen Wellen" (also Wellen mit einer scharfen Wellenlänge) eigentlich um sogenannte Wellenpakete handelt, d.h. Funktionen, die zwar über eine im Vergleich zur Wellenlänge große Distanz eine konstante Wellenlänge haben, aber schließlich (für $|x| \rightarrow \infty$) doch gegen null gehen. Ähnlich argumentiert man bei den Eigenfunktionen zum Ortsoperator: Die zugehörigen Wellenpakete sind auf ein sehr kleines Volumen konzentriert.

Diese Wellenpakete sind Teil eines Unterraums $\Phi \subset \mathcal{L}^2$, der aus Testfunktionen besteht, z.B. dem schon definierten Schwarz-Raum (siehe Abschnitt 10.1.3). Diese Funktionen liegen dicht im \mathcal{L}^2 , und wenn man diesen Raum bezüglich der \mathcal{L}_2 -Norm vervollständigt, gelangt man wieder zum \mathcal{L}^2 . Der Dualraum Φ^* enthält aber auch das δ_y -Funktional sowie weitere Distributionen, die nicht in \mathcal{L}^{2*} liegen. Man kann zeigen, dass die "uneigentlichen Eigenfunktionen" Elemente von Φ^* sind. In diesem Sinne liegen sie "fast" im \mathcal{L}^2 . Das Tripel $(\Phi, \mathcal{L}^2, \Phi^*)$ bezeichnet man manchmal als Gel'fand-Tripel oder auch "rigged Hilbert space".
Kapitel 13

Fourier-Analyse und Fourier-Transformation

Fourier-Reihen wurden schon in Kap. 12 behandelt. Dieses Kapitel verallgemeinert die Konzepte auf nicht-periodische Funktionen und damit die Fourier-Transformationen. Ihren Ursprung hat die Theorie der Fourier-Transformationen zu Beginn des 19. Jahrhunderts, als der französische Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen zur Ausbreitung von Wärme die Behauptung aufstellte, man könne alle periodischen Funktionen nach Sinusund Kosinusfunktionen entwickeln. Für einige Funktionen waren solche Entwicklungen schon früher bekannt, einen allgemeinen Beweis für diese Behauptung (für Lipschitz-stetige Funktionen) fand man jedoch erst später.

Für komplex-wertige periodische Funktionen hatten wir das Skalarprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \overline{f(x)}g(x) \,\mathrm{d}x \tag{13.1}$$

definiert, womit wir (nach der entsprechenden Vervollständigung und Äquivalenzklassenbildung) den Hilbert-Raum $\mathcal{L}^2(S^1)$ erhalten. Ein Satz orthonormaler Basisfunktionen ist

$$|n\rangle \equiv e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$
 (13.2)

Damit erhalten wir die diskrete Fourier-Entwicklung einer komplexwertigen, stetigen, periodischen Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n = -\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right).$$
(13.3)

Die Koeffizienten $\{c_n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$ erhält man nach der Vorschrift:

$$c_n = \langle n|f \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{L}\right) f(x) \, \mathrm{d}x \,.$$
 (13.4)

13.1 Fourier-Transformation

Ob man schon die Entwicklung in Gl. 13.3 und ebenso die Rücktransformationen 13.4 als Fourier-Transformation bezeichnet, ist eine Frage der Definition. Oft versteht man unter der Fourier-Transformation die Erweiterung der komplexen Fourier-Reihenentwicklung auf beliebige (nicht periodische) Funktionen über der reellen Achse. Man erhält diese Darstellung, indem man den Grenzwert $L \to \infty$ betrachtet. Die "Periode" wird somit unendlich lang. Der folgende Abschnitt versucht diesen Gedankengang zu konkretisieren. In weiteren Abschnitten gehe ich dann auf die mathematischeren Aspekte der Fourier-Transformation ein.

13.1.1 Der Grenzwert $L \to \infty$

Wir definieren zunächst eine Variable

$$k_n = \frac{2\pi n}{L} \,. \tag{13.5}$$

Da $n \in \mathbb{Z}$, nimmt auch k_n (diskrete) Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an. Allerdings ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Werten nun

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L} \,. \tag{13.6}$$

Dieser Abstand wird also mit wachsendem L immer kleiner.

Nun schreiben wir für Gl. 13.3:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(k_n) \exp(ik_n x), \qquad (13.7)$$

wobei wir einfach $c(k_n) \equiv c_n$ definiert haben, d.h., wir interpretieren die Koeffizienten als eine Funktion von k_n .

Für diese Koeffizienten gilt nun:

$$c(k_n) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp(-\mathrm{i}k_n x) f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$
(13.8)

Es zeigt sich (wegen des Faktors $1/\sqrt{L}$ und weil die Funktion f(x) für $x \to \pm \infty$ gegen 0 gehen muss, damit das Integral definiert ist; vgl. Abschnitt 12), dass die Koeffizienten $c(k_n)$ für sehr große Werte von L kleiner werden, sodass wir eine neue Funktion definieren:

$$\hat{f}(k_n) := \sqrt{\frac{L}{2\pi}} c(k_n) , \qquad (13.9)$$

wobei der Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ reine Konvention ist (dadurch werden die Formeln am Ende symmetrischer). Mit dieser Funktion wird aus Gleichung 13.7:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_n) \exp(ik_n x) \Delta k.$$
(13.10)

Im Grenzfall $L \to \infty$ entspricht die rechte Seite der Definition des gewöhnlichen Integrals und wir erhalten:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx) \, \mathrm{d}k \,.$$
(13.11)

Andererseits wird aus Gleichung 13.8:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x) \, dx \,.$$
 (13.12)

Diese Gleichungen bezeichnet man als Fourier-Transformation. Die Funktion $\hat{f}(k)$ ist die Fourier-Transformierte der Funktion f(x) und Gl. 13.11 nennt man die Fourier-Darstellung oder auch Fourier-Analyse der Funktion f(x). Bezieht sich in der Physik der Parameter x auf eine Raumkoordinate, dann beschreibt die Funktion $\exp(ikx)$ eine Welle mit der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und λ ist die zugehörige Wellenlänge, also die Länge der Periode dieser Welle. Die Fourier-Darstellung ist eine Zerlegung einer beliebigen Funktion nach reinen harmonischen Wellen, und die Fourier-Transformierte $\hat{f}(k)$ gibt die Amplitude an, mit der eine Welle mit Wellenzahl k in dieser Zerlegung vertreten ist.

Bezieht sich der Parameter x auf die Zeit (in diesem Fall wählt man statt x meist den Buchstaben t), spricht man bei f(t) von einer Zeitreihe. Statt k schreibt man in diesem Fall $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und bezeichnet die Periode mit T. ω ist nun die Winkelfrequenz. Man kann sich die Fourier-Darstellung eines akustischen Signals f(t) als eine Zerlegung nach reinen Tönen mit der Winkelfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ vorstellen - $\nu = 1/T$ ist die zugehörige Frequenz - und entsprechend die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ als die Amplitude, mit der eine bestimmte reine Winkelfrequenz ω in einem Signal vertreten ist.

13.1.2 Fourier-Transformation für Testfunktionen in \mathscr{S}

Das Fourier-Integral (Gl. 13.12) existiert im üblichen (z.B. Riemann'schen) Sinne nur für Funktionen in \mathcal{L}^1 (siehe Gl. 12.15):

$$f \in \mathcal{L}^1 \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$$
 (13.13)

Allerdings ist die Fourier-Transformierte einer \mathcal{L}^1 -Funktion,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) \, \mathrm{d}x \,,$$
 (13.14)

nicht notwendigerweise wieder ein Element von \mathcal{L}^1 . Man kann lediglich zeigen, dass $\hat{f}(k)$ eine stetige Funktion ist und dass $\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$ (dies bezeichnet man als den Satz von Riemann-Lebesgue). Dieser Grenzwert kann jedoch so langsam angenommen werden, dass $\hat{f}(k)$ nicht über die gesamte reelle Achse integriert werden kann. Das bedeutet, auf dem Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ existiert zwar die Fourier-Transformation einer Funktion f(x), es ist aber nicht garantiert, dass (im Sinne eines Riemann- oder Lebesgue-Integrals) auch die Umkehrtransformation existiert.

Ein möglicher Zugang (der z.B. in [Reed-Simon 1975]) gewählt wird) definiert die Fourier-Transformation zunächst auf dem Raum der Testfunktionen \mathscr{S} . Hier existieren alle Integrale im üblichen Sinn. Außerdem ist die Fourier-Transformierte einer Testfunktion aus \mathscr{S} wieder eine Testfunktion aus \mathscr{S} (da die Fourier-Transformation "Ableitung nach x" und "Multiplikation mit x" austauscht, siehe Gl. 13.21 und 13.22, und somit das definierende Kriterium einer Funktion aus \mathscr{S} erhalten bleibt). Damit ist die Fourier-Transformation auf diesem Raum umkehrbar und ein Vektorraum-Automorphismus. Anschließend erweitert man die Definition der Fourier-Transformation auf den Dualraum der temperierten Distributionen \mathscr{S}' . Auf diese Weise ist die Fourier-Transformation zumindest im distributiven Sinne auch auf Funktionen definiert, die nicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ liegen, und sogar für Distributionen (z.B. die Fourier-Transformation der δ -Funktion).

Für $f \in \mathscr{S}$ definieren wir die beiden Fourier-Transformationen:

$$\mathscr{F}_{-}[f](k) \equiv \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \qquad (13.15)$$

und
$$\mathscr{F}_{+}[f](k) \equiv \check{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$
 (13.16)

Oftmals findet man die Darstellung:

und

$$\mathscr{F}_{-}[f](k) \equiv \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) \,\mathrm{d}x \tag{13.17}$$

$$\mathscr{F}_{+}[f](x) \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \widehat{f}(k) \,\mathrm{d}k \,. \tag{13.18}$$

Man beachte jedoch, dass sich die beiden Fourier-Transformationen lediglich im Vorzeichen im Exponenten unterscheiden. Die Integrationsvariablen x und k sind austauschbare Parameter. Die zweite Darstellung betont lediglich, dass \mathscr{F}_+ die inverse Transformation zu \mathscr{F}_- ist (s.u.). Im Allgemeinen bezeichnet man \mathscr{F}_- als Fourier-Transformation und \mathscr{F}_+ als inverse Fourier-Transformation.

Die Fourier-Transformationen sind stetige lineare Abbildungen, d.h.

$$\lim_{i \to \infty} f_i = f \implies \lim_{i \to \infty} \mathscr{F}_{\pm}[f_i] = \mathscr{F}_{\pm}[f].$$
(13.19)

Es gilt:

$$\mathscr{F}_{-}[\mathscr{F}_{+}[f]] = f$$
 und $\mathscr{F}_{+}[\mathscr{F}_{-}[f]] = f$. (13.20)

Die beiden Transformationen sind also Umkehrabbildungen voneinander. Der Beweis (siehe z.B. [Reed-Simon 1975]) verwendet im Wesentlichen Gleichung 12.55. Weitere Identitäten sind:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(-i \frac{d}{dx} f(x) \right) dx = k \hat{f}(k)$$
(13.21)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} x f(x) dx = i \frac{d}{dk} \hat{f}(k)$$
(13.22)

bzw.

$$\mathscr{F}_{-}[xf](k) = i\mathscr{F}_{-}[f]'(k) \quad \text{und} \quad \mathscr{F}_{-}[-if'](k) = k\mathscr{F}_{-}[f](k) \,. \tag{13.23}$$

Entsprechende Relationen mit umgekehrten Vorzeichen gelten für \mathscr{F}_+ . Diese Identitäten sind gemeint wenn man sagt, dass die Fourier-Transformation Ableitung und "Multiplikation mit x" vertauscht.

Für $f, g \in \mathscr{S}$ ist die Faltung [convolution] definiert durch

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) \,\mathrm{d}y \,.$$
(13.24)

Unter einer Fourier-Transformation gilt:

$$\mathscr{F}_{-}[f * g](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x \tag{13.25}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x-y) \, \mathrm{d}x \right) g(y) \, \mathrm{d}y \tag{13.26}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x+y)} f(x) \, \mathrm{d}x \right) g(y) \, \mathrm{d}y \tag{13.27}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) \, \mathrm{d}x \right) g(y) \, \mathrm{d}y \tag{13.28}$$

$$= \sqrt{2\pi} \hat{f}(k)\hat{g}(k) \tag{13.29}$$

oder

$$\mathscr{F}_{-}[f * g] = \sqrt{2\pi} \, \mathscr{F}_{-}[f] \cdot \mathscr{F}_{-}[g] \,. \tag{13.30}$$

Unter einer Fourier-Transformation geht somit eine Faltung in ein gewöhnliches Produkt über (und umgekehrt). Für \mathscr{F}_+ gilt die entsprechende Relation.

Eines der Ziele ist, die Fourier-Transformation auf Distributionen zu verallgemeinern. Dazu untersuchen wir zunächst wie die Fourier-Transformierte einer Testfunktion im Sinne einer Distribution auf eine andere Testfunktion wirkt (alle Funktionen immer noch aus \mathscr{S}):

$$\langle \mathscr{F}_{-}[f], g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) \, \mathrm{d}x \right) g(k) \, \mathrm{d}k \tag{13.31}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} g(k) dk \right) dx = \langle f, \mathscr{F}_{-}[g] \rangle.$$
(13.32)

Man beachte, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Wirkung einer Distribution auf eine Testfunktion beschreibt: Die Integraldarstellung ist nicht identisch zum \mathcal{L}^2 -Skalarprodukt - es fehlt die komplexe Konjugation im ersten Argument. Trotzdem lassen sich diese Relationen mit entsprechenden Abänderungen auf das Skalarprodukt übertragen.

Diese Relation verwenden wir nun, um die Fourier-Transformation einer Distribution zu definieren. Sei ω eine Distribution aus \mathscr{S}' , dann definieren wir die Fourier-Transformation von ω durch

$$\langle \mathscr{F}_{\pm}[\omega], f \rangle = \langle \omega, \mathscr{F}_{\pm}[f] \rangle.$$
(13.33)

Da mit $f \in \mathscr{S}$ auch $\mathscr{F}_{\pm}[f] \in \mathscr{S}$, ist die rechte Seite dieser Gleichung wohl definiert und damit auch $\mathscr{F}_{\pm}[\omega]$ als Distribution.

Betrachten wir als Beispiel die Fourier-Transformierte der δ -Distribution:

$$\langle \mathscr{F}_{-}[\delta_{x_{0}}], f \rangle = \langle \delta_{x_{0}}, \mathscr{F}_{-}[f] \rangle$$
(13.34)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(k) dk \right) dx$$
(13.35)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \mathscr{F}_{-}[f](x) \mathrm{d}x \qquad (13.36)$$

$$= \mathscr{F}_{-}[f](x_0) \tag{13.37}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_0} f(k) \, \mathrm{d}k$$
 (13.38)

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}, f \right\rangle.$$
(13.39)

Dieses Ergebnis rechtfertigt die "sloppy" Gleichung für die Fourier-Transformation der δ -Distribution:

$$\mathscr{F}_{-}[\delta_{x_{0}}](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \delta(x - x_{0}) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_{0}} \,. \tag{13.40}$$

Zum Abschluss soll noch eine Gleichung angegeben werden, die implizit in dem Beweis, dass \mathscr{F}_{-} und \mathscr{F}_{+} inverse Transformationen sind, gezeigt wurde. Die Identität

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} f(y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} \mathrm{d}k \right) f(y) \, \mathrm{d}y \quad (13.41)$$

rechtfertigt im distributiven Sinne die Gleichung

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk.$$
 (13.42)

13.1.3 Verallgemeinerung auf den \mathbb{R}^n

Nahezu sämtliche Gleichungen in diesem Abschnitt lassen sich auf den \mathbb{R}^n übertragen. Die Fourier-Transformationen sind:

$$\mathscr{F}_{\pm}[f](\boldsymbol{k}) \equiv \check{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) d^n x \,.$$
(13.43)

Die Beziehung zwischen der "Multiplikation mit x_i " und der "Ableitung nach x_i " gelten entsprechend:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left(-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} f(\boldsymbol{x}) \right) \mathrm{d}^n x = k_i \hat{f}(\boldsymbol{k})$$
(13.44)

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} x_i f(\boldsymbol{x}) d^n x = i \frac{d}{dk_i} \hat{f}(\boldsymbol{k}), \qquad (13.45)$$

ebenso die Beziehung für die Faltung:

$$\mathscr{F}_{-}[f * g](\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}^n y \right) \,\mathrm{d}^n x = (2\pi)^{n/2} \,\hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k}) \tag{13.46}$$

Für die Fourier-Transformation der δ -Distribution gilt:

$$\mathscr{F}_{-}[\delta_{\boldsymbol{x}_{0}}](\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{0}) d^{n}x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_{0}}.$$
 (13.47)

Und für die Darstellung der δ -Distribution erhalten wir:

$$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})} d^n k .$$
(13.48)

13.1.4 Fourier-Transformation auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Über den Umweg der Testfunktionen \mathscr{S} , die dicht im $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ liegen, können wir nun die Fourier-Transformation auf dem $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ betrachten. Für Funktionen, die auch in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ liegen, ist die Fourier-Transformation als (z.B. Riemann'sches) Integral definiert. Für Elemente des $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, die nicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ liegen, können wir die Fourier-Transformation zumindest im distributiven Sinn definieren: Sämliche Elemente des $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ liegen ja auch in \mathscr{S}' und für diese Elemente haben wir im letzten Abschnitt eine Definition der Fourier-Transformation gefunden.

Es gibt aber auch einen direkteren Weg, die Fourier-Transformation auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (bzw. \mathbb{R}^n) zu definieren, die mit den anderen Definitionen übereinstimmt. Da $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ dicht in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ liegt, können wir Fourier-Transformationen im $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ als Grenzwerte von Fourier-Transformationen integrabler Funktionen definieren. Eine Möglichkeit ist, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ -Funktionen im Unendlichen abzuschneiden, also beispielsweise die Fourier-Transformation von $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ durch

$$\mathscr{F}_{\pm}[f](k) = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} e^{\pm ikx} f(x) \,\mathrm{d}x \tag{13.49}$$

zu definieren. Der Grenzwert ist hier im Sinne der \mathcal{L}_2 -Norm zu verstehen. Insbesondere ist der Grenzwert nicht punktweise (es könnte sein, dass z.B. für k = 0 der punktweise Grenzwert nicht existiert). Aber ohnehin handelt es sich bei den Elementen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ um Äquivalenzklassen von Funktionen, die nicht punktweise definiert sind.

Die Verallgemeinerung von Gl. 13.49 auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ist:

$$\mathscr{F}_{\pm}[f](\boldsymbol{k}) = \lim_{R \to \infty} \int_{|\boldsymbol{x}| < R} e^{\pm i \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) d^{n} x \,.$$
(13.50)

Manchmal betrachtet man auch Integrale über einen Würfel:

$$\mathscr{F}_{\pm}[f](\boldsymbol{k}) = \lim_{R \to \infty} \int_{|x_i| < R} e^{\pm i \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) d^n x \,.$$
(13.51)

Wichtig ist jedoch, dass bei diesen Integralen die Grenzen "gleichförmig" gegen unendlich gehen. Das Volumenintegral im Sinne von $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (...) dx_2 \right) dx_1$ muss nicht existieren. (Hier gilt also der Satz von Fubini nicht; vgl. Abschnitt 7.1.5.)

Viele Bücher definieren daher die Fourier-Transformation direkt auf dem Raum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Wegen der *Identität von Parseval* (benannt nach dem französischen Mathematiker Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836)) für periodische Funktionen (siehe Gl. 12.27),

$$||f||^{2} = \int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^{2} dx = \sum_{n} |c_{n}|^{2}, \qquad (13.52)$$

bezeichnet man auch oft die Identität

$$||f||^{2} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\check{f}(k)|^{2} dk = ||\mathscr{F}_{\pm}[f]||^{2}$$
(13.53)

als Parseval'sche Indentität, allerdings sollte man hier eher von der *Plancherel-Identität* sprechen (nach Michel Plancherel, 1885–1967). Unter den genannten Bedingungen gilt auch die Verallgemeinerung:

$$\langle g|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(k)}\hat{f}(k)\,\mathrm{d}k = \langle \hat{g}|\hat{f}\rangle\,. \tag{13.54}$$

Beweis: Direktes Nachrechnen (unter der Annahme, dass alle Integrale existieren und die Vertauschungen erlaubt sind, was für Testfunktionen immer der Fall ist und im distributiven Sinne ebenfalls gilt):

$$\langle g|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}f(x) \,\mathrm{d}x$$
 (13.55)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \overline{\hat{g}(k)} dk \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik'x} \hat{f}(k') dk' \right) dx$$
(13.56)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k'-k)x} dx\right) \overline{\hat{g}(k)} \hat{f}(k') dk dk'$$
(13.57)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k') \overline{\hat{g}(k)} \hat{f}(k') \, \mathrm{d}k \mathrm{d}k'$$
(13.58)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(k)} \hat{f}(k) \, \mathrm{d}k = \langle \hat{g} | \hat{f} \rangle \,. \tag{13.59}$$

Aus diesen Identitäten folgt, dass Elemente aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ wieder auf Elemente aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ abgebildet werden, die Fourier-Transformation also bijektiv ist. Außerdem ist sie *isometrisch*, d.h. sie erhält das Skalarprodukt. Damit ist die Fourier-Transformation eine *unitäre Transformation* auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

13.2 Anwendungen

Im Folgenden betrachten wir einige Beispiele für die Anwendung von Fourier-Transformationen. Insbesondere bei linearen Differentialoperatoren bieten sich Fourier-Transformationen an, um die Lösung einer Differentialgleichung auf die Lösung einer algebraischen Gleichung (und ein Integral) zu reduzieren.

13.2.1 Die Diffusionsgleichung

Ihren historischen Anfang hatte die Fourier-Transformation im Zusammenhang mit der Wärmeleitung. Dabei geht es um Lösungen der Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\boldsymbol{x},t) = \lambda \Delta_x u(\boldsymbol{x},t) \,. \tag{13.60}$$

Hierbei ist λ der Diffusionskoeffizient, der in einem homogenen Medium als konstant angenommen werden kann.

Bei dieser (und vielen ähnlichen) Gleichungen kann man für $u(\boldsymbol{x},t)$ bezüglich der Variablen \boldsymbol{x} eine Fourier-Darstellung ansetzen:

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \hat{u}(\boldsymbol{k},t) d^n k \,.$$
(13.61)

Da Ableitungen unter Fourier-Transformation in die Multiplikation übergehen (Gl. 13.21 und 13.22),

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\boldsymbol{x}, t) \quad \to \quad -k_i^2 \hat{u}(\boldsymbol{k}, t) , \qquad (13.62)$$

folgt für $\hat{u}(\boldsymbol{k},t)$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\boldsymbol{k},t) = -\lambda \boldsymbol{k}^2 \hat{u}(\boldsymbol{k},t)$$
(13.63)

mit der Lösung

$$\hat{u}(\boldsymbol{k},t) = \hat{u}(\boldsymbol{k},t=0) \exp\left(-\lambda \boldsymbol{k}^2 t\right) .$$
(13.64)

 $\hat{u}(\boldsymbol{k}, t = 0)$ ist die Fourier-Transformierte der Anfangsverteilung für die Substanz, deren Diffusion durch die Diffusionsgleichung beschrieben werden soll.

Betrachten wir zunächst die Anfangsbedingung $u(\boldsymbol{x}, t = 0) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$; die Substanz ist also "punktförmig" am Punkte \boldsymbol{y} konzentriert. Aus Gl. 13.48 folgt

$$\mathscr{F}_{-}[\delta_{\boldsymbol{y}}](\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}$$
(13.65)

und damit

$$\hat{u}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y} - \lambda\boldsymbol{k}^2 t\right) \,. \tag{13.66}$$

Die gesuchte Lösung $u(\boldsymbol{x}, t)$ erhalten wir durch eine Rücktransformation:

$$u_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \lambda \boldsymbol{k}^2 t\right) \mathrm{d}^n k \,. \tag{13.67}$$

Mit einer quadratischen Ergänzung im Exponenten

$$-\lambda \boldsymbol{k}^{2} t + i \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = -\left(\sqrt{\lambda t} \boldsymbol{k} - \frac{i}{2\sqrt{\lambda t}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right)^{2} - \frac{1}{4\lambda t} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^{2}$$
(13.68)

und einem Variablenwechsel

$$k_i \to z_i = \sqrt{\lambda t} k_i - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{\lambda t}} (x_i - y_i) \qquad \mathrm{d}^n k \to \frac{1}{(\lambda t)^{n/2}} \mathrm{d}^n z$$
(13.69)

sowie dem Gauß-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
(13.70)

folgt:

$$u_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\lambda t}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2\right).$$
(13.71)

Diese Funktion haben wir in Kapitel 11.5.3 schon verwendet.

Die Verschiebung des Integrationswegs von der reellen Achse zu einer Achse parallel dazu mit einem Imaginärteil ist nach dem Residuensatz erlaubt, sofern keine Polstelle in dem Verschiebungsbereich liegt.

Ist die Anfangsverteilung $u(\boldsymbol{x}, t = 0) = u_0(\boldsymbol{x})$ keine δ -Funktion, erhält man die Lösung durch ein Faltungsintegral. Da

$$u_0(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) u_0(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n y , \qquad (13.72)$$

folgt allgemein:

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{4\lambda t}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2\right) u_0(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n y \,. \tag{13.73}$$

13.2.2 Poisson-Gleichung

Die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) \tag{13.74}$$

löst man üblicherweise mit der Green'schen Funktion (siehe Abschnitt 11.5):

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \rho(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}^d y \,, \tag{13.75}$$

wobei die Green'sche Funktion eine Lösung der Gleichung

$$\Delta_x G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{13.76}$$

ist. In Abschnitt 11.5 hatten wir die Green'sche Funktion zum Laplace-Operator aus physikalischen Überlegungen geraten. Mithilfe der Fourier-Transformation kann man diese Funktion auch herleiten.

Werden sowohl die Green'sche Funktion als auch die δ -Distribution (Gl. 13.48) als Fourier-Transformierte dargestellt,

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \hat{G}(\boldsymbol{k}) d^n k , \qquad (13.77)$$

erhalten wir aus Gl. 13.76 die Gleichung

$$-\boldsymbol{k}^{2}\hat{G}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$$
(13.78)

 oder

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\mathbf{k}^2} \,. \tag{13.79}$$

Damit folgt für die Green'sche Funktion zum Laplace-Operator:

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}}{\boldsymbol{k}^2} \,\mathrm{d}^n k \,.$$
(13.80)

Für dieses Integral betrachten wir die drei Fälle n = 3, n = 1 und n = 2 getrennt. Die Fälle n > 3 sind ähnlich wie n = 3. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\boldsymbol{y} = 0$.

Der Fall n = 3

Die Singularität bei k = 0 spielt keine Rolle, da das Maß (z.B. in Kugelkoordinaten) diese Singularität aufhebt. Das Integral divergiert aber für $|k| \rightarrow \infty$, sodass wir die Definition aus Gl. 13.50 wählen:

$$G(\boldsymbol{x}) = \lim_{\Lambda \to \infty} -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\boldsymbol{k}| < \Lambda} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}|\cos\theta}}{k^2} k^2 \mathrm{d}\boldsymbol{k}\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \,. \tag{13.81}$$

Mit

$$\int_{0}^{\pi} e^{ik|\boldsymbol{x}|\cos\theta} \sin\theta d\theta = \int_{-1}^{1} e^{ik|\boldsymbol{x}|\cos\theta} d\cos\theta = -\frac{i}{k|\boldsymbol{x}|} \left(e^{ik|\boldsymbol{x}|} - e^{-ik|\boldsymbol{x}|} \right) = \frac{2}{k|\boldsymbol{x}|} \sin k|\boldsymbol{x}|$$
(13.82)

folgt

$$G(\boldsymbol{x}) = \lim_{\Lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \int_0^{\Lambda} \frac{1}{k} \sin(k|\boldsymbol{x}|) \,\mathrm{d}k \,.$$
(13.83)

Mit dem Integral (siehe Anhang A1.2.1)

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \int_0^\Lambda \frac{\sin(k|\boldsymbol{x}|)}{k} \mathrm{d}k = \frac{\pi}{2}$$
(13.84)

erhalten wir schließlich:

$$G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \,. \tag{13.85}$$

Der Fall n = 1

Zu lösen ist:

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2} \,\mathrm{d}k \,.$$
(13.86)

Nun gibt das Integral einen divergenten Beitrag bei k = 0, nicht jedoch für $|k| \to \infty$. Dieser Beitrag lässt sich auch durch das verallgemeinerte Integral (Gl. 13.49) nicht beheben. Hier kommt etwas ins Spiel, das man *Regularisieren* nennt. Gesucht ist ja eine Funktion G(x), die Lösung der Gleichung $G''(x) = \delta(x)$ ist. Wie schon mehrfach erwähnt, haben wir immer die Freiheit, eine Lösung der homogenen Gleichung, also f''(x) = 0, zu addieren. In diesem Fall können wir also eine Konstante und einen Term proportional zu x addieren, d.h. die allgemeinste Lösung hat die Form

$$G(x) = G_s(x) + \alpha + \beta x, \qquad (13.87)$$

wobei $G_s(x)$ eine spezielle Lösung von G''(x) = 0 ist. Meist führt man bei der Regularisierung zunächst einen Parameter ϵ ein, sodass für $\epsilon > 0$ die Integrale wohl definiert sind, für $\epsilon \to 0$ aber formal der singuläre Ausdruck wieder auftritt. Wir können hier die Regularisierung

$$G_{\epsilon}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k^2 + \epsilon^2} \mathrm{d}k$$
(13.88)

wählen. Dieses Integral wurde schon berechnet (Gl. 9.127) und das Ergebnis ist

$$G_{\epsilon}(x) = -\frac{1}{2\epsilon} e^{-\epsilon|x|} \,. \tag{13.89}$$

Für kleine Werte von ϵ gilt

$$G_{\epsilon}(x) = -\frac{1}{2\epsilon} (1 - \epsilon |x| + O(\epsilon^2))$$
(13.90)

Wir wählen nun die freie Konstante α in Gl. 13.87 so, dass der Grenzwert $\epsilon \to 0$ definiert ist, also

$$\alpha_{\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon} + \alpha' \,, \tag{13.91}$$

wobei α' eine beliebige (endliche) Konstante ist. Nun gilt:

$$G(x) = \lim_{\epsilon \to 0} (G_{\epsilon} + \alpha_{\epsilon} + \beta x) = \frac{1}{2} |x| + \alpha' + \beta x.$$
(13.92)

Das stimmt mit dem Ergebnis aus Abschnitt 11.5.1, Gl. 11.52, überein.

Der Fall n = 2

Für $n \neq 2$ (selbst für "nicht ganzzahlige Dimensionen") hätte man die Abhängigkeit von $G(\boldsymbol{x})$ schon aus Dimensionsüberlegungen erraten können. Das Integral hat die Dimension $[k]^{n-2}$, und da $[\boldsymbol{x}] = 1/[k]$ (wobei die eckigen Klammern die Dimension angeben) muss $G(\boldsymbol{x})$ von der Form $G(\boldsymbol{x}) \propto |\boldsymbol{x}|^{2-n}$ sein. Für n = 2 lässt sich diese Überlegung nicht anwenden. Da \boldsymbol{x} andererseits die einzige dimensionsbehaftete Größe ist, müsste $|\boldsymbol{x}|^0$ die Lösung sein, was jedoch offensichtlich keine Lösung der Differentialgleichung ist. In diesem Fall muss man nicht nur regularisieren (also z.B. das Integral sowohl in der Umgebung von $\boldsymbol{k} = 0$ als auch im Unendlichen abschneiden), sondern durch die Regularisierung kommt ein weiterer dimensionsbehafteter Parameter ins Spiel, der auch nicht verschwindet (man sagt auch "die Symmetrie der Skaleninvarianz wird durch die Regularisierung gebrochen"). Auf diesen Punkt wurde schon in Kapitel 11.5.1 aufmerksam gemacht. Mit dem Regularisierungsparameter ϵ ist die Lösung

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \epsilon |\boldsymbol{x}|.$$
(13.93)

262

13.2.3 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Auch die Green'sche Funktion zum gedämpften harmonischen Oszillator haben wir bisher aus physikalischen Überlegungen geraten (Abschnitt 11.4). Nun wählen wir die Fourier-Darstellung der Green'schen Funktion:

$$G(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} \hat{G}(\omega) d\omega.$$
(13.94)

Damit lautet die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) G(t - t') = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t - t')} \hat{G}(\omega) \,\mathrm{d}\omega \quad (13.95)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) e^{i\omega(t-t')} \hat{G}(\omega) d\omega \qquad (13.96)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')} \,\mathrm{d}\omega \,. \tag{13.97}$$

Vergleich der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2)}$$
(13.98)

und damit

$$G(t-t') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}}{(\omega^2 - 2\gamma\mathrm{i}\omega - \omega_0^2)} \,\mathrm{d}\omega \,. \tag{13.99}$$

Dies ist ein Beispiel für ein Integral, das man nach dem Residuensatz lösen kann. Die beiden Polstellen von $G(\omega)$ sowie die zugehörigen Residuen sind

$$\omega_{1/2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \text{Res}_{1/2} = \mp \frac{e^{(-\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})(t-t')}}{4\pi\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \,. \tag{13.100}$$

Streng genommen müssen wir wieder die Fälle $\omega_0^2 > \gamma^2$, $\omega_0^2 = \gamma^2$ und $\omega_0^2 < \gamma^2$ unterscheiden; ich beschränke mich auf den ersten Fall. Beide Polstellen befinden sich in der oberen komplexen Halbebene, tragen also nur dann bei, wenn der Weg oberhalb geschlossen werden muss, also für (t - t') > 0. Für (t - t') < 0 gibt es keine Polstellen und das Integral verschwindet. Wir erhalten also nach dem Residuensatz:

$$G(t-t') = \begin{cases} 2\pi i(\operatorname{Res}_{1} + \operatorname{Res}_{2}) = e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin\sqrt{\omega_{0}^{2} - \gamma^{2}}(t-t')}{\sqrt{\omega_{0}^{2} - \gamma^{2}}} & \text{für } t-t' > 0\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(13.101)

Dies entspricht auch der Lösung aus Kapitel 11.4. Die Fourier-Transformation hat uns also nur die quadratintegrierbare Lösung der retardierten Green'schen Funktion geliefert.

13.2.4 Der ungedämpfte Oszillator

Der ungedämpfte Oszillator ist "zeitumkehrinvariant", das bedeutet beispielsweise, dass eine Filmaufnahme einer Schwingung, rückwärts abgespielt, ebenfalls eine Lösung der Bewegungsgleichungen zeigt. Wir hatten in Kapitel 11.4 gesehen, dass kein mathematisches Argument z.B. zwischen der retardierten und der avancierten Green'schen Funktion unterscheidet. Wie äußert sich das in der Fourier-Darstellung der Green'schen Funktion?

Für den ungedämpften Fall wird aus den Gleichungen 13.98 und 13.99:

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \qquad G(t - t') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t - t')}}{(\omega^2 - \omega_0^2)} d\omega.$$
(13.102)

Die Polstellen des Integranden liegen nun auf der reellen Achse: $\omega_{1/2} = \pm \omega_0$. Damit erhebt sich die Frage, wie man über die Polstellen integrieren soll. Eine Möglichkeit besteht darin, einen Dämpfungsfaktor ϵ einzuführen, der dieselbe Wirkung hat wie γ im vorherigen Abschnitt. Man verschiebt dadurch die beiden Polstellen in die obere Halbebene, was für kleine ϵ dasselbe bedeutet, wie ein Integrationsweg unten um die reellen Polstellen herum (siehe Abbildung 13.1 (oben)).

$$G(t-t') = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{G}_{\epsilon}(\omega) d\omega \quad \text{mit} \quad \hat{G}_{\epsilon}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega - i\epsilon)^2 - \omega_0^2}.$$
 (13.103)

(Die Polstellen sind nun bei $\omega_{1/2} = \pm \omega_0 + i\epsilon$.) Das Ergebnis ist die retardierte Green'sche Funktion:

$$G_{\rm ret}(t-t') = \begin{cases} \frac{\sin \omega_0(t-t')}{\omega_0} & \text{für } t-t' > 0\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(13.104)

Man kann aber auch einen Dämpfungsfaktor mit umgekehrtem Vorzeichen einführen (dies hat dieselbe Wirkung, wie eine Umkehrung der Zeitrichtung) und erhält die avancierte Green'sche Funktion, da nun die beiden Polstellen auf der unteren komplexen Halbebene liegen (Abb. 13.1 (mitte)):

$$\hat{G}_{\epsilon}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega + i\epsilon)^2 - \omega_0^2} \implies G_{av}(t - t') = \begin{cases} 0 & t - t' > 0 \\ -\frac{\sin \omega_0(t - t')}{\omega_0} & \text{für } (t - t') < 0 \end{cases}$$
(13.105)



Abbildung 13.1: Der Integrationsweg kann die Polstellen bei $\omega = \pm \omega_0$ auf verschiedene Weisen umgehen. Umgeht man die Polstellen in der unteren Halbebene (oben) hat dies dieselbe Wirkung wie ein positiver Dämpfungsfaktor und man erhält die retardierte Green'sche Funktion. Umgeht man die Polstellen in der oberen Halbebene (mitte) hat dies dieselbe Wirkung wie ein negativer Dämpfungsfaktor und man erhält die avancierte Green'sche Funktion. Umgeht man die negative Polstelle in der oberen Halbebene und die positive in der unteren (unten) erhält man die sogenannte kausale Green'sche Funktion; sie ist zeitumkehrinvariant.

Schließlich kann man auch die Polstellen in verschiedenen Richtungen durchlaufen, z.B. die Polstelle bei $\omega = -\omega_0$ in der unteren Halbebene und die Polstelle bei $\omega = +\omega_0$ in der oberen Halbebene (siehe Abb. 13.1(unten). Auf diese Weise erhält man eine zeitsymmetrische Green'sche Funktion, die man in der Quantenfeldtheorie auch als kausale Green'sche Funktion bezeichnet:

$$\hat{G}_{\epsilon}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2 - (\omega_0 + i\epsilon)^2} \implies G_{\text{causal}}(t - t') = \frac{\sin(\omega_0|t - t'|)}{2\omega_0}$$
(13.106)

13.2. ANWENDUNGEN

Die Freiheit, beim ungedämpften Oszillator die Green'sche Funktion wählen zu können (keine der Funktionen ist Element des $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, aber sie alle sind in \mathscr{S}' und daher im distributiven Sinne wohl definiert), drückt sich beim ungedämpften Oszillator darin aus, dass die Polstellen der Fourier-Transformierten auf der reellen Achse liegen und man sich entscheiden muss, wie man das Integral über diese Polstellen definiert.

13.2.5 Quantenmechanik

In der Quantenmechanik spielt die Fourier-Transformation aus mehreren Gründen eine wichtige Rolle. Drei dieser Gründe werden kurz angesprochen.

Die freie Schrödinger-Gleichung

Die freie (zeitabhängige) Schrödingergleichung hat die Form:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{2m}\Delta\psi(\boldsymbol{x},t). \qquad (13.107)$$

Hierbei sind $\hbar = h/2\pi$ die reduzierte Planck'sche Konstante und *m* die Masse eines Teilchens. $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ bezeichnet man als die Wellenfunktion, mit der das Teilchen beschrieben wird.

Dies ist eine "imaginäre Diffusionsgleichung" mit $\lambda = i/(2m\hbar)$ in Gl. 13.60. Wir können daher die Lösung der Diffusionsgleichung übernehmen (und hoffen, dass wir auf dem richtigen Blatt der Wurzel aus komplexen Zahlen landen):

$$U_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},t) = \left(\frac{m\hbar}{2\pi \mathrm{i}t}\right)^{3/2} \exp\left(\mathrm{i}m\hbar \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{2t}\right).$$
(13.108)

Diese Lösung bezeichnet man in der Quantentheorie als den Zeitentwicklungsoperator. Der Zeitentwicklungsoperator erfüllt ebenfalls die Schrödinger-Gleichung, ist aber so normiert, dass $U_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, also wie die fundamentale Lösung der Diffusionsgleichung. Für eine Wellenfunktion eines wechselwirkungsfreien Teilchens folgt daraus:

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \left(\frac{m\hbar}{2\pi i t}\right)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(im\hbar \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{2t}\right) \psi_0(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^3 y\,, \tag{13.109}$$

wobei $\psi_0(\mathbf{y})$ die Wellenfunktion zum Zeitpunkt t = 0 ist.

Orts- und Impulsdarstellung

In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Teilchens bezüglich seiner Ortsfreiheitsgrade durch Wellenfunktionen $\psi(\boldsymbol{x},t)$ im $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ beschrieben $(t, \text{ die Zeit, ist hier ein externer Parameter, der Hilbert-Raum bezieht sich auf die Ortskoordinaten). Die Tatsache, dass die Fourier-Transformation eine unitäre Abbildung <math>\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ ist, bedeutet, dass Wellenfunktionen im Ortsraum und Wellenfunktionen im Impulsraum (hier wird die Beziehung von deBroglie $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ verwendet) eine vollkommen gleichwertige Beschreibung für den Zustand eines Systems liefern.

Der harmonische Oszillator in der Quantenmechanik

Die eindimensionale zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2\right)\psi(x) = E\psi(x)\,. \tag{13.110}$$

(Die mehrdimensionale Gleichung lässt sich durch einen Separationsansatz auf Gleichungen dieser Form reduzieren.) Die gesuchten Lösungen $\psi(x)$ sollen Elemente von $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sein. Das schränkt die möglichen Werte für E auf einen diskreten Satz von Eigenwerten ein (die mit der Energie des Oszillators zusammenhängen).

Unter einer Fourier-Transformation geht die Gleichung über in

$$\left(p^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\right)\hat{\psi}(p) = E\hat{\psi}(p)\,. \tag{13.111}$$

Da es sich um dieselben Gleichungen handelt, müssen auch die Lösungen (sowohl für die möglichen Werte von E als auch für die Funktionen $\psi(x)$ bzw. $\hat{\psi}(p)$) gleich sein. Das bedeutet, die Lösungen können nur Eigenfunktionen unter der Fourier-Transformation sein, also Funktionen, für die gilt: $\mathscr{F}_{-}[f] = \lambda f$, wobei $|\lambda| = 1$ ist (da die Fourier-Transformation eine unitäre Abbildung ist, können die Eigenwerte nur vom Betrag 1 sein). Die einzigen Funktionen dieser Art sind Hermite-Polynome multipliziert mit einer Gauß-Funktion (siehe Abschnitt 15.3.2).

13.2.6 Datenanalyse

In der Datenanalyse spielt die Fourier-Transformation eine wichtige Rolle, um "versteckte" periodische Abhängigkeiten beispielsweise in einer Zeitreihe von Daten zu finden. Sei z.B. T(t) eine Datenreihe, welche die Temperatur als Funktion der Zeit über mehrere Jahre darstellt. Man würde erwarten, dass es besonders große Fourier-Amplituden zu Werten von ω gibt, die einer Periode von einem Tag entsprechen (tagsüber ist es meist wärmer als nachts) und auch einem Jahr (im Winter ist es meist kälter als im Sommer). Man kann in diesen Daten aber auch eine Periode von 11 Jahren finden, die mit dem Zyklus der Sonnenaktivität zu tun hat, die das Wetter auf der Erde beeinflusst.

Kapitel 14

Lineare Differentialgleichungen

In Kapitel 5 haben wir uns ganz allgemein mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigt und auch schon lineare Differentialgleichungen behandelt. Dort haben wir explizite Lösungen aber nur für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angegeben. In diesem Kapitel wird es um lineare Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizientenfunktionen gehen.

Die Differentialgleichungen der folgenden Liste treten häufig in der Physik auf:

(Laplace-Gleichung)
$$\Delta \phi(\boldsymbol{x}) = 0$$
 (14.1)

(Wellengleichung)
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\psi(t, \boldsymbol{x}) = 0$$
 (14.2)

(Helmholtz-Gleichung)
$$(\Delta \pm k^2)\phi(\mathbf{x}) = 0$$
 (14.3)
 $\begin{pmatrix} 1 & \partial^2 & m^2c^2 \end{pmatrix}$

(Klein-Gordon-Gleichung)
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2 c}{\hbar^2}\right)\psi(t, t)$$

ung)
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial t^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{1}{\hbar^2}\right)\psi(t, \boldsymbol{x}) = 0$$
 (14.4)

(Diffusionsgleichung)
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta\right)\psi(t, \boldsymbol{x}) = 0$$
 (14.5)

(zeitabhängige Schrödinger-Gleichung)
$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta - V(\boldsymbol{x})\right)\psi(t,\boldsymbol{x}) = 0$$
 (14.6)

(zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung)
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + (V(\boldsymbol{x}) - E)\right)\phi(\boldsymbol{x}) = 0$$
 (14.7)

Alle diese Differentialgleichungen sind partielle homogene lineare Differentialgleichungen. \hbar ist die reduzierte Planck'sche Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit, m eine Masse, a eine Temperaturleitfähigkeitskonstante, $V(\mathbf{r})$ ein Potenzial und E eine Energie. k ist eine freie Konstante, oftmals der Betrag eines Wellenvektors $k = 2\pi/\lambda$ (mit der Wellenlänge λ).

Viele partielle Differentialgleichungen der Physik - alle in obiger Liste - enthalten den Laplace-Operator oder den d'Alembert-Operator. Mit inhomogenen Differentialgleichungen dieser Art haben wir uns schon im Zusammenhang mit Green'schen Funktionen beschäftigt (siehe Kap. 11), hier soll es eher um homogene Gleichungen gehen. Die Problematik besteht oft darin, bei den Lösungen bestimmte Randbedingungen zu berücksichtigen. Für schwingende Membranen sucht man beispielsweise nach Lösungen der Laplace-Gleichung, die auf dem Rand der Membran (z.B. dem Rand einer Trommel) verschwinden. Hier bietet es sich an, zu einem Koordinatensystem zu wechseln, in dem diese Randbedingungen sehr einfach werden (z.B. Polarkoordinanten, wenn die Randbedingungen auf einem Kreis gelten sollten). Bei orthogonalen Koordinatensystemen hilft oftmals ein Separationsansatz, um die partielle Differentialgleichung in gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen.

Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns daher mit dem Separationsansatz. Die weiteren Abschnitte behandeln dann gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten, die z.B. das Ergebnis eines Separationsansatzes sein können. Eine besondere Klasse unter diesen Differentialgleichungen hängt mit sogenannten Sturm-Liouville-Operatoren zusammen, das sind selbst-adjungierte Differentialoperatoren auf einem Hilbert-Raum. Diese werden in Kapitel 15 behandelt.

14.1 Der Separationsansatz

Der Separationsansatz ist ein Ansatz für partielle lineare Differentialgleichungen, also Differentialgleichungen in mehreren Variablen. Gegeben sei ein Differential
operator $\mathcal{D}_{\boldsymbol{x}}$ und gesucht seien Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{14.8}$$

 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{x}}$ kann im Prinzip ein beliebiger Differential
operator mit beliebigen Koeffizientenfunktionen sein (es gibt Einschränkungen an die Singularitäten solcher Funktionen, zu den
en wir noch kommen werden).

Angenommen, die Variablenmenge $\{x\}$ lässt sich in zwei Gruppen zerlegen - $\{x\} = \{(y, z)\}$ und der Differenzialoperator \mathcal{D}_x lässt sich als eine Summe von einem Anteil zu y und einem Anteil zu z zerlegen:

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{x}} = \mathcal{D}_{\boldsymbol{y}} + \mathcal{D}_{\boldsymbol{z}} \,. \tag{14.9}$$

Es sind auch Koeffizientenfunktionen zu den jeweils anderen Variablen möglich, also ein Operator der Form

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{x}} = h(\boldsymbol{z})\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}} + g(\boldsymbol{y})\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}.$$
(14.10)

Da $g(\boldsymbol{y})h(\boldsymbol{z})$ nicht identisch verschwinden soll, kann man dieses Produkt ausklammern und erhält als Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{g(\boldsymbol{y})}\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{h(\boldsymbol{z})}\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}\right)\phi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0, \qquad (14.11)$$

also einen Operator der Form (14.9).

Man kann nun für die Funktion $\phi(\mathbf{x})$ einen Separationsansatz der Form $\phi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{y})\chi(\mathbf{z})$ machen. Aus der Differentialgleichung wird damit:

$$\left(\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}} + \mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}\right)\psi(\boldsymbol{y})\chi(\boldsymbol{z}) = \chi(\boldsymbol{z})\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y}) + \psi(\boldsymbol{y})\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}\chi(\boldsymbol{z}) = 0$$
(14.12)

Wir klammern $\psi(\boldsymbol{y})\chi(\boldsymbol{z})$ aus und erhalten:

$$\psi(\boldsymbol{y})\chi(\boldsymbol{z})\left(\frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y})}{\psi(\boldsymbol{y})} + \frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}\chi(\boldsymbol{z})}{\chi(\boldsymbol{z})}\right) = 0.$$
(14.13)

Da das Produkt $\psi(\boldsymbol{y})\chi(\boldsymbol{z})$ nicht identisch verschwinden soll (die Lösungen sollen bestenfalls auf einer Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 verschwinden), folgt:

$$\left(\frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y})}{\psi(\boldsymbol{y})} + \frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}\chi(\boldsymbol{z})}{\chi(\boldsymbol{z})}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y})}{\psi(\boldsymbol{y})} = -\frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}\chi(\boldsymbol{z})}{\chi(\boldsymbol{z})}.$$
(14.14)

Die linke Seite dieser Gleichung ist nur eine Funktion von \boldsymbol{y} , hängt also nicht von \boldsymbol{z} ab, und die rechte Seite ist nur eine Funktion von \boldsymbol{z} . Das bedeutet, beide Seiten sind gleich einer Konstanten:

$$\frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y})}{\psi(\boldsymbol{y})} = C = -\frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}\chi(\boldsymbol{z})}{\chi(\boldsymbol{z})}.$$
(14.15)

Damit erhalten wir die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y})}{\psi(\boldsymbol{y})} = C \quad \text{oder} \quad \left(\mathcal{D}_{\boldsymbol{y}} - C\right)\psi(\boldsymbol{y}) = 0 \tag{14.16}$$

und

$$\frac{\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}}\chi(\boldsymbol{z})}{\chi(\boldsymbol{z})} = -C \quad \text{oder} \quad (\mathcal{D}_{\boldsymbol{z}} + C)\chi(\boldsymbol{z}) = 0.$$
(14.17)

Die beiden rechten Differentialgleichungen haben die Form von Eigenwertgleichungen.

Die Lösungen $\psi(C; \boldsymbol{y})$ und $\chi(C; \boldsymbol{z})$ hängen von der Konstanten C ab, und oft gibt es nicht zu beliebigen Zahlen C sinnvolle Lösungen. Wichtig ist, dass die Anzahl der Variablen in diesen Gleichungen kleiner ist als die ursprüngliche Anzahl. Im günstigsten Fall (der zum Glück in der Physik häufig auftritt) kann man durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens eine partielle Differentialgleichung in n Variablen in n gewöhnliche Differentialgleichungen in jeweils einer Variablen überführen. Insgesamt erhält man auf diese Weise n - 1 Konstanten $C_1, ..., C_{n-1}$, von denen die Lösungen abhängen.

Man findet auf diese Weise zu jeder erlaubten Konstanten C (bzw. zu jedem erlaubten Satz $\{C_i\}$ von Konstanten) ein oder mehrere Lösungen $\phi(C; \boldsymbol{x}) = \psi(C; \boldsymbol{y})\chi(C; \boldsymbol{z})$ der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung. Da es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung handelt, sind beliebige Linearkombinationen dieser Lösungen ebenfalls Lösungen:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{C} a(C)\psi(C; \boldsymbol{y})\chi(C; \boldsymbol{z})$$
(14.18)

wobei die freien Koeffizienten a(C) beispielsweise durch die geforderten Randbedingungen festgelegt werden können. Da sich andererseits jede Funktion $\phi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ als Linearkombination von Produktfunktionen der Form $\psi(\boldsymbol{y})\chi(\boldsymbol{z})$ darstellen lässt, erhält man auf diese Weise unter sehr allgemeinen Bedingungen auch alle Lösungen.

14.1.1 Beispiel: Separation von Orts- und Zeitvariablen

Mehrere Differentialgleichungen in obiger Liste (Gl. 14.1–14.7) enthalten Ableitungen nach der Zeit. Sofern die räumlichen Randbedingungen nicht zeitabhängig sind, bietet sich ein Separationsansatz der Form $\psi(t, \boldsymbol{x}) = f(t)\phi(\boldsymbol{x})$ an. Ein solcher Separationsansatz für die Orts und Zeitvariablen führt bei den obigen zeitabhängigen Gleichungen zu folgenden Vereinfachungen und Teillösungen:

1. Wellen- und Klein-Gordon-Gleichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t) = -\frac{\omega^2}{c^2}f(t) \quad \text{und} \quad \left(\Delta - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\omega^2}{c^2}\phi(\boldsymbol{x}).$$
(14.19)

(Für die Wellengleichung setze man m = 0.) Sinnvolle Lösungen gibt es zunächst nur für $\omega^2 \ge 0$, daher wurde die freie Konstante in diesem Fall $C = -\omega^2/c^2$ gesetzt. Eine genaue Untersuchung des räumlichen Anteils, nun eine Helmholtz-Gleichung, liefert sogar die Einschränkung $\omega^2 \ge m^2 c^4/\hbar^2$. Der zeitabhängige Anteil hat die Lösungen:

$$f_{\pm}(t) = A_{\pm} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega t} \tag{14.20}$$

mit freien Amplituden A_{\pm} und der Frequenz $\omega = kc$.

2. Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t) = -\omega a f(t)$$
 und $\Delta \phi(\boldsymbol{x}) = -\omega \phi(\boldsymbol{x})$. (14.21)

Auch hier ist nur $\omega > 0$ eine sinnvolle Lösung. Man erhält wieder eine Helmholtz-Gleichung für den räumlichen Anteil und das zeitliche Verhalten beschreibt einen exponentiellen Abfall:

$$f(t) = e^{-a\omega t} . (14.22)$$

3. Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t) = Ef(t)$$
 und $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)\phi(\boldsymbol{x}) = E\phi(\boldsymbol{x}).$ (14.23)

Hier kann E zunächst beliebige Werte annehmen, es zeigt sich jedoch, dass E nach unten beschränkt ist. Je nach der Form des Potenzials $V(\boldsymbol{x})$ kann E nur bestimmte diskrete Werte annehmen, oder es gibt neben den diskreten Werten auch kontinuierliche Bereiche. Der räumliche Anteil entspricht nun der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung und das zeitliche Verhalten besteht in einer oszillierenden Phase:

$$f(t) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right).$$
(14.24)

In allen Fällen kann der zeitabhängige Anteil der separierenden Lösungen einfach bestimmt und angegeben werden.

14.1.2 Beispiel: Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Nachdem Orts- und Zeitvariable in obigen Differentialgleichungen abgetrennt wurden, beinhalten sämtliche Differentialgleichungen den Laplace-Operator. Je nach Randwerten, die zu berücksichtigen sind, bietet es sich an, den Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten auszudrücken. Sehr häufig werden das Zylinder- oder Kugelkoordinaten sein, aber das folgende Verfahren lässt sich bei fast allen orthogonalen Koordinatensystemen anwenden. Wir betrachten als Beispiel Kugelkoordinaten und wählen als zu lösende Differentialgleichung die Gleichung

$$(-\Delta + V(r))\psi(x, y, z) = 0.$$
(14.25)

Sie tritt unter anderem (mit dem "Potenzial" V(r) - E und einigen allgemeineren Faktoren) bei der Behandelung des Wasserstoffatoms in der Quantenmechanik auf. Für V(r) = const erhalten wir die Helmholtz-Gleichung und für V(r) = 0 die Laplace-Gleichung.

Der Laplace-Operator hat in Kugelkoordinaten folgende Form:

$$\Delta\Psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right).$$
 (14.26)

Es bietet sich zunächst an, die Funktion $\Psi(r, \theta, \varphi)$ in einen Radial- und einen Winkelanteil zu separieren:

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi).$$
(14.27)

Setzt man diesen Separationsansatz in obige Differentialgleichung ein, erhält man zwei Gleichungen:

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right) = -l(l+1)Y(\theta,\varphi)$$
(14.28)

und

$$-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)\right] + V(r)R(r) = 0$$
(14.29)

Die freie Konstante, die bei dem Separationsansatz auftritt, wurde hier zunächst willkürlich mit -l(l+1) bezeichnet. Der Grund wird später offensichtlich (es wird sich zeigen, dass l eine natürliche Zahl ist; siehe Abschnitt 14.5.4). Zunächst könnte -l(l+1) noch eine beliebige Zahl sein, wobei in Kap. 15 gezeigt wird, dass \mathcal{D} ein selbstadjungierter Operator ist und daher die Eigenwerte reell sein müssen.

Die Eigenwertgleichung

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} = -l(l+1)Y(\theta,\varphi)$$
(14.30)

vereinfacht man wiederum durch einen Separationsansatz in den Winkelvariablen

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi), \qquad (14.31)$$

was für $\Phi(\varphi)$ auf die sogenannte Azimutalgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2\Phi(\varphi) \tag{14.32}$$

und für $\Theta(\theta)$ auf die *Polargleichung*

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta(\theta) + l(l+1)\Theta(\theta) = 0$$
(14.33)

führt. Auch hier tritt wieder eine freie Konstante auf, die mit m^2 (bitte nicht mit einer "Masse" verwechseln; in der Quantenmechanik nennt man m die magnetische Quantenzahl) bezeichnet wurde. Die Lösungen der Azimutalgleichung sind komplexe Exponentialfunktionen (Winkelfunktionen):

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
(14.34)

Die Ganzzahligkeit von m folgt aus der Bedingung, dass die Funktion auf der Kugeloberfläche glatt bzw. eindeutig sein soll, d.h. in φ periodisch mit Periode 2π . Je nach physikalischer Problemstellung könnte es auch andere Einschränkungen geben.

Mit der Polargleichung und der Radialgleichung werden wir uns noch beschäftigen (siehe Abschnitt 15.3.4). Wichtig ist an dieser Stelle, dass man partielle Differentialgleichunge oft durch Separationsansätze in einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen kann.

14.2 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen- Allgemeine Überlegungen

In Kapitel 5.3.2 haben wir uns mit gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschäftigt, nun betrachten wir solche Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizientenfunktionen. Wir beginnen mit Differentialgleichungen erster Ordnung und betrachten dann allgemeine Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Da wir eine allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung immer als Linearkombination zweier (linear unabhängiger) spezieller Lösungen darstellen können, müssen wir "nur" zwei linear unabhängige Lösungen finden. Wir beginnen zunächst mit einem allgemeinen Verfahren, aus der Kenntnis einer Lösung eine zweite, linear unabhängige Lösung zu konstruieren. Schließlich gehen wir auf Verfahren ein, mit denen wir zumindest eine Lösung finden können.

14.2.1 Gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Wir beginnen mit einer Gleichung der Form

$$a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = 0. (14.35)$$

Diese Differentialgleichung können wir beispielsweise nach der Methode der Variablentrennung lösen. Es gibt hier aber einen direkteren Weg. Wir bringen die Gleichung in die Form

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} \tag{14.36}$$

und nutzen aus, dass wir für die linke Seite

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))' \tag{14.37}$$

schreiben können. Damit lautet unsere Differentialgleichung

$$(\ln f(x))' = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}.$$
(14.38)

Nun können wir beide Seiten integrieren und erhalten

$$\ln f(x) - \ln f(x_0) = -\int_{x_0}^x \frac{a_0(x')}{a_1(x')} dx'$$
(14.39)

oder

$$f(x) = f(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{a_0(x')}{a_1(x')} \mathrm{d}x'\right).$$
 (14.40)

14.2.2 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung - Bestimmung einer zweiten, linear unabhängigen Lösung

Wir betrachten nun Differentialgleichungen der Form

$$f''(x) + P(x)f'(x) + Q(x)f(x) = 0$$
(14.41)

mit zunächst beliebigen (stetig differenzierbaren) Koeffizientenfunktionen P(x) und Q(x). Angenommen, wir haben eine Lösung $f_1(x)$ dieser Differentialgleichung gefunden, dann können wir eine zweite, linear unabhängige Lösung nach folgendem Verfahren bestimmen. Dieses Verfahren wird auch gelegentlich angewandt, um die zweite Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu konstruieren, wenn der Exponentialansatz nur eine Lösung liefert (z.B. der marginale Grenzfall beim gedämpften Oszillator, siehe Abschnitt 5.3.2).

Wir betrachten die sogenannte Wronski-Determinante [*Wronskian*] (benannt nach dem polnischen Mathematiker Jósef Maria Hoëné-Wroński (1776–1853)):

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix} = f_1(x)f'_2(x) - f'_1(x)f_2(x).$$
(14.42)

Wenn die beiden Funktionen linear unabhängig sind, ist $W(x) \neq 0$, andernfalls verschwindet diese Funktion identisch. Wir bilden die Ableitung dieser Funktion und nutzen aus, dass beide Funktionen die obige Differentialgleichung erfüllen sollen:

$$W'(x) = f_1(x)f_2''(x) - f_2(x)f_1''(x)$$
(14.43)

$$= f_1(x)(-P(x)f_2'(x) - Q(x)f_2(x)) - f_2(x)(-P(x)f_1'(x) - Q(x)f_1(x))$$
(14.44)

$$= -(f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x))P(x)$$
(14.45)

$$= -P(x)W(x).$$
 (14.46)

14.2. GEWÖHNLICHE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Diese Gleichung können wir leicht integrieren und erhalten:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x P(x_1) dx_1\right).$$
 (14.47)

Wenn die Wronski-Determinante also an irgendeinem Punkt von 0 verschieden ist (und P(x) regulär ist), ist sie immer von 0 verschieden. Die beiden Vektoren $(f_1(x), f'_1(x))$ und $(f_2(x), f'_2(x))$ sind in diesem Fall für jeden Punkt x linear unabhängig.

Andererseits gilt aber auch:

$$\left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)' = \frac{f_2'(x)f_1(x) - f_1'(x)f_2(x)}{f_1(x)^2} = \frac{W(x)}{f_1(x)^2} = \frac{1}{f_1(x)^2}W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^x P(x_1)\mathrm{d}x_1\right).$$
 (14.48)

Wir können diese Gleichung integrieren und erhalten:

$$f_2(x) = f_1(x)W(x_0) \int_{\hat{x}_0}^x \left[\frac{1}{f_1(x_2)^2} \exp\left(-\int_{x_0}^{x_2} P(x_1) \mathrm{d}x_1\right) \right] \mathrm{d}x_2 \quad (14.49)$$

Hier wird eine noch unbekannte Lösung $f_2(x)$ als Integral über die bekannte Lösung $f_1(x)$ sowie die Koeffizientenfunktion P(x) ausgedrückt. Die multiplikative Konstante $-W(x_0)$ können wir weglassen - sie gibt uns nur ein Vielfaches der Lösung. Auch die beiden Integrationsgrenzen x_0 und \hat{x}_0 sind beliebig und ändern nur die Koeffizienten, mit der sich $f_2(x)$ als Linearkombination von $f_1(x)$ und einer linear unabhängigen Lösung darstellen lässt.

Beispiel: Der gedämpfte Oszillator

Wir können mit diesem Verfahren aus der bekannten Lösung $f_1(x) = e^{-\gamma x}$ im marginalen Grenzfall des gedämpften Oszillators die zweite Lösung bestimmen (siehe Abschnitt 5.3.2). Beim gedämpften Oszillator ist $P(x) = 2\gamma$ und somit

$$\int_0^{x_2} P(x_1) \,\mathrm{d}x_1 = \int_0^{x_2} 2\gamma \,\mathrm{d}x_1 = 2\gamma x_2 \,. \tag{14.50}$$

Wir erhalten

$$f_2(x) = e^{-\gamma x} \int_0^x \left[\frac{1}{e^{-2\gamma x_2}} \exp(-2\gamma x_2) \right] dx_2 = e^{-\gamma x} x, \qquad (14.51)$$

also die korrekte zweite Lösung.

Dieses Verfahren funktioniert natürlich nicht nur im marginalen Grenzfall. Angenommen, wir haben eine Lösung, $f_1(x) = e^{-\gamma x} \cos \omega x$, gefunden. Dann folgt für die zweite Lösung:

$$f_{2}(x) = e^{-\gamma x} \cos \omega x \int_{0}^{x} \left[\frac{1}{e^{-2\gamma x_{2}} \cos^{2} \omega x_{2}} \exp(-2\gamma x_{2}) \right] dx_{2}$$
(14.52)

$$= e^{-\gamma x} \cos \omega x \int_{0} \left[\frac{1}{\cos^{2} \omega x_{2}} \right] dx_{2}$$
(14.53)

$$= e^{-\gamma x} \frac{\sin \omega x}{\omega} . \tag{14.54}$$

Beim letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^x \left[\frac{1}{\cos^2 \omega x_2}\right] dx_2 = \frac{1}{\omega} \frac{\sin \omega x}{\cos \omega x}.$$
 (14.55)

14.3 Variablentransformation

In den folgenden Abschnitten werden einige Verfahren zum Lösen von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung behandelt, die oftmals sehr spezielle Koeffizientenfunktionen voraussetzen. Hierbei sollte man aber berücksichtigen, dass man in einer solchen Differentialgleichung eine (fast beliebige, allerdings im Definitionsbereich bijektive) Variablentransformation vornehmen kann, sodass sehr viele Differentialgleichungen durch solche Transformationen in eine spezielle Form gebracht werden können.

Es sei eine Differentialgleichung der Form

$$f''(x) + P(x)f'(x) + Q(x)f(x) = 0$$
(14.56)

gegeben. Wir schreiben nun die Variable x als Funktion einer neuen Variablen y. Es gelte x = g(y). Da die Variablentransformation in dem relevanten Bereich bijektiv sein soll existiert die Umkehrabbildung $y = g^{-1}(x)$. Mit der Notation $\tilde{f}(y) = f(g(y))$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(g(y))}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\tilde{f}(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}$$
(14.57)

und

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{f}(y)}{\mathrm{d}y^2} \left(\frac{\mathrm{d}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\tilde{f}(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2 g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2} \,. \tag{14.58}$$

Die neue Differentialgleichung lautet somit:

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\tilde{f}(y)}{\mathrm{d}y^{2}}\left(\frac{\mathrm{d}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right)^{2} + \left(\frac{\mathrm{d}^{2}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^{2}} + \frac{\mathrm{d}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}P(g(y))\right)\frac{\mathrm{d}\tilde{f}(y)}{\mathrm{d}y} + Q(g(y))\tilde{f}(y) = 0$$
(14.59)

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{f}(y)}{\mathrm{d}y^2} + \tilde{P}(y)\frac{\mathrm{d}\tilde{f}(y)}{\mathrm{d}y} + \tilde{Q}(y)\tilde{f}(y) = 0$$
(14.60)

mit

$$\tilde{P}(y) = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}^2 g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}P(g(y))\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tilde{Q}(y) = \frac{Q(g(y))}{\left(\frac{\mathrm{d}g^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$
(14.61)

Durch die Wahl einer geeigneten Funktion g(y) hat man somit vergleichsweise viele Freiheiten, die Differentialgleichung umzuformen.

Betrachten wir als Beispiel die Transformation x = 1/y, die den Punkt $x = \infty$ in den Punkt y = 0 transformiert. Dann gilt für die neue Differentialgleichung:

$$y^{4}\tilde{f}''(y) + \left(2y^{3} - y^{2}P(1/y)\right)\tilde{f}'(y) + Q(1/y)\tilde{f}(y) = 0.$$
(14.62)

14.4 Das Verfahren von Frobenius

Wir betrachten nun gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung der folgenden Form:

$$x^{2}f''(x) + xp(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0.$$
(14.63)

Der Grund für die Wahl der Koeffizientenfunktionen ist Folgender: Wird eine Potenzfunktion $f(x) = x^k$ abgeleitet, verringert sich die Potenz von x bei jeder Ableitung um 1. Die Terme $x^2 f''$, xf' und f enthalten also dieselben Potenzen. Für konstante Koeffizientenfunktionen (also p(x) = p und

q(x) = q sind die Lösungen reine Potenzfunktionen (siehe Abschnitt 14.5.1). Manchmal schreibt man die Gleichung auch in der Form:

$$f''(x) + \frac{p(x)}{x}f'(x) + \frac{q(x)}{x^2}f(x) = f''(x) + P(x)f'(x) + Q(x)f(x) = 0.$$
(14.64)

Damit ein Potenzreihenansatz (wie bei dem Verfahren von Frobenius, s.u.) sinnvoll ist, sollten p(x)und q(x) bei x = 0 keine Singularität haben, bzw. die Funktion P(x) = p(x)/x sollte bei x = 0maximal eine Singularität 1. Ordnung und die Funktion $Q(x) = q(x)/x^2$ maximal eine Singularität zweiter Ordnung haben. (Ist die Singularität an einem Punkt von höherer Ordnung, spricht man von einer wesentlichen Singularität - nicht zu verwechseln mit den wesentlichen Singularitäten von komplexen Funktionen, Abschnitt 9.4.1. Liegt keine Singularität vor, spricht man von einem regulären Punkt.)

Angenommen, P(x) und Q(x) sind bei x = 0 regulär, d.h., P(0) und Q(0) existieren und die Koeffizientenfunktion lassen sich um diese Stelle entwickeln

$$P(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l x^l$$
 und $Q(x) = \sum_{l=0}^{\infty} Q_l x^l$. (14.65)

In diesem Fall kann man für f(x) eine normale Potenzreihe $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ ansetzen und man gelangt im Prinzip zu einer Lösung (oft auch zu zwei Lösungen, wobei die zweite Lösung linear in x beginnt).

Der Ansatz von Frobenius (benannt nach dem deutschen Mathematiker Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917)) ist etwas allgemeiner: Hierbei dürfen P(x) eine Singularität 1. Ordnung und Q(x) eine Singularität 2. Ordnung bei x = 0 haben, es liegt also eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$P(x) = \sum_{l=-1}^{\infty} P_l x^l$$
 und $Q(x) = \sum_{l=-2}^{\infty} Q_l x^l$ (14.66)

vor. Der Ansatz für die Lösung ist nun

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n} , \qquad (14.67)$$

wobei k aus der niedrigsten Potenz von x zu bestimmen ist und nicht unbedingt ganzzahlig sein muss. Der reguläre Fall $(P_{-1} = Q_{-2} = Q_{-1} = 0)$ führt, wie wir gleich sehen werden, auf die gewöhnliche Potenzreihenentwicklung (mit k = 0 bzw. k = 1) zurück. Daher betrachten wir diesen Fall hier als Spezialfall der Methode von Frobenius.

Es sollte erwähnt werden, dass die Entwicklungen um x = 0 keine Einschränkungen der Allgemeinheit darstellen. Wir können im Prinzip jeden Punkt $x = x_0$ als Entwicklungsgpunkt wählen und die obigen Potenzreihen als Entwicklungen in $(x - x_0)$ formulieren. Wichtig ist, dass bei x_0 keine wesentliche Singularität der Koeffizientenfunktionen P(x) und Q(x) im oben genannten Sinne vorliegt.

14.4.1 Die charakteristische Gleichung

Für eine Funktion wie in Gl. 14.67 gilt:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k+n) x^{n+k-1} \qquad \text{und} \qquad f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k+n) (k+n-1) x^{k+n-2} \,. \tag{14.68}$$

Setzen wir dies zusammen mit den Entwicklungen aus Gl. 14.66 in die Differentialgleichung ein, erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (k+n)(k+n-1)x^{k+n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-1}^{\infty} a_n P_l(k+n)x^{k+n-1+l} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-2}^{\infty} a_n Q_l x^{k+n+l} = 0.$$
(14.69)

Die niedrigste Potenz, mit der x in diesen Termen auftreten kann, ist k - 2; das entspricht n = 0in allen Termen sowie l = -1 im zweiten Term und l = -2 im dritten Term. Der Koeffizient muss insgesamt verschwinden, was auf folgende Gleichung führt:

$$a_0k(k-1) + a_0P_{-1}k + a_0Q_{-2} = 0. (14.70)$$

Da a_0 per definitionem der niedrigste nicht-verschwindende Term in der Entwicklung der Funktion f(x) sein soll, ist $a_0 \neq 0$ und wir erhalten die Gleichung:

$$k(k-1) + P_{-1}k + Q_{-2} = 0. (14.71)$$

Diese Gleichung wird gelegentlich charakteristische Gleichung [indicial equation] genannt. Es handelt sich um eine quadratische Gleichung für k mit (im Allgemeinen) zwei Lösungen:

$$k_{1/2} = \frac{1 - P_{-1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - P_{-1})^2 - 4Q_{-2}}.$$
(14.72)

Wir betrachten noch die Bedingung, dass der Koeffizient zur nächst höheren Potenz von x, also zu x^{k-1} , verschwinden muss:

$$a_1(k+1)k + a_0P_0k + a_1P_{-1}(k+1) + a_0Q_{-1} + a_1Q_{-2} = 0.$$
(14.73)

Im Allgemeinen ist dies eine Gleichung für den Koeffizienten a_1 , der sowohl von der gewählten Potenz k_1 bzw. k_2 als auch von a_0 abhängt. Angenommen, $P_{-1} = Q_{-2} = 0$, d.h. die führende Singularität ist nicht vorhanden und die charakteristische Gleichung 14.71 führt uns auf die regulären Fälle k = 0 und k = 1. Es könnte jedoch $Q_{-1} \neq 0$ sein und somit in der Differentialgleichung eine Singularität auftreten, die um eine Ordnung schwächer ist als maximal erlaubt. Für k = 0 führt dies auf die Gleichung $a_0Q_{-1} = 0$, und da nach Annahme sowohl $a_0 \neq 0$ als auch $Q_{-1} \neq 0$ sein sollen, erhalten wir zu k = 0 keine Lösung. Für k = 1 finden wir die Gleichung

$$2a_1 + a_0 P_0 + a_0 Q_{-1} = 0 \qquad \text{oder} \qquad a_1 = -\frac{1}{2} (P_0 + Q_{-1}) a_0.$$
 (14.74)

Dies führt auf eine Lösung zu k = 1. In diesem Fall erhalten wir also nur eine Lösung. Wir werden sehen, dass es auch im allgemeinen Fall unter bestimmten Bedingungen nur eine Lösung gibt.

14.4.2 Die Rekursionsgleichung

Wir betrachten nun die Rekursionsgleichung für die Koeffizienten $\{a_n\}$ der Funktion f(x). Dazu addieren wir die Faktoren von x^{k+n-2} in Gl. 14.69; diese Summe muss verschwinden:

$$a_n(k+n)(k+n-1) + \sum_{j=0}^n a_j P_{n-j-1}(k+j) + \sum_{j=0}^n a_j Q_{n-j-2} = 0.$$
 (14.75)

In den beiden Summen tritt als letzter Term (für j = n) noch der Koeffizient a_n auf. Diese Beiträge spalten wir ab und fassen die Summen zusammen:

$$a_n\Big((k+n)(k+n-1) + P_{-1}(k+n) + Q_{-2}\Big) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\Big(P_{n-j-1}(k+j) + Q_{n-j-2}\Big) = 0 \quad (14.76)$$

14.5. GESCHLOSSEN LÖSBARE GLEICHUNGEN

Mit der Notation

$$C(j;k,n) = P_{n-j-1}(k+j) + Q_{n-j-2}$$
(14.77)

erhalten wir die Rekursionsgleichung

$$a_n\Big((k+n)(k+n-1) + P_{-1}(k+n) + Q_{-2}\Big) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j C(j;k,n) = 0.$$
(14.78)

Der Faktor vor dem Koeffizienten a_n kann verschwinden und wir erhalten eine zweite Bedingung für die schon festliegenden Koeffizienten $\{a_n\}$, die im Allgemeinen nicht erfüllt ist. Dann erhalten wir für diesen Wert von k keine Lösung. Dieser Fall tritt ein, wenn k + n neben k die zweite Lösung der charakteristischen Gleichung 14.71 ist. Das passiert immer dann, wenn sich die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung um eine ganze Zahl unterscheiden, also $k_1 = k_2 + n$. Da n positiv ist, passiert das nie für die größere der beiden Lösungen und der Ansatz von Frobenius führt für diesen k-Wert (hier k_1) in jedem Fall zu einer Lösung. Falls $k_1 - k_2$ keine ganze Zahl ist, finden wir auch für k_2 immer eine zweite, linear unabhängige Lösung mit diesem Potenzreihenansatz. Andernfalls finden wir die zweite, linear unabhängige Lösung über Gleichung 14.49. Meist enthält diese einen logarithmischen Term.

14.5 Geschlossen lösbare Gleichungen

Die Rekursionsgleichung 14.78 eignet sich sehr gut für numerische Behandlungen von Differentialgleichungen. Im Allgemeinen lassen sich jedoch die Koeffizienten $\{a_n\}$ nicht geschlossen als Funktion von *n* ausdrücken. Es gibt allerdings einige prominente Ausnahmen, von denen einige angesprochen werden sollen.

14.5.1 Reine Potenzfunktionen

Angenommen, $P_{-1} \neq 0$ und $Q_{-2} \neq 0$, aber $P_i = 0$ für i > -1 und $Q_i = 0$ für 1 > -2. Die Differentialgleichung lautet also

$$f''(x) + \frac{P_{-1}}{x}f'(x) + \frac{Q_{-2}}{x^2}f(x) = 0$$
(14.79)

oder

$$x^{2}f''(x) + P_{-1}xf'(x) + Q_{-2}f(x) = 0.$$
(14.80)

Die charakteristische Gleichung 14.71 liefert zwei Lösungen für k:

$$k_{1/2} = \frac{1 - P_{-1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - P_{-1})^2 - 4Q_{-2}}.$$
(14.81)

Da in der Rekursionsgleichung 14.78 alle Koeffizienten C(j; k, n) verschwinden (für j < n), liefern alle anderen Gleichungen

$$a_n\Big((k+n)(k+n-1) + P_{-1}(k+n) + Q_{-2}\Big) = 0.$$
(14.82)

Sofern k+n nicht die zweite Lösung der charakteristischen Gleichung ist, folgt $a_n = 0$. Somit erhalten wir als allgemeine Lösung eine Linearkombination der beiden Potenzfunktionen zur charakteristischen Gleichung:

$$f(x) = ax^{k_1} + bx^{k_2} \,. \tag{14.83}$$

Dies ist in diesem Fall die allgemeine Lösung.

14.5.2 Der harmonische Oszillator

Den harmonischen Oszillator betrachten wir hier als Beispiel für eine Differentialgleichung, bei der die Lösungen der charakteristischen Gleichung um eine ganze Zahl auseinanderliegen $(k_1 - k_2 = 1)$, man aber trotzdem zwei Lösungen in Form von Potenzreihen findet.

Für die Gleichung des harmonischen Oszillators gilt

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \implies P_l = 0, \quad Q_0 = \omega^2, \quad Q_l = 0 \text{ (für } l \neq 0).$$
 (14.84)

Die charakteristische Gleichung 14.71 wird zu k(k-1) = 0 und liefert die beiden Lösungen $k_1 = 1$ und $k_2 = 0$. Die Gleichung für a_1 führt wieder auf die charakteristische Gleichung: Wir können a_1 also unabhängig von a_0 wählen.

Um die beiden Lösungen nicht zu mischen, betrachten wir zunächst k = 0 und setzen $a_1 = 0$. Allgemein ist $C(j; k, n) = \omega^2 \delta_{j n-2}$ und somit lautet die Rekursionsgleichung:

$$a_n(n(n-1)) + \omega^2 a_{n-2} = 0 \tag{14.85}$$

oder

$$a_n = -\frac{\omega^2}{n(n-1)}a_{n-2} \tag{14.86}$$

mit der Lösung:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0$$
 und $a_{2n+1} = 0.$ (14.87)

Die Lösung lautet somit $f_1(x) = a_0 \cos \omega x$.

Für k = 1 können wir ganz entsprechend vorgehen. Insbesondere ist $a_0 = 0$ und a_1 beliebig. Die Rekursionsgleichung 14.86 ist unverändert und wir erhalten als Lösung:

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_1$$
 und $a_{2n} = 0$, (14.88)

also $f_2(x) = a_1 \frac{\sin \omega x}{\omega}$.

14.5.3 Die Bessel'sche Differentialgleichung

Als erstes "nicht triviales" Beispiel betrachten wir die Bessel'sche Differentialgleichung:

$$x^{2}f''(x) + xf'(x) + (x^{2} - \nu^{2})f(x) = 0$$
(14.89)

bzw.

$$f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)f(x) = 0.$$
(14.90)

Die charakteristische Gleichung 14.71 lautet nun:

$$k(k-1) + k - \nu^2 = 0$$
 oder $k^2 - \nu^2 = 0$ (14.91)

mit den Lösungen:

$$k_{1/2} = \pm \nu \,. \tag{14.92}$$

Wir betrachten noch die Gleichung zur nächsten Potenz (Gl. 14.73):

$$a_1((k+1)k+k+1-\nu^2) = a_1(k+1+\nu)(k+1-\nu) = 0.$$
(14.93)

Weder für $k = +\nu$ noch für $k = -\nu$ verschwindet eine der Klammern (es sei denn $\nu = \pm \frac{1}{2}$), also muss gelten $a_1 = 0$.

14.5. GESCHLOSSEN LÖSBARE GLEICHUNGEN

Für $k=+\nu$ wird die Rekursionsgleichung 14.78 zu

$$a_n \Big((\nu+n)(\nu+n-1) + (\nu+n) - \nu^2 \Big) + a_{n-2} = 0$$
(14.94)

oder

$$a_n = -\frac{1}{n(n+2\nu)}a_{n-2}.$$
(14.95)

Die Lösung $k = +\nu$ liefert eine Potenzreihe, bei der alle ungeraden Koeffizienten verschwinden. Die Lösung für die Koeffizienten a_n lautet:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^{2n} n! \Gamma(\nu+n+1)} a_0 \tag{14.96}$$

und damit finden wir

$$f(x) = a_0 x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\nu+1)}{4^n n! \Gamma(\nu+n+1)} x^n = J_{\nu}(x).$$
(14.97)

Die Funktion $J_{\nu}(x)$ bezeichnet man als Bessel-Funktion.

Wenn ν ganz- oder halbzahlig ist, finden wir auf diese Weise keine zweite Funktion (es gibt zwar die Bessel-Funktion $J_{-\nu}(x) = (-1)^{\nu} J_{\nu}(x)$, die allerdings nicht linear unabhängig von $J_{\nu}(x)$ ist). Hier können wir Gleichung 14.49 verwenden. Ist ν weder ganz- noch halbzahlig, finden wir für $k = -\nu$ eine zweite, linear unabhängige Lösung.

14.5.4 Die Legendre'sche Differentialgleichung

Der Legendre'schen Differentialgleichung sind wir schon im Zusammenhang mit dem Separationsansatz zum Laplace-Operator in Kugelkoordinaten begegnet:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) + l(l+1)\Theta(\theta) = 0.$$
(14.98)

Damals (Gl. 14.33) trat noch ein weiterer Term mit einer Konstanten m^2 auf. Dabei handelt es sich um die assoziierte (oder zugeordnete) Legendre'sche Differentialgleichung. Für m = 0 erhält man die obige Legendre'sche Differentialgleichung.

Die Variablentransformation $x = \cos \theta$ überführt diese Gleichung in die folgende Form (siehe Anhang A2.5.1):

$$(1 - x2)f''(x) - 2xf'(x) + l(l+1)f(x) = 0.$$
(14.99)

Ein Frobenius-Potenzreihenansatz für f(x) liefert die charakteristische Gleichung k(k-1) = 0 mit den Lösungen $k_1 = 1$ und $k_2 = 0$. Die nächste Ordnung ergibt dieselbe Bedingung, d.h., wir können die Koeffizienten a_0 und a_1 frei wählen. Koeffizientenvergleich zur Potenz x^n ergibt die Gleichung

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - n(n-1)a_n - 2a_n + l(l+1)a_n = 0$$
(14.100)

und damit die Rekursionsgleichung für die Koeffizienten von f(x):

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \tag{14.101}$$

oder

$$a_{n+2} = -\frac{(l+(n+1))(l-n)}{(n+2)(n+1)}a_n.$$
(14.102)

Die Lösung für die Koeffizienten der geraden Serie ist

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\left[(l-2n+2)(l-2n+4)\dots(l-2)l\right]\left[(l+1)(l+3)\dots(l+2n-1)\right]}{(2n)!} a_0$$
(14.103)

und für die ungerade Serie erhalten wir

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{\left[(l-2n+1)(l-2n+3)\dots(l-3)(l-1)\right]\left[(l+2)(l+4)\dots(l+2n)\right]}{(2n)!} a_1.$$
(14.104)

Aus der Rekursionsgleichung 14.101 erhalten wir für den Konvergenzradius der Serie:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+2} \right| = 1.$$
(14.105)

Offensichtlich verhalten sich die Koeffizienten für sehr große Werte von n wie die Koeffizienten der harmonischen Reihe (es gilt $(n + 2)a_{n+2} = na_n$) und damit divergieren die Reihen im Allgemeinen für $x = \pm 1$.

Bisher haben wir angenommen, dass l(l+1) eine beliebige reelle Zahl sein kann. Soll es sich, wie bei der Polargleichung, um reguläre Funktionen auf der Kugeloberfläche handeln, wobei die Punkte $x = \pm 1$ bzw. $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ den Polen der Kugel entsprechen, müssen die Funktionen bei $x = \pm 1$ beschränkt bleiben. Dies passiert nur, wenn die Reihen nach endlich vielen Termen abbrechen. Dafür muss l eine positive ganze Zahl sein (statt l = n könnte man auch l = -n - 1 wählen, allerdings führt das zu denselben Polynomen und auch der Ausdruck l(l+1) = n(n+1) = -(n+1)(-n) bleibt derselbe, daher wählt man l positiv). In diesem Fall bricht entweder die gerade (falls l gerade) oder die ungerade Reihe (falls l ungerade) ab und wir erhalten als Lösung der Differentialgleichung ein Polynom, das bei $x = \pm 1$ endlich ist. Dies ist ein Beispiel für eine sogenannte *Quantisierungsbedingung* für bestimmte Parameter: Physikalisch sinnvolle Lösungen gibt es nur für einen diskreten Satz dieser Parameter. Dies erklärt auch, weshalb in Gl. 14.33 die freie Konstante in der Form l(l+1) parametrisiert wurde.

Diese Polynome bezeichnet man als Legendre-Polynome $P_l(x)$. Meist werden die Polynome so normiert, dass $P_l(1) = 1$. Die ersten Polynome sind:

$$P_0(x) = 1 (14.106)$$

$$P_1(x) = x (14.107)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{14.108}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \tag{14.109}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \tag{14.110}$$

Abschnitt 15.3.1 und Anhang A2.5.1 beziehen sich nochmals auf Legendre-Polynome.

14.5.5 Die Hermite'sche Differentialgleichung

Die Hermite'sche Differentialgleichung lautet:

$$f''(x) - 2xf'(x) + 2\alpha f(x) = 0.$$
(14.111)

Die charakteristische Gleichung ist k(k-1) = 0 mit den regulären Lösungen $k_2 = 0$ und $k_1 = 1$. Die nächste Ordnung (Gl. 14.73) liefert $a_1(k(k+1)) = 0$ und ist somit für k = 0 ebenfalls erfüllt. Hier können wir a_0 und a_1 unabhängig wählen. Für k = 1 muss $a_1 = 0$ gelten und wir erhalten nur ungerade Terme, letztendlich also dieselbe Reihe wie für k = 0 mit $a_0 = 0$. Sowohl für $k_2 = 0$ als auch

14.5. GESCHLOSSEN LÖSBARE GLEICHUNGEN

für $k_1 = 1$ setzen wir $a_1 = 0$ (man beachte, dass für k = 1 der führende Term - also zum Koeffizienten a_0 - in x linear ist; setzt man $a_1 = 0$ so bedeutet dies, dass der Koeffizient zu x^2 verschwindet).

Die Rekursionsgleichung für $k_2 = 0$ und $n \ge 2$ lautet

$$a_n n(n-1) + a_{n-2}(-2(n-2)+2\alpha) = 0$$
 oder $a_n = \frac{2(n-2-\alpha)}{n(n-1)}a_{n-2}$, (14.112)

und die zu $k_1 = 1$ (beginnend mit n = 3):

$$a_n n(n+1) + a_{n-2}(-2(n-1)+2\alpha) = 0$$
 oder $a_n = \frac{2(n-1-\alpha)}{n(n+1)}a_{n-2}$. (14.113)

Wir betrachten die ersten Terme in diesen Potenzreihenentwicklungen für die Funktionen zu $k_1 = 1$ und $k_2 = 0$:

$$f_1(x) = a_0 x \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{3!} x^2 + \frac{2^2(1-\alpha)(3-\alpha)}{5!} x^4 + \frac{2^3(1-\alpha)(3-\alpha)(5-\alpha)}{7!} x^6 + \dots \right) (14.114)$$

$$f_2(x) = a_0 \left(1 + \frac{2(-\alpha)}{2!} x^2 + \frac{2^2(-\alpha)(2-\alpha)}{4!} x^4 + \frac{2^3(-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)}{6!} x^6 + \dots \right)$$
(14.115)

Für sehr hohe Terme in dieser Reihenentwicklung ist α vernachlässigbar und die Koeffizienten verhalten sich wie (man beachte, dass $2 \cdot 4 \cdot 6 \dots = 2^n n!$):

$$a_{2n} \longrightarrow \frac{2^{2n}n!}{(2n)!} \approx \frac{1}{n!}$$
 (14.116)

und damit verhalten sich die Funktionen für große Werte von x wie $\exp(x^2)$. Ist jedoch $\alpha = N \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl, endet eine der beiden Reihen nach endlich vielen Termen, weil dann im Zähler mit 0 multipliziert wird. Wir erhalten also zu jedem $\alpha = N \in \mathbb{N}$ eine Potenzreihe als Lösung. Ist N gerade, ist auch diese Potenzreihe gerade, andernfalls ist die Potenzreihe ungerade. Es gilt also $f(-x; N) = (-1)^N f(x; N)$. Dies ist ein weiteres Beispiel für eine Quantisierungsbedingung.

Die ersten Hermite-Polynome sind:

$$H_0(x) = 1 (14.117)$$

$$H_1(x) = 2x (14.118)$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 (14.119)$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x (14.120)$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12. (14.121)$$

Die Normierung wird meist so gewählt, dass der führende Term x^N den Koeffizienten 2^N hat. Abschnitt 15.3.2 und Anhang A2.5.3 gehen nochmals auf Hermite-Polynome ein.

14.5.6 Hypergeometrische Funktionen

Die hypergeometrische Differentialgleichung lautet:

$$x(1-x)f''(x) + (c - (a+b+1)x)f'(x) - abf(x) = 0.$$
(14.122)

Viele Differentialgleichungen lassen sich durch eine geeignete Variablentransformation in diese Form bringen. Ein Beispiel ist die Legendre'sche Differentialgleichung (14.99), die durch die Substitution x = 1 - 2y zur hypergeometrischen Differentialgleichung mit a = -l, b = l + 1 und c = 1 wird.

Die charakteristische Gleichung für einen Frobenius-Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$ ist:

$$a_0k(k - (1 - c)) = 0 \tag{14.123}$$

mit den beiden Lösungen k = 0 und k = 1 - c. Sofern c keine ganze Zahl ist, erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen. Andernfalls muss man nach dem Verfahren aus Abschnitt 14.3 eine zweite, linear unabhängige Lösung konstruieren.

Die Rekursionsgleichung für die Koeffizienten lautet:

$$(n(n+1) + c(n+1))a_{n+1} - (n(n-1) + (a+b+1)n + ab))a_n = 0$$
(14.124)

bzw.

$$a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{((n+c)(n+1))}a_n \tag{14.125}$$

mit der Lösung:

$$a_n = \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} (k+a)\right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (k+b)\right)}{\left(\prod_{k=0}^{n-1} (k+c)\right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)\right)} a_0.$$
(14.126)

Die Produkte kann man auch durch die Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ ($\Gamma(x)$ erfüllt die Rekursionsgleichung $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$) ausdrücken:

$$\prod_{k=0}^{n-1} (k+x) = \frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(x)} \equiv (x)_n \,. \tag{14.127}$$

 $(x)_n$ bezeichnet man auch als *Pochhammer-Symbol*) (benannt nach dem deutschen Mathematiker Leo August Pochhammer (1841–1920)). Eine andere gebräuchliche Notation ist $(x)_n = (x, n)$. Die Lösung der Differentialgleichung zu k = 0 ist

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \equiv {}_2F_1(a, b, c; x)$$
(14.128)

Die Funktion $_2F_1(a, b, c; x)$ bezeichnet man als hypergeometrische Reihe (oder manchmal auch als Gauß'sche hypergeometrische Funktion oder gewöhnliche hypergeometrische Funktion). Die sogenannte verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ist definiert durch

$${}_{p}F_{q}(a_{1},...,a_{p};b_{1},...,b_{q};x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_{1})_{n}...(a_{p})_{n}}{(b_{1})_{n}...(b_{p})_{n}} \frac{x^{n}}{n!}.$$
(14.129)

Diese Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, dass das Verhältnis von zwei aufeinanderfolgenden Koeffizienten eine gebrochen rationale Funktion des Entwicklungsparameters ist:

$$a_{n+1} = \frac{(n+a_1)\dots(n+a_p)}{(n+b_1)\dots(n+b_q)(n+1)}a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}a_n.$$
(14.130)

Die (im Prinzip komplexen) Zahlen $\{-a_i\}$ und $\{-b_i\} \cup \{-1\}$ sind die Nullstellen von P(n) bzw. Q(n). Die Nullstellen von Q(n) dürfen keine positiven ganzen Zahlen sein, ansonsten ist die Reihe nicht definiert. Handelt es sich bei einer Nullstelle von P(n) um eine positive ganze Zahl, bricht die Reihe ab und die Funktion wird zu einem endlichen Polynom.

Viele bekannte Funktionen lassen sich durch verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen

darstellen. Die folgende Liste ist nur eine kleine Auswahl:

$$e^x = {}_0F_0(\ ; \ ; x)$$
 (14.131)

$$(1-x)^{-a} = {}_{1}F_{0}(a; ;x)$$
(14.132)

$$\cos x = {}_{0}F_1\left(\;;\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4}\right) \tag{14.133}$$

$$\sin x = x_0 F_1\left(\begin{array}{c} ;\frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4} \end{array} \right) \tag{14.134}$$

$$L_n^{\alpha}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n;\alpha+1;x) \quad \text{(assoziierte Laguerre-Polynome)} \quad (14.135)$$

$$J_{\nu}(x) = \frac{(\bar{2}^{x})}{\Gamma(\nu+1)} {}_{0}F_{1}(;\nu+1;-\frac{1}{4}x^{2})$$
(Bessel-Funktion) (14.136)
$$P_{l}(x) = {}_{2}F_{1}(-l;l+1;1;\frac{1-x}{2})$$
(Legendre-Polynom) (14.137)

$$P_l(x) = {}_2F_1\left(-l; l+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) \qquad \text{(Legendre-Polynom)}$$

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} {}_1F_1(-n; \frac{1}{2}; x^2) \qquad (\text{gerade Hermite-Polynome}) \qquad (14.138)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2x_1 F_1(-n; \frac{3}{2}; x^2) \quad \text{(ungerade Hermite-Polynome)} \quad (14.139)$$

Kapitel 15

Sturm-Liouville-Theorie

In diesem Kapitel betrachten wir die Ergebnisse des letzten Kapitels (insbesondere die Ergebnisse zu gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung) nochmals unter einem anderen Blickwinkel. Während im letzten Kapitel die Lösungen von Differentialgleichungen im Vordergrund standen, geht es in diesem Kapitel eher um Eigenschaften dieser Lösungen, insbesondere insofern sie sich als Eigenfunktionen von selbst-adjungierten Operatoren darstellen lassen.

15.1 Selbst-adjungierte Operatoren

15.1.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Es gibt viele verschiedene Funktionenräume, die separable Hilbert-Räume sind. In einer Klasse wie $\mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu)$ sind sowohl der Definitionsbereich Γ als auch das Maß d μ vergleichsweise frei wählbar. Die Beispiele in diesem Kapitel treten in der Physik gelegentlich auf. Sie alle sind mit einem Satz von Funktionen - oftmals Polynomen - verbunden, die bezüglich des angegebenen Integrationsmaßes orthogonal sind.

In den Abschnitten zur linearen Algebra haben wir uns ausführlich mit selbst-adjungierten linearen Abbildungen beschäftigt. In Hilbert-Räumen spricht man eher von selbst-adjungierten Operatoren, doch wie wir in Kapitel 12 gesehen haben, gelten die wesentlichen Aussagen auch hier: Selbstadjungierte Operatoren haben reelle Eigenwerte, ihre Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal und es gibt eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

Im Folgenden untersuchen wir eine spezielle Klasse von Operatoren, die sogenannten Sturm-Liouville-Operatoren. Dabei handelt es sich um selbst-adjungierte Operatoren, definiert auf Funktionen über einem Intervall $\Gamma = [a, b] \in \mathbb{R}$, wobei die Grenzen auch gegen unendlich gehen dürfen, d.h., die gesamte reelle Achse oder eine Halbachse umfassen.

Die folgenden Beziehungen hatten wir schon in Kap. 12.2 erwähnt: In einem Hilbert-Raum $\mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu(x))$ bezeichnet man einen Satz von Funktionen $\{\psi_n(x)\}$ als (paarweise) orthonormal, wenn für je zwei Funktionen aus diesem Satz gilt:

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \int_{\Gamma} \overline{\psi_n(x)} \, \psi_m(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \delta_{nm} \,. \tag{15.1}$$

Eine abzählbare Menge $\{\psi_n(x)\}$ orthonormaler Funktionen heißt *Basis*, wenn gilt:

$$\langle \psi_n | \phi \rangle = \int_{\Gamma} \overline{\psi_n(x)} \phi(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = 0 \quad \forall n \implies \phi(x) = 0.$$
 (15.2)

Es gibt also keine nicht-verschwindende Funktion $\phi(x)$, deren Skalarprodukt mit allen Elementen $\psi_n(x)$ verschwindet.

Schließlich heißt ein Operator \mathcal{D}^{\dagger} in einem Hilbert-Raum $\mathcal{L}^{2}(\Gamma, d\mu(x) \text{ adjungiert zu einem})$ Operator \mathcal{D} , wenn für alle Vektoren $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ gilt:

$$\langle \mathcal{D}^{\dagger}\phi|\psi\rangle = \langle \phi|\mathcal{D}^{\dagger}\psi\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad \int_{\Gamma} \overline{\mathcal{D}^{\dagger}\phi(x)}\psi(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Gamma} \overline{\phi(x)}\mathcal{D}\psi(x)\mathrm{d}\mu(x) \,.$$
(15.3)

Ein Operator heißt selbst-adjungier in $\mathcal{L}^2(\Gamma, d\mu(x) \text{ wenn } \mathcal{D}^{\dagger} = \mathcal{D}.$

15.1.2 Selbst-adjungierte Operatoren bezüglich des Standardmaßes

Wir betrachten nun einen Differential
operator ${\mathcal D}$ der Form

$$\mathcal{D}\phi = \left(g_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + g_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + g_0(x)\right)\phi(x)\,,\tag{15.4}$$

wobei die Funktionen $g_i(x)$ zunächst beliebige, allerdings reell-wertige Funktionen sind.¹ Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Operatoren selbst-adjungiert sind. Ohne Berücksichtigung von Randtermen (darauf geht Abschnitt 15.1.4 ein) gilt:

$$\int \overline{\psi(x)} \mathcal{D}\phi(x) \,\mathrm{d}x = \int \overline{\psi(x)} \left(g_2(x)\phi''(x) + g_1(x)\phi'(x) + g_0(x)\phi(x) \right) \mathrm{d}x \tag{15.5}$$

$$= \int \left((g_2(x) \overline{\psi(x)})'' - (g_1(x) \overline{\psi(x)})' + g_0(x) \overline{\psi(x)} \right) \phi(x) \,\mathrm{d}x \tag{15.6}$$

$$= \int \left(g_2(x)\overline{\psi''(x)} + 2g_2'(x)\overline{\psi'(x)} + g_2''(x)\overline{\psi(x)} \right)$$
(15.7)

$$-g_1'(x)\overline{\psi(x)} - g_1(x)\overline{\psi'(x)} + g_0(x)\overline{\psi(x)}\right)\phi(x)\,\mathrm{d}x\tag{15.8}$$

$$= \int \left(g_2(x)\overline{\psi''(x)} + (2g_2'(x) - g_1(x))\overline{\psi'(x)} + (g_2''(x) - g_1'(x) + g_0)\overline{\psi(x)}\right)\phi(x) dx$$

$$= \int \overline{(\mathcal{D}^{\dagger}\psi(x))}\phi(x) dx$$
(15.9)

mit

$$\mathcal{D}^{\dagger}\psi(x) = \left(g_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (2g_2'(x) - g_1(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + (g_2''(x) - g_1'(x) + g_0(x))\right)\psi(x).$$
(15.10)

Im ersten Schritt wurde partiell integriert und vorausgesetzt, dass die Randterme verschwinden (beim ersten Term wurde zweimal, beim zweiten einmal partiell integriert); der Rest sind Zusammenfassungen der dabei entstandenen Ausdrücke. Offensichtlich ist \mathcal{D} selbst-adjungiert, also $\mathcal{D}^{\dagger} = \mathcal{D}$, wenn

$$2g'_2(x) - g_1(x) = g_1(x)$$
 bzw. $g'_2(x) = g_1(x)$. (15.11)

(Damit gilt natürlich auch $g_2''(x) - g_1'(x) = 0$.) Ein (reeller) selbst-adjungierter Differentialoperator zweiter Ordnung hat also die Form

$$\mathcal{L}\phi(x) = \left(g_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + g'_2(x)\frac{d}{dx} + g_0(x)\right)\phi(x)$$
(15.12)

¹Verallgemeinerungen auf komplex-wertige Koeffizientenfunktionen sind möglich, diese treten in der Physik jedoch selten auf. Eine Ausnahme ist der Operator i $\frac{d}{dx}$, den wir in Kap. 12 gesondert betrachtet haben. Soll \mathcal{D} selbst-adjungiert sein, ergeben sich daraus auch Einschränkungen an die Imaginärteile: $\operatorname{Im}(g_2(x)) = 0$ und $\operatorname{Im}(g_1(x)') = 2\operatorname{Im}(g_0(x))$.

15.1. SELBST-ADJUNGIERTE OPERATOREN

oder

$$\mathcal{L}\phi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(g_2(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \phi(x) \right) + g_0(x)\phi(x) \, . \tag{15.13}$$

Operatoren dieser Form bezeichnet man als *Sturm-Liouville-Operatoren*. Für solche Operatoren verwende ich im Folgenden das Symbol \mathcal{L} .

15.1.3 Selbst-adjungierte Operatoren bezüglich eines verallgemeinerten Maßes

Wir können die Klasse selbst-adjungierter Differentialoperatoren noch erweitern, indem wir ein allgemeineres Maß $d\mu(x) = w(x) dx$ zulassen. Hierbei sei w(x) reell und nicht negativ. Außerdem habe w(x) höchstens isolierte Nullstellen. Angenommen, \mathcal{D} sei selbst-adjungiert bezüglich des Maßes w(x)dx, d.h. es gelte:

$$\int \overline{\psi(x)} \mathcal{D}\phi(x) w(x) dx = \int \overline{(\mathcal{D}\psi(x))} \phi(x) w(x) dx.$$
(15.14)

Eine andere Klammerung von w(x) gibt uns die Gleichung:

$$\int \overline{\psi(x)} (w(x)\mathcal{D}\phi(x)) \, \mathrm{d}x = \int \overline{(w(x)\mathcal{D}\psi(x))} \phi(x) \, \mathrm{d}x \,, \tag{15.15}$$

d.h., $\mathcal{L} = w(x)\mathcal{D}$ ist selbst-adjungiert bezüglich des Maßes dx, hat also die Form von Gl. 15.13. Mit dieser Freiheit, einen Differentialoperator \mathcal{D} mit einer Funktion w(x) multiplizieren zu können (und gleichzeitig das Integrationsmaß $d\mu(x) = w(x)dx$ zu verwenden), kann aber ein beliebiger Operator der Form 15.4 in die Form 15.13 gebracht werden. Betrachtet man nämlich

$$w(x)\mathcal{D} = w(x)g_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + w(x)g_1(x)\frac{d}{dx} + w(x)g_0(x)$$
(15.16)

und verlangt, dass dieser Operator die Form 15.12 hat, führt dies auf die Bedingung:

$$w(x)g_1(x) = (w(x)g_2(x))'$$
(15.17)

bzw.

$$\tilde{w}(x)\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \tilde{w}'(x) \quad \text{mit } \tilde{w}(x) = w(x)g_2(x).$$
 (15.18)

Damit ist

$$\tilde{w}(x) = \exp\left(\int^x \frac{g_1(y)}{g_2(y)} \mathrm{d}y\right) \qquad \text{bzw} \qquad w(x) = \frac{1}{g_2(x)} \exp\left(\int^x \frac{g_1(y)}{g_2(y)} \mathrm{d}y\right). \tag{15.19}$$

Die untere Grenze des Integrals kann beliebig gewählt werden. Sie dient meist einer geeigneten Normierung der Funktion $g_2(x)$. Die Einschränkung auf Operatoren der Form 15.13 ist daher keine wirkliche Einschränkung, da man jeden linearen Differentialoperator 2. Ordnung (Einschränkungen an die Funktionen $g_i(x)$ werden wir noch untersuchen) in die gewünsche Form bringen kann.

Anders ausgedrückt: Sei \mathcal{D} ein allgemeiner Differentialoperator (2. Ordnung) der Form Gl. 15.4. Dann können wir nach Gl. 15.19 eine Gewichtsfunktion w(x) bzw. ein Maß $d\mu(x) = w(x) dx$ bestimmen, sodass \mathcal{D} bezüglich dieses Integrationsmaßes selbst-adjungiert ist.

Beispiel: Die Hermite'sche Differentialgleichung

Die Hermite'sche Differentialgleichung (siehe Abschnitt 15.3.2) lautet:

$$H''(x) - 2xH'(x) + kH(x) = 0. (15.20)$$

Sie ist nicht von der Form 15.12, allerdings wird sie mit der Gewichtsfunktion $w(x) = \exp(-x^2)$ zu

$$\exp(-x^2)H''(x) - 2x\exp(-x^2)H'(x) + k\exp(-x^2)H(x) = 0$$
(15.21)

und damit ist nun $g_1(x) = g'_2(x)$. Die Lösungen der Hermite'schen Differentialgleichungen sind Polynome, die bezüglich des Maßes $d\mu(x) = \exp(-x^2)dx$ orthogonal sind (siehe auch Abschnitt 15.3.2).

15.1.4 Randbedingungen

Wir haben bei der Herleitung der selbst-adjungierten Sturm-Liouville-Operatoren bisher keine Randterme betrachtet. Diese können bei der partiellen Integration auftreten und würden dazu führen, dass der Operator \mathcal{L} in Gl. 15.13 trotz dieser Form nicht selbst-adjungiert ist. Nun sollen die Bedingungen untersucht werden, damit solche Randterme nicht auftreten.

Es handele sich bei Γ um das Intervall [a, b], dann soll gelten:

$$\int_{a}^{b} \overline{\psi(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(g_{2}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \phi(x) \right) \mathrm{d}x = \int_{a}^{b} \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} \left(g_{2}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \psi(x) \right) \phi(x) \mathrm{d}x \,. \tag{15.22}$$

Für die Herleitung dieser Gleichung wurde zweimal partiell integriert und die Summe der beiden Randterme, die dabei auftreten, soll somit verschwinden. Das führt auf die Bedingung:

$$g_2(x)\overline{\psi(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x)\Big|_a^b - g_2(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overline{\psi(x)}\right)\phi(x)\Big|_a^b = 0.$$
(15.23)

oder

$$g_2(x)\left(\overline{\psi(x)}\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\overline{\psi(x)}}{\mathrm{d}x}\phi(x)\right)\Big|_a^b = 0 \qquad \forall \psi(x), \phi(x) \in \mathcal{L}^2(\Gamma, \mathrm{d}x).$$
(15.24)

Verschwindet die Funktion $g_2(x)$ auf dem Rand des Gebiets (ist also $g_2(a) = g_2(b) = 0$), so gibt es keine Einschränkungen an die Funktionen $\phi(x), \psi(x)$ und ihre Ableitungen auf dem Rand, außer, dass sie endlich bleiben. Ist $g_2(x)$ auf dem Rand des Gebiets von 0 verschieden, muss die Kombination $\overline{\psi}\phi' - \overline{\psi}'\phi$ auf dem Rand verschwinden. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass es Zahlen $\alpha_{a/b}$ und $\beta_{a/b}$ gibt, sodass

$$\alpha_a \phi(a) + \beta_a \phi'(a) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_b \phi(b) + \beta_b \phi'(b) = 0 \quad \forall \phi(x) \in \mathcal{L}^2(\Gamma, \mathrm{d}x) \,. \tag{15.25}$$

Rein Dirichlet'sche Randbedingungen ($\phi(a) = \phi(b) = 0$) oder rein von Neumann'sche Randbedingungen ($\phi'(a) = \phi'(b) = 0$) sind also möglich, aber auch die hier angegebenen verallgemeinerten Linearkombinationen aus dem Wert von ϕ und seiner Ableitung an den Randpunkten. Wichtig ist dabei, dass alle Elemente des Hilbert-Raums $\mathcal{L}^2(\Gamma, dx)$ dieselben Randbedingungen (15.25) erfüllen; die Konstanten $\alpha_{a/b}$ und $\beta_{a/b}$ hängen also nicht von der Funktion ϕ ab. Da diese Randbedingungen homogen und linear in den Feldern sind, bleiben sie auch unter Linearkombinationen erhalten, d.h., wenn zwei Felder ϕ und ψ die Randbedingungen erfüllen, dann erfüllen auch beliebige Linearkombinationen $a\phi + b\psi$ diese Randbedingungen. Diese Felder bilden also einen Vektorraum und somit können wir den Hilbert-Raum der quadratintegrierbaren Felder mit diesen Randbedingungen bilden.

Diese Randbedingung sind auch der Grund, weshalb viele der Differentialgleichungen nur Lösungen für diskrete Eigenwerte haben. Wie der Froebenius-Ansatz gezeigt hat, gibt es zu jedem
Man beachte, dass es sich hier nicht um Anfangswertbedingungen handelt (also beispielsweise ϕ und seine Ableitung ϕ' an einem Punkt vorgegeben werden), sondern um Bedingungen, bei denen die Funktionen (oder ihre Ableitung, oder eine Kombination aus der Funktion und ihrer Ableitung) an zwei verschiedenen Punkten vorgegeben wird.

15.2 Sturm-Liouville-Probleme

Viele der Differentialgleichungen aus Kap. 14 hatten die Form von Eigenwertgleichungen:

$$\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x) = -l(l+1)f(x) \qquad \text{(Legendre)} \qquad (15.26)$$

$$\left(x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (c-(a+b+1)x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x) = -abf(x) \quad \text{(hypergeometrisch)} \quad (15.27)$$

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x) = 2\alpha f(x) \qquad (\text{Hermite}) \tag{15.28}$$

$$\left(x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x^2\right) f(x) = n^2 f(x) \qquad (\text{Bessel}) \tag{15.29}$$

Mit Ausnahme der Legendre'schen Differentialgleichung ist jedoch keiner der Differentialoperatoren auf der linken Seite ein Sturm-Liouville-Operator, also von der Form 15.13. Wir betrachten nun jedoch die Gleichung:

$$\mathcal{L}f_{\lambda}(x) = \lambda w(x)f_{\lambda}(x), \qquad (15.30)$$

wobei \mathcal{L} ein Sturm-Liouville-Operator (also selbst-adjungiert) und w(x) eine reelle, nicht negative Funktion mit höchstens isolierten Nullstellen sein soll. Man erhält diese Gleichung aus einer Eigenwertgleichung für einen Differentialoperator \mathcal{D} ,

$$\mathcal{D}f_{\lambda}(x) = \lambda f_{\lambda}(x), \qquad (15.31)$$

wenn man beide Seiten mit der Gewichtsfunktion w(x) multipliziert, wobei w(x) so gewählt wird, dass $\mathcal{L} = w(x)\mathcal{D}$ ein Sturm-Liouville-Operator ist.

Wir zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen wiederum λ reell ist und die Funktionen $f_{\lambda}(x)$ zu verschiedenen Zahlen λ orthogonal sind. Der Beweis erfolgt vollkommen analog zu dem entsprechenden Beweis für die Eigenwertgleichungen selbst-adjungierter Operatoren.

Da \mathcal{L} selbst-adjungiert ist, gilt:

$$0 = \int_{\Gamma} \overline{f_{\lambda'}(x)} \mathcal{L}f_{\lambda}(x) \, \mathrm{d}x - \int_{\Gamma} \overline{\mathcal{L}f_{\lambda'}(x)} \, f_{\lambda}(x) \, \mathrm{d}x$$
(15.32)

$$= (\lambda - \overline{\lambda}') \int_{\Gamma} \overline{f_{\lambda'}(x)} f_{\lambda}(x) w(x) dx \qquad (15.33)$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda = \lambda'$: Der Integrand ist dann eine nicht-verschwindende positive Funktion $(|f_{\lambda}(x)|^2 w(x))$, daher ist das Integral in diesem Fall von 0 verschieden. Damit muss $\lambda = \overline{\lambda}$ sein und somit λ reell. Andererseits muss für $\lambda \neq \lambda'$ das Integral verschwinden, sofern die obige Gleichung gelten soll. Das bedeutet, die Funktionen $\{f_{\lambda}(x)\}$ sind für verschiedene λ bezüglich des Maßes w(x)dx orthogonal. Da \mathcal{L} bezüglich des Standardmaßes dx ein Sturm-Liouville-Operator und damit selbst-adjungiert sein soll, ist $\mathcal{D} = \frac{1}{w(x)}\mathcal{L}$ bezüglich des Maßes w(x)dx selbst-adjungiert.

Wir können nun das allgemeine, reguläre Sturm-Liouville-Problem definieren: Sei

$$\mathcal{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(p(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \phi(x) \right) + q(x)\phi(x)$$
(15.34)

ein Sturm-Liouville-Operator, definiert auf einem Intervall $\Gamma = [a, b]$ (wobei die Intervallgrenzen auch gegen unendlich gehen dürfen). Hierbei habe ich entsprechend der allgemeinen Konvention $g_2(x) = -p(x)$ und $g_0(x) = q(x)$ gesetzt. Sei weiterhin auf dem Rand des Intervalls entweder p(a) = 0bzw. p(b) = 0 oder die Elemente von $\mathcal{L}^2(\Gamma, \mathrm{d}x)$ erfüllen die Randbedingungen

$$\alpha_a \phi(a) + \beta_a \phi'(a) = 0 \qquad \text{bzw} \qquad \alpha_b \phi(b) + \beta_b \phi'(b) = 0 \qquad \forall \phi(x) \in \mathcal{L}^2(\Gamma, \mathrm{d}x) \,, \tag{15.35}$$

wobei die beiden Konstanten an einem Randpunkt nicht gleichzeitig verschwinden dürfen. Dann bezeichnet man die Gleichung

$$\mathcal{L}\phi(x) = \lambda w(x)\phi(x) \tag{15.36}$$

als verallgemeinerte Eigenwertgleichung des Sturm-Liouville-Problems, wobei w(x) eine positive und integrierbare Funktion sein soll, die entsprechend der früheren Überlegungen aus einem allgemeinen Differentialoperator zweiter Ordnung einen Sturm-Liouville-Operator macht.

15.3 Polynomsysteme

Die bisherigen Überlegungen gelten noch ganz allgemein, sofern sich das Maß in der Form $d\mu(x) = w(x)dx$ schreiben lässt, wobei w(x) eine nicht-negative Funktion $(w(x) \ge 0)$ mit höchstens isolierten Nullstellen sein soll. Ist jedoch zusätzlich die Bedingung $\int_{\Gamma} x^{2n}w(x)dx < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, kann man einen vollständigen Satz orthogonaler Polynome $\{p_n(x)\}$ konstruieren, indem man mit $p_0 = 1$ startet und sukzessive nach dem Gram-Schmidt-Verfahren aus den Potenzen x, x^2, x^3, \dots diese Polynome $p_n(x)$ berechnet. $p_n(x)$ hat den Grad n, und falls w(x) eine gerade Funktion ist (also w(-x) = w(x)) und der Integrationsbereich ebenfalls symmetrisch zum Nullpunkt liegt, haben die Polynome die Eigenschaft $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$, sind also entweder gerade oder ungerade.

Aus den Polynomen kann man Funktionen $\phi_n(x) = p_n(x)\sqrt{w(x)}$ bilden, die bezüglich des Standardmaßes orthogonal sind. Man kann zeigen, dass für die Polynome $p_n(x)$ (und auch die Funktionen $\phi_n(x)$) Rekurrenzrelationen der Form

$$a_n p_{n+1}(x) = (b_n + c_n x) p_n(x) - d_n p_{n-1}(x), \qquad (15.37)$$

gelten, wobei a_n, b_n, c_n, d_n (oft einfache) Konstanten sind. Außerdem erfüllen sie Differentialgleichungen der Form

$$f_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}p_n(x) + f_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_n(x) + f_0(x)p_n(x) = 0$$
(15.38)

mit (ebenfalls oft einfachen) Funktionen $f_i(x)$. In vielen Fällen gibt es eine erzeugende Funktion g(t, x), sodass

$$g(t,x) = \sum_{n} a_n p_n(x) t^n , \qquad (15.39)$$

und auch hier haben die Koeffizienten meist eine einfache Form, z.B. $a_n \equiv 1$ oder $a_n = 1/n!$. Durch Ableitung dieser erzeugenden Funktionen nach x und nach t kann man dann die Rekurrenzrelationen und die Differentialgleichungen herleiten. Auch die Orthogonalität lässt sich oft daraus beweisen, indem man von dem Integral

$$\int_{\Gamma} g(t,x)g(s,x)\,w(x)\mathrm{d}x = \int_{\Gamma} w(x)\sum_{m,n=0}^{\infty} a_n a_m p_n(x)p_m(x)t^m s^n\,\mathrm{d}x$$
(15.40)

zeigt, dass die linke Seite nur eine Funktion von (st) ist und somit auf der rechten Seite nur Terme der Form $(st)^n$ auftreten bzw. alle Terme der Form $s^m t^n$ für $m \neq n$ verschwinden. Einige Beispiele dafür betrachten wir hier; viele Relationen sind in Anhang A2.5 bewiesen.

15.3.1 Die Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ sind orthogonale Polynome auf dem Intervall [-1, 1]. Es gilt:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \,. \tag{15.41}$$

Setzen wir $x = \cos \theta$ und somit $dx = |\sin \theta| d\theta$ so folgt

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \,. \tag{15.42}$$

Es gibt eine sogenannte erzeugende Funktion g(t, x), deren Entwicklung nach Potenzen von t die Legendre-Polynome generiert:

$$g(t,x) = \frac{1}{(1-2tx+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$
 (15.43)

Die Bedeutung der Legendre-Polynome im Zusammenhang mit den Winkelfunktionen sowie die Bedeutung der erzeugenden Funktion wird deutlich, wenn man eine Entwicklung der Green'schen Funktion zum Laplace-Operator nach Potenzen von r betrachtet:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{(r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2)^{1/2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2}}.$$
 (15.44)

Für r > r' erhalten wir somit eine Entwicklung der Form:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^n.$$
(15.45)

Entwicklungen dieser Art treten beispielsweise als Multipolentwicklungen in der Elektrodynamik auf.

15.3.2 Die Hermite-Polynome

Die Hermite-Polynome $\{H_n(x)\}$ sind bezüglich des Maßes

$$\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \tag{15.46}$$

orthogonal, es gilt also:

$$\langle H_n | H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = ||H_n||^2 \delta_{mn}.$$
 (15.47)

Für die Normierung definiert man meist:

$$||H_n||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = 2^n \, n! \sqrt{\pi} \,.$$
(15.48)

Auf diese Weise hat der Koeffizient der führenden Potenz den Wert 2^n . $H_n(x)$ ist vom Grade n. Die Funktionen

$$\psi_n(x) = H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{15.49}$$

bilden daher eine Orthogonalbasis von $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Sie treten in der Quantenmechanik des harmonischen Oszillators auf. Für *n* gerade sind die Hermite-Polynome gerade Funktionen, für *n* ungerade sind sie ungerade; d.h. es gilt:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). (15.50)$$

Man erhält sie durch eine Gram-Schmidt-Orthogonalisierung der Potenzfunktionen $1, x, x^2, ...$ bezüglich des obigen Maßes. Die Funktionen $\psi_n(x)$ erfüllen die Differentialgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_n(x) + x^2\psi_n(x) = (2n+1)\psi_n(x).$$
(15.51)

Dies ist eine Eigenwertgleichung zu einem selbst-adjungierten Operator, womit nochmals gezeigt wurde, dass die Funktionen $\{\psi_n(x)\}$ bezüglich des Standardmaßes orthogonal sind. Die Herleitung dieser und weiterer Identitäten finden man in Anhang A2.5.3.

15.3.3 Die Laguerre-Polynome

Die Laguerre-Polynome erfüllen die Differentialgleichung

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) = -nL_n(x).$$
(15.52)

Multipliziert man diese Differentialgleichung mit der Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-x}$ erhält man eine verallgemeinerte Eigenwertgleichung zu einem Sturm-Liouville-Operator:

$$xe^{-x}L_n''(x) + (1-x)e^{-x}L_n'(x) = -ne^{-x}L_n(x).$$
(15.53)

Daher sind die Laguerre-Polynome $\{L_n(x)\}$ orthogonal bezüglich des Maßes $d\mu(x) = e^{-x} dx$ und die Normierung wird meist so gewählt, dass sie sogar orthonormal sind:

$$\langle L_n | L_m \rangle = \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{nm} \,. \tag{15.54}$$

Dementsprechend sind die Funktionen

$$\phi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x) \tag{15.55}$$

orthonormal auf dem \mathbb{R}^+ :

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \int_0^\infty \phi_n(x) \phi_m(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{nm} \,. \tag{15.56}$$

Sie erfüllen die Differentialgleichung:

$$x\phi_n''(x) + \phi_n'(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)\phi_n(x) = 0, \qquad (15.57)$$

die man auch als Eigenwertgleichung zu einem selbst-adjungierten Operator auffassen kann.

Die Laguerre-Polynome erfüllen die Rekurrenzrelation

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$
(15.58)

Diese und weitere Relationen werden in Anhang A2.5.4 bewiesen.

Eine Erweiterung sind die sogenannten assoziierten (oder zugeordneten) Laguerre-Polynome. Man erhält sie aus den Ableitungen der Laguerre-Polynome:

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} L_{n+k}(x) \,. \tag{15.59}$$

Sie bilden ein Orthogonalsystem bezüglich der Gewichtsfunktion $w(x) = x^k e^{-x}$ und es gilt:

$$\langle L_n^k | L_m^k \rangle = \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) \, \mathrm{d}x = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm} \,. \tag{15.60}$$

Damit sind die Funktionen $\phi_n^k(x) = e^{-x/2} x^{k/2} L_n^k(x)$ ebenfalls orthogonal auf \mathbb{R}^+ :

$$\langle \phi_n^k | \phi_m^k \rangle = \int_0^\infty \phi_n^k(x) \phi_m^k(x) \,\mathrm{d}x = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm} \,. \tag{15.61}$$

Während die Funktionen $\phi_n(x) = \phi_n^0(x)$ für $x \to 0$ gegen eine Konstante gehen, gehen die Funktionen $\phi_n^k(x)$ für $x \to 0$ wie $x^{k/2}$ gegen 0. Die Laguerre-Polynome und die assoziierten Laguerre-Polynome spielen bei der Lösung des quantenmechanischen Wasserstoffproblems eine wichtige Rolle.

15.3.4 Die Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflchenfunktionen sind die Eigenfunktionen zum Laplace-Operator auf der Oberfläche der Einheitskugel. Gleichung 8.77 gibt diesen Laplace-Operator an und damit erhalten wir als Eigenwertgleichung:

$$\Delta Y(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -l(l+1)Y(\theta,\varphi) \,. \tag{15.62}$$

Ich habe hier für die Eigenwerte $\lambda = -l(l+1)$ angesetzt. Es wird sich herausstellen, dass nur für l = 0, 1, 2, 3, ..., Lösungen existieren, die auf der Kugeloberfläche eindeutige, überall definierte und stetige Funktionen sind. Das Skalarprodukt auf der Kugeloberfläche ist

$$\langle Y_1 | Y_2 \rangle = \int_0^\pi \sin \theta \left(\int_0^{2\pi} \overline{Y_1(\theta, \varphi)} \, Y_2(\theta, \varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta \,. \tag{15.63}$$

Die Eigenwertgleichung (15.62) löst man durch einen Separationsansatz in den Winkelvariablen

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi), \qquad (15.64)$$

was für $\Phi(\varphi)$ auf die sogenannte Azimutal
gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2\Phi(\varphi) \tag{15.65}$$

und für $\Theta(\theta)$ auf die Polargleichung

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta(\theta) + l(l+1)\Theta(\theta) = 0$$
(15.66)

führt. Hier tritt wieder eine freie Konstante auf, die mit m^2 bezeichnet wurde. Die Lösungen der Azimutalgleichung sind komplexe Exponentialfunktionen (Winkelfunktionen):

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (15.67)

Die Ganzzahligkeit von m folgt aus der Bedingung, dass die Funktion auf der Kugeloberfläche glatt bzw. eindeutig ist, d.h. in φ periodisch mit Periode 2π .

Die Polargleichung ist die Differentialgleichung der zugeordneten Legendre-Polynome. Die Lösungen lassen sich als Polynome in $\cos \theta$ und $\sin \theta$ schreiben. Allerdings sind die Lösungen nur dann eindeutig, wenn l eine natürliche Zahl (l = 0, 1, 2, 3, ...) ist. Außerdem gibt es eine Einschränkung für die Zahl $m: m \leq l$ (siehe Anhang A2.5.2).

Die führenden Polynome sind:

$$P_0^0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_1^1(\cos\theta) = -\sin\theta$$

$$P_2^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_2^1(\cos\theta) = -3\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^2(\cos\theta) = 3(1 - \cos^2\theta)$$
(15.68)

Allgemein gilt:

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (\sin\theta)^m \frac{\mathrm{d}^{l+m} (\cos^2\theta - 1)^l}{(\mathrm{d}\cos\theta)^{l+m}}$$
(15.69)

Insgesamt erhalten wir somit für die Lösung der Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Kugeloberfläche die Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{l}^{m}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_{l}^{m} P_{l}^{m}(\cos\theta) \exp(im\varphi), \qquad \begin{array}{l} l = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l \end{array}$$
(15.70)

Die Normierungskonstanten ${\cal N}_l^m$ sind so zu wählen, dass die Orthonormalitätsrelationen gelten:

$$\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \, \overline{Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)} \, Y_{l}^{m}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{15.71}$$

Kapitel 16

Mannigfaltigkeiten und Differentialformen

Dieses Kapitel gibt einen Einstieg in die mathematischen Grundlagen der Differentialgeometrie. Zentrales Thema ist der Begriff der Mannigfaltigkeit und des Tangentialraums. Im Gegensatz zu früheren Kapiteln (Kap. 6 und 8) behandeln wir in diesem Kapitel Mannigfaltigkeiten nicht als Einbettungen in einen euklidischen Raum sondern als topologische Räume, auf denen Karten definiert werden (bijektive Abbildungen von lokalen Umgebungen in den \mathbb{R}^n), sodass man auf diesen Räumen eine differenzierbare Struktur und weitere differentialgeometrische Konzepte wie beispielsweise Tangentialvektoren und damit Tangentialräume definieren kann.

Das Konzept von Karten haben wir dabei schon kennengelernt - in Form von Parameterräumen für eingebettete Mannigfaltigkeiten (Kapitel 8), - allerdings konnten wir wegen der Einbettung auf den Mannigfaltigkeiten direkt ableiten und integrieren. Dies wird nun verallgemeinert. Als Vorlage für die beiden ersten Abschnitte dienten die Bücher [Kobayashi-Nomizu 1963, Spivak 1965, Thirring 1988].

Solche Mannigfaltigkeiten treten unter anderem in der allgemeinen Relativitätstheorie auf, dort wird zusätzlich auf diesen Mannigfaltigkeiten die Struktur einer Metrik bzw. allgemeiner einer symmetrischen Bilinearform definiert. Sie treten aber auch in der Klassischen Mechanik auf, wo auf dem Phasenraum eine symplektische Struktur, also eine antisymmetrische Bilinearform definiert ist. Und schließlich sind sie bei der Behandlung von Lie-Gruppen und Lie-Algebren von Bedeutung, bei denen neben der differenzierbaren Struktur auf einer Mannigfaltigkeit noch eine Gruppenstruktur definiert ist. Darauf geht Kapitel **??** ein.

16.1 Mannigfaltigkeiten

Etwas vereinfacht ist eine Mannigfaltigkeit ein topologischer Raum (also eine Menge M mit einer Topologie \mathcal{T} , für die wir im Folgenden immer eine Hausdorff-Topologie annehmen wollen), der lokal, also in offenen Umgebungen von jedem Punkt, homöomorph zu offenen Umgebungen im \mathbb{R}^n ist. Einen solchen Homöomorphismus bezeichnet man als *Karte* und die Menge aller Karten als einen *Atlas*. Dies wird im Folgenden etwas genauer erläutert.

16.1.1 Karten und Atlanten

Die Metapher von Karten in einem Atlas trifft den Sachverhalt sehr gut und hilft bei der Veranschaulichung der Konzepte. Sämtliche geometrischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit M werden über diese Karten definiert und letztendlich werden wir es immer nur mit offenen Umgebungen im \mathbb{R}^n zu tun haben, aus denen sich die geometrischen Eigenschaften von M ablesen lassen.

Definition: Eine <u>Karte</u> (U, ϕ) auf einem topologischen Raum M besteht aus einer offenen Teilmenge $U \subset M$ und einer stetigen, bijektiven Abbildung (also einem lokalen Homöomorphismus)

$$\phi: U \subset M \to \mathbb{R}^n \,. \tag{16.1}$$

Da ϕ bijektiv sein soll, gibt es auch eine Umkehrabbildung ϕ^{-1} von dem Bild $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ zurück in die Mannigfaltigkeit. Wir können also bei einer Karte beliebig zwischen offenen Umgebungen in M und den zugehörigen offenen Umgebungen im \mathbb{R}^n - den eigentlichen Karten - wechseln.

Definition: Zwei Karten (U_1, ϕ_1) und (U_2, ϕ_2) auf einem topologischen Raum M heißen C^r -verträglich, wenn die Abbildungen

 $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2) \quad \text{und} \quad \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \to \phi_1(U_1 \cap U_2) \quad (16.2)$

r-mal stetig differenzierbar sind.

Handelt es sich bei $U_1 \cap U_2$ um die leere Menge, ist die Aussage trivial. Ist aber $U_1 \cap U_2$ nicht leer, ist diese Bedingung eine wesentliche Einschränkung an die Abbildungen ϕ_i . Insbesondere muss die Dimension n für beide Karten dieselbe sein.

Sehr oft verlangt man von U (und seinem Bild im \mathbb{R}^n), dass es homöomorph zu einem offenen Ball im \mathbb{R}^n ist. Das würde z.B. Polarkoordinaten als globale Karte für den $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ausschließen, da dieses Gebiet nicht mehr homömorph zur offenen Kreisscheibe ist. In diesem Fall muss das Gebiet der $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ - mit zwei oder mehr Karten überdeckt werden, z.B. bei Polarkoordinaten mit einer Karte, die den Winkel $\varphi = 0$ ausschließt, und einer zweiten Karte, die den Winkel $\varphi = \pi$ ausschließt. Wenn keine besonderen Probleme auftreten, lassen wir aber auch Karten zu, die nicht diese Eigenschaften haben - z.B. bei Polarkoordinaten.

Definition: Eine Menge von paarweise C^r -verträglichen Karten $\{U_i, \phi_i\}$ heißt C^r -<u>Atlas</u>, sofern $\bigcup U_i = M$. Ein Atlas heißt <u>vollständig</u>, wenn er nicht um weitere Karten erweitert werden kann. Haben alle Karten dieselbe Dimension n, bezeichnet man diese als die <u>Dimension</u> der Mannigfaltig-keit M.

Diese Bedingungen sind sehr intuitiv: In einem Atlas findet man möglicherweise mehrere Karten, auf denen - ganz oder teilweise - dasselbe Gebiet (Land oder Gegend) dargestellt ist. Diese Darstellungen derselben Gebiete sollen natürlich "isomorph" sein, wobei wir von diesem Isomorphismus verlangen, dass er ausreichend oft ableitbar ist. Wir setzen im Folgenden alle notwendigen Ableitbarkeitseigenschaften vorraus; meist verlangen wir von den Abbildungen, dass sie C^{∞} sind, also unendlich oft stetig differenzierbar.

Über die Karten sind wir also in der Lage auf der Mannigfaltigkeit so etwas wie Differentialund Integralrechnung zu betreiben. Dies ist auf einem einfachen topologischen Raum nicht möglich (dort ist nur der Begriff der Stetigkeit definiert). In der Mathematik spricht man daher auch von einer differenzierbaren Struktur, die auf M definiert wurde.

Haben sämtliche Abbildungen $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$, die sich konstruieren lassen, die Eigenschaft, dass ihre Jacobi-Determinante positiv ist (wegen der Bijektivität kann die Jacobi-Determinate an keinem Punkt verschwinden, sodass sie im gesamten Definitionsbereich einer solchen Abbildung entweder positiv oder negativ sein muss), spricht man auch von einem *orientierungserhaltenden Atlas*. Gibt es einen solchen Atlas, so nennt man die Mannigfaltigkeit M orientierbar. Bekannt sind das Möbius-Band und die Klein'sche Flasche, die in diesem Sinne nicht orientierbar sind (siehe Abb. 16.1).



Abbildung 16.1: (links) Möbius-Band (aus [Wiki-Moebius]) und (rechts) Klein'sche Flasche (aus [Wiki-Klein]). Diese Mannigfaltigkeiten sind nicht orientierbar. Das Möbius-Band hat einen Rand, die Klein'sche Flasche ist randlos. In vier Dimensionen kann die Klein'sche Flasche auch ohne Selbst-Durchdringung eingebettet werden.

Sind zwei Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 mit ihren jeweiligen Atlanten gegeben, dann bezeichnet man eine Abbildung $\Omega: M_1 \to M_2$ als *Diffeomorphismus*, wenn für jedes Kartenpaar (U_1, ϕ_1) von M_1 und (U_2, ϕ_2) von M_2 mit $\Omega(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ gilt, dass die Abbildung

$$\tilde{\Omega} = \phi_2 \circ \Omega \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{16.3}$$

unendlich oft stetig differenzierbar ist.

16.1.2 Der Tangentialraum

Zu einer Mannigfaltigkeit M können wir an jedem Punkt $p \in M$ ihren Tangentialraum T_pM definieren. Auch diese Konstruktion ist eigentlich sehr anschaulich: Der Tangentialraum ist der Raum aller "Geschwindigkeiten", die Bahnkurven durch den Punkt p haben können. Allerdings müssen diese Geschwindigkeiten "gemessen" werden; dazu bedarf einer entsprechenden Menge an "Messinstrumenten" (dazu dienen hier Funktionen auf der Mannigfaltigkeit).

Definition: Eine Funktion $f: U \subset M \to \mathbb{R}$ (U offen) heißt <u>differenzierbar</u>, wenn für alle Karten (U_i, ϕ_i) mit $U \cap U_i \neq \emptyset$ die Abbildung $f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Meist verlangen wir, dass die Abbildung $f \circ \phi_i^{-1} C^{\infty}$ (unendlich oft stetig differenzierbar) ist.

Definition: Ein parametrisierter Weg $\gamma : I \to M$ ist eine stetige Abbildung von einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in die Mannigfaltigkeit M. Oft schreiben wir $t \mapsto \gamma(t) \in M$.

Im Folgenden soll das Intervall I den Punkt t = 0 enthalten und wir betrachten parametrisierte Wege γ , für die $\gamma(0) = p$, die also bei t = 0 durch den Punkt p gehen.

KAPITEL 16. MANNIGFALTIGKEITEN UND DIFFERENTIALFORMEN

Wir würden nun gerne die Ableitung des Weges nach t an der Stelle t = 0 als eine Tangente an die Mannigfaltigkeit M im Punkte p definieren, doch wir können auf M nicht ableiten. Daher bedient man sich eines Tricks: Wir betrachten sämtliche differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$, wobei U eine Umgebung von p sein soll. Jeder Weg γ und jede solche Funktion f definiert eine Funktion $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$. Diese Funktion können wir nach dem Argument t ableiten. Nun definieren wir auf der Menge aller Wege $\gamma(t)$ mit $\gamma(0) = p$ eine Äquivalenzrelation:

Definition: Zwei Wege γ_1 und γ_2 mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ heißen im Punkte p äquivalent, wenn für alle differenzierbaren Funktionen $f: U \to \mathbb{R}$ (mit $p \in U$) gilt:

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_2(t)) \right|_{t=0} \,. \tag{16.4}$$

Die Abbildung $X : f \to \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \big|_{t=0}$, die jeder Funktion f eine dieser Äquivalenzklassen - repräsentiert durch den Weg γ - zuordnet, definiert einen Tangentialvektor an M im Punkte p.

Die Menge aller solchen Äquivalenzklassen bildet den Tangentialraum T_pM an M im Punkte p.

Man beachte, dass auch die Kartenabbildungen ϕ , eingeschränkt auf eines ihrer Argumente im Bildraum, also die Funktionen $e^i \circ \phi$, die jedem Punkt p seine Koordinate $u^i(p)$ in der durch ϕ definierten Karte zuordnen, solche Funktionen f sind. Zwei Wege sind dann äquivalent, wenn die Abbildungen $\phi \circ \gamma$ für alle Komponenten von ϕ äquivalent sind, also

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u^i(\gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u^i(\gamma_2(t)) \right|_{t=0} \qquad \forall i = 1, \dots, n \,. \tag{16.5}$$

Diese Äquivalenz hängt nicht von der Karte ab: Sind zwei Wege in einem Punkt p in einer Karte äquivalent, sind sie es auch in allen anderen Karten an diesem Punkt. Wir können somit "Geschwindigkeiten" am selben Punkt vergleichen; ein Vergleich von Geschwindigkeiten an verschiedenen Punkten ist allerdings kartenabhängig, wird aber auch nicht benötigt. Erst wenn auf der Mannigfaltigkeit ein Zusammenhang definiert ist (siehe Kap. ??) kann man (bis zu einem gewissen Grad) Tangentialvektoren an verschiedenen Punkten einer Mannigfaltigkeit vergleichen.

Wir müssen nun zunächst zeigen, dass die Menge dieser Äquivalenzklassen tatsächlich einen Vektorraum bildet. Dazu betrachten wir im Parameterraum \mathbb{R}^n die Vektoren \boldsymbol{v} , die wir als Geschwindigkeiten von Wegen $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{v}t$ durch den Ursprung deuten können. Sei nun (U, ϕ) eine Karte von Mzu einem Punkt p, wobei der Einfacheit halber $\phi(p) = 0$ sein soll, d.h. der Punkt p wird in der Karte auf den Ursprung abgebildet. Dann definiert $\phi^{-1}(\boldsymbol{v}t)$ für ein Intervall $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ einen Weg in M durch den Punkt p und somit eine Äquivalenzklasse X_v . Auf diese Weise erhält man alle Äquivalenzklassen (d.h., zu jeder Äquivalenzklasse gibt es auch einen solchen Vektor \boldsymbol{v} , sodass der Weg $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{v}t$ ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse ist).

Man kann sich nun leicht überlegen, dass $X_{v+w} = X_v + X_w$ und $X_{\alpha v} = \alpha X_v$. Auf diese Weise wird die Vektorraumstruktur der Karte im \mathbb{R}^n auf die Vektorraumstruktur des Tangentialraums an einem Punkt p in M abgebildet. Insbesondere definiert die Basis im \mathbb{R}^n eine Basis im $T_p M$: Die Abbildung $\phi^{-1}(u^i \mathbf{e}_i)$ definiert einen Weg durch p (nun parametrisiert durch die *i*-te Koordinate u^i) und der zugehörige Vektor im Tangentialraum von M am Punkt p ist $X_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ mit $X_i f = \frac{\partial}{\partial u^i} f(\phi^{-1}(u^i \mathbf{e}_i))|_{u^i=0}$.

Das Verfahren erscheint nur auf den ersten Blick unnötig kompliziert. Der Vorteil der skizzierten Vorgehensweise liegt darin, dass die Mannigfaltigkeit M nicht in einen \mathbb{R}^m (mit $m \ge n$) eingebettet sein muss; diesen Fall haben wir in Kapitel 8 untersucht und wir werden ihn im nächsten Abschnitt nochmals als Beispiel betrachten. Die obigen Definitionen sind rein intrinsisch. Das gilt auch für das Konzept der Metrik auf Mannigfaltigkeiten, das in Kapitel ?? untersucht wird. Mathematisch kann man daher von "gekrümmten Räumen" sprechen, ohne dass es einen (euklidischen) Raum geben muss, *in dem* die Mannigfaltigkeit gekrümmt ist.

16.1.3 Vergleich mit eingebetteten Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass die Mannigfaltigkeit M eine Untermenge eines euklidischen Raumes ist. Als Beispiel wählen wir eine 2-dimensionale Kugeloberfläche, die als Teilmenge des \mathbb{R}^3 aufgefasst wird und durch die Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{16.6}$$

definiert ist. Die übliche Karte für die Kugeloberfläche führt zur Parametrisierung Winkel ein:

$$x = R\cos\varphi\cos\theta \quad y = R\sin\varphi\cos\theta \quad z = R\sin\theta.$$
(16.7)

Ein Vergleich mit einer Weltkarte zeigt, dass $\varphi \in [0, 2\pi)$ dem Längengrad und $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$ dem Breitengrad entspricht.¹ Die Karte verliert ihre Gültigkeit am Nord- und Südpol - dort bräuchte man andere Karten -, da für $\theta = \pm \pi/2$ die Punkte unabhängig vom Winkel φ bereits festliegen. Anders ausgedrückt: Alle Punkte ($\varphi, \pm \pi/2$) haben als Bild den Nord- bzw. Südpol. Damit wäre hier die Beziehung zwischen den Punkten auf der Kugel und den Punkten auf der Karte, würde man die Werte $\theta = \pm \pi/2$ zulassen, nicht mehr bijektiv. Diese technischen Details sollen hier aber nicht weiter interessieren.

Unsere Kartenabbildung lautet somit

$$\phi : (x, y, z) \Big|_{x^2 + y^2 + z^2 = R^2} \to (\varphi, \theta)$$
 (16.8)

 mit

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$
 $\theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (16.9)

(Die genauen Definitionsbereiche und "Äste", die man beim inversen Tangens zu nehmen hat, sind technische Details.) Die Karte besteht somit aus den Koordinaten (φ, θ) und ist ein Teilbereich des \mathbb{R}^2 .

Da die Kugeloberfläche in den \mathbb{R}^3 eingebettet ist, kann man Bahnkurven auf der Kugeloberfläche ableiten und die Ableitungsvektoren liegen ebenfalls im \mathbb{R}^3 . Insbesondere gilt das für die Urbilder der Koordinaten θ und φ , also:

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{x}(\varphi, \theta_p) \bigg|_{\varphi = \varphi_p} = R(-\sin\varphi_p \cos\theta_p, \cos\varphi_p \cos\theta_p, 0)$$
(16.10)

$$\vec{e}_{\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{x}(\varphi_p, \theta) \Big|_{\theta = \theta_p} = R(-\cos\varphi_p \sin\theta_p, -\sin\varphi_p \sin\theta_p, \cos\theta).$$
(16.11)

Diese beiden speziellen Tangentialvektoren spannen den Tangentialraum am Punkte p auf. Die Ableitung von einem beliebigen Weg durch p an diesem Punkt (also ein beliebiger Tangentialvektor) lässt sich immer als Linearkombination dieser beiden Vektoren schreiben.

Man kann auf diese Weise den Tangentialraum an einen Punkt der Kugeloberfläche als Teilraum des \mathbb{R}^3 konstruieren. Das ist allerdings etwas irreführend, denn der Tangentialraum an einem Punkt ist ein zweidimensionaler Vektorraum, der kein Unterraum des einbettenden Raums für die Mannigfaltigkeit ist: Die Kugeloberfläche mit all ihren Tangentenräumen ist ein 4-dimensionaler Raum und nicht der einbettende 3-dimensionale Raum.

¹Gewöhnlich definiert man $\theta \in (0, \pi)$, wobei $\theta = 0$ dem Nord- und $\theta = \pi$ dem Südpol entspricht; daher unterscheiden sich die Formeln hier von denen in den üblichen Formelsammlung dadurch, dass $\cos \theta$ durch $\sin \theta$ etc. zu ersetzen ist.

KAPITEL 16. MANNIGFALTIGKEITEN UND DIFFERENTIALFORMEN

Diese Konstruktion des Tangentialraums basiert auf der Einbettung der Kugel in den \mathbb{R}^3 und funktioniert nicht bei der Definition von Mannigfaltigkeiten, die nicht eingebettet sind. Statt dessen haben wir Funktionen $f: M \to \mathbb{R}$ betrachtet. Solche Funktionen wären nun Funktionen $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$, wobei die Funktionen nur für Werte (x, y, z) mit $x^2 + y^2 + z^2 = \mathbb{R}^2$, also auf der Kugeloberfläche, definiert sein müssen. Indem wir hier die Parametrisierung einsetzen, erhalten wir die Funktion:

$$f \circ \phi^{-1}(\varphi, \theta) = f(R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta).$$
(16.12)

Hierbei handelt es sich um Funktionen auf der Karte, die durch θ und φ definiert ist. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion nach den Koordinaten (φ , θ) existieren unabhängig von der Einbettung. Im vorliegenden Fall gilt:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}f \circ \phi^{-1}(\varphi,\theta) = \frac{\partial}{\partial\varphi}f(R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\theta) = \vec{\nabla}f \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{x}(\varphi,\theta_p) \quad (16.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f \circ \phi^{-1}(\varphi, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta) = \vec{\nabla} f \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{x}(\varphi, \theta_p). \quad (16.14)$$

Während die beiden Terme auf der rechten Seite - der Gradient von f und die 3-dimensionalen Ableitungen von \vec{x} nach den Koordinaten - von der Einbettung abhängen, ist der gesamte Ausdruck unabhängig von der Einbettung. Daher bezeichnet man die (kartenabhängigen) Basisvektoren des Tangentialraums auch gerne mit $\partial_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ und $\partial_{\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Wir können das oben Gesagte nun leicht verallgemeinern. Sei der einbettende Raum \mathbb{R}^m und

Wir können das oben Gesagte nun leicht verallgemeinern. Sei der einbettende Raum \mathbb{R}^m und die Mannigfaltigkeit M durch eine Abbildung

$$\phi^{-1}: (u^1, ..., u^n) \mapsto \vec{x}(u^1, ..., u^n)$$
(16.15)

gegeben. Die Koordinaten $\{(u^1, ..., u^n)\}$ parametrisieren also die Mannigfaltigkeit M als Unterraum des \mathbb{R}^m . Sie bilden eine Karte der Mannigfaltigkeit. Für die Einbettung definieren die Tangentialvektoren

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}(u^1, ..., u^n)}{\partial u^i} \qquad (i = 1, ..., n)$$

$$(16.16)$$

an jedem Punkt eine Basis, welche den Tangentialraum aufspannen. Man beachte, dass diese Basis im Allgemeinen keine normierte oder orthogonale Basis sein muss (siehe Abschnitt 8.1). Unabhängig von der Einbettung betrachtet man wieder Funktionen f und ihre Ableitungen nach den Koordinaten in einer Karte:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} f \circ \phi^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \frac{\partial}{\partial u^i} f(x^1(\{u^i\}), \dots, x^m(\{u^i\})) = \vec{\nabla} f \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \vec{x}(\{u^i\}).$$
(16.17)

Der Ausdruck auf der linken Seite ist unabhängig von der Einbettung, er hängt aber von der Karte (d.h. von den Koordinaten $\{u^i\}$) und von der Funktion f ab. Der Tangentialvektor ist jedoch gleich der Äquivalenzklasse und wird durch das Symbol $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ gekennzeichnet. Insbesondere gilt für einen Weg $\gamma(t) = \phi^{-1}(u^1(t), ..., u^n(t))$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\circ\gamma(t) = \frac{\partial}{\partial u^i}f(x^1(\{u^i\}), ..., x^m(\{u^i\}))\frac{\mathrm{d}u^i(t)}{\mathrm{d}t}.$$
(16.18)

Dieser Ausdruck ist unabhängig von einer Einbettung und gilt allgemein für Mannigfaltigkeiten.

16.2 Die äußere Algebra eines Vektorraums

Die Strukturen in diesem Abschnitt sind zunächst unabhängig von Mannigfaltigkeiten oder Tangentialräumen - sie gelten für jeden beliebigen Vektorraum und seinen Dualraum. Die Beziehung zwischen einem Vektorraum und seinem Dualraum wird auch nur benötigt, um einige der Konstruktionen basisunabhängig formulieren zu können. Die äußere Algebra ist eine Konstruktion, die für jeden Vektorraum vorgenommen werden kann, wobei wir immer endlich dimensionale Vektorräume voraussetzen. Viele der hier angegebenen Konzepte stammen aus [Deschamps 1970].

16.2.1 Das zweifache Tensorprodukt

In Kap 2.6 haben wir das Tensorprodukt von Vektorräumen definiert. Sei V ein d-dimensionaler Vektorraum und $\{e_i\}_{i=1,..,d}$ eine Basis, dann ist das Tensorprodukt von V mit sich selbst, $V \otimes V$, definiert als die Menge der Elemente

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{d} x^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j , \qquad (16.19)$$

wobei $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j=1,...,d}$ formal eine Basis von $V \otimes V$ ist, nach der jedes Element $x \in V \otimes V$ entwickelt werden kann.

In dem Dualraum von V, also V^{*}, gibt es eine duale Basis $\{\epsilon^i\}_{i=1,\dots,d}$, definiert durch ihre Wirkung auf die Basis von V:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}^j, \boldsymbol{e}_i \rangle = \delta_i^j \,. \tag{16.20}$$

Hier wurde wieder die Konvention verwendet, Indizes von Objekten, die sich kovariant (ebenso wie Vektoren in V) transformieren, als untere Indizes zu schreiben und Indizes, die sich kontravariant transformieren, als obere Indizes (siehe auch die Kapitel 2.7.4 und 8). Auch vom Dualraum V^* kann man das Tensorprodukt mit sich selbst bilden:

$$V^* \otimes V^* = \left\{ \boldsymbol{\omega} \middle| \boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j=1}^d \omega_{ij} \boldsymbol{\epsilon}^i \otimes \boldsymbol{\epsilon}^j \right\}.$$
(16.21)

Die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ und $\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i$ sind für $i \neq j$ verschieden. Daher handelt es sich bei $V \otimes V$, und entsprechend bei $V^* \otimes V^*$, um d^2 -dimensionale Vektorräume.

Man kann diese Tensorräume jeweils in zwei Unterräume - einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Tensorraum - zerlegen und als direkte Summe dieser beiden Unterräume schreiben. Ein Element $\boldsymbol{\omega} \in V^* \otimes V^*$ heißt dabei symmetrisch (bzw. antisymmetrisch), wenn für alle $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ gilt:

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_1 \rangle \quad \text{bzw.} \quad \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \rangle = -\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_1 \rangle.$$
 (16.22)

Entsprechend heißt ein Element $x \in V \otimes V$ symmetrisch (bzw. antisymmetrisch), wenn für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in V^*$ gilt:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_2 \otimes \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{x} \rangle$$
 bzw. $\langle \boldsymbol{\alpha}_1 \otimes \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{x} \rangle = -\langle \boldsymbol{\alpha}_2 \otimes \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{x} \rangle$. (16.23)

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies für die Entwicklungskoeffizienten ω_{ij} von $\boldsymbol{\omega}$ bedeutet: $\omega_{ij} = \pm \omega_{ji}$, und entsprechend für die Entwicklungskoeffizienten von \boldsymbol{x} : $x^{ij} = \pm x^{ji}$, wobei das positive Vorzeichen jeweils für symmetrische und das negative für antisymmetrische Elemente gilt. Damit hat beispielsweise ein antisymmetrisches Element \boldsymbol{x} aus $V \otimes V$ die Entwicklung:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i,j} x^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \sum_{i < j} x^{ij} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i), \qquad (16.24)$$

und für ein symmetrisches Element \boldsymbol{y} gilt:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i,j} y^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \sum_{i < j} y^{ij} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i) + \sum_i y^{ii} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i .$$
(16.25)

Offensichtlich hat der antisymmetrische Anteil von $V \otimes V \frac{1}{2}d(d-1)$ Dimensionen und der symmetrische Anteil $\frac{1}{2}d(d+1)$ Dimensionen. Die Vektoren $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)\}_{i < j}$ bilden eine Basis des antisymmetrischen Anteils, entsprechend bilden die Vektoren $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)\}_{i < j} \cup \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i\}$ eine Basis des symmetrischen Anteils. Entsprechendes gilt für $V^* \otimes V^*$.

16.2.2 Der total antisymmetrische Unterraum des q-fachen Tensorprodukts

Im Folgenden sind wir in erster Linie an dem antisymmetrischen Anteil des Tensorprodukts interessiert. Für die antisymmetrisierten Basisvektoren schreiben wir:

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\epsilon}^i \wedge \boldsymbol{\epsilon}^j = \boldsymbol{\epsilon}^i \otimes \boldsymbol{\epsilon}^j - \boldsymbol{\epsilon}^j \otimes \boldsymbol{\epsilon}^i \quad \text{für } i < j.$$
 (16.26)

Die Konstruktion kann entsprechend auf das q-fache Tensorprodukt von V bzw. V* erweitert werden. Dort treten neben total symmetrischen und total antisymmetrischen Tensoren zwar auch andere Darstellungen der Permutationsgruppe auf, doch hier geht es immer nur um den total antisymmetrischen Anteil. Den total antisymmetrischen Anteil des q-fachen Tensorprodukts von V mit sich selbst bezeichnent wir mit $\bigwedge^q V$ und entsprechend $\bigwedge^q V^*$ für den total antisymmetrischen Anteil des q-fachen Tensorprodukts von V* mit sich selbst. Eine Basis von $\bigwedge^q V$ ist $\{e_{i_1} \land e_{i_2} \land ... \land e_{i_q}\}$, wobei die Indizes alle Kombinationen mit $i_1 < i_2 < ... < i_p$ durchlaufen. Die Dimension von $\bigwedge^q V$ ist $\begin{pmatrix} d \end{pmatrix}$

 $\binom{d}{q} = \frac{d!}{q!(d-q)!}$. Ein allgemeines Element aus $\bigwedge^q V$ lässt sich immer in folgender Form schreiben:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_q} x^{i_1 \dots i_q} \, \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_q} \,. \tag{16.27}$$

Insbesondere ist $\bigwedge^d V$ 1-dimensional. Sein (einziges) Basiselement ist $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_d$. Für q > d gibt es keine total antisymmetrischen Unterräume des q-fachen Tensorproduktraums.

Oft ist es sinnvoll, beliebige Reihenfolgen der Indizes für die Basiselemente zuzulassen. Dabei gilt die Regel:

$$\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_q} = (-1)^{\sigma} \boldsymbol{e}_{\sigma(i_1)} \wedge \boldsymbol{e}_{\sigma(i_2)} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{\sigma(i_q)}, \qquad (16.28)$$

wobei $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < ... < \sigma(i_q)$ und $(-1)^{\sigma}$ das Vorzeichen der Permutation σ ist, welche die Indizes in die aufsteigende Reihenfolge bringt. Mit dieser Konvention gilt für ein allgemeines Element aus $\bigwedge^q V$:

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{q!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_q} x^{i_1 \dots i_q} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_q} \,. \tag{16.29}$$

Die Koeffizienten $x^{i_1...i_q}$ sind dabei total antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung der Indizes (falls das nicht der Fall ist, fallen die symmetrischen Anteile in der Summe weg, da die Basis total antisymmetrisch ist).

16.2.3 Das äußere Produkt

Für zwei Elemente $\boldsymbol{x} \in \bigwedge^p V$ und $\boldsymbol{y} \in \bigwedge^q V$ kann man das Produkt wie folgt definieren:

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \sum_{I_p} x^{I_p} \boldsymbol{e}_{I_p} \wedge \sum_{J_q} y^{J_q} \boldsymbol{e}_{J_q} = \sum_{I_p, J_q} x^{I_p} y^{J_q} \boldsymbol{e}_{I_p} \wedge \boldsymbol{e}_{J_q} \,.$$
(16.30)

Hierbei bezeichnet $I_p = \{i_1, ..., i_p\}(i_1 < i_2 < ... < i_p)$ eine Indexmenge für die Basis von $\bigwedge^p V$ und \sum_{I_p} bedeutet eine Summe über alle *p*-elementigen Indexmengen; entsprechend für J_q . Das Produkt

16.2. DIE ÄUSSERE ALGEBRA EINES VEKTORRAUMS

 $e_{I_p} \wedge e_{J_q}$ muss noch so umgeordnet werden, dass die Indizes in normaler (aufsteigender) Reihenfolge stehen. Dabei ist das Vorzeichen dieser Permutation zu berücksichtigen. Außerdem verschwindet ein Term in der verbleibenden Summe, wenn die beiden Indexmengen zu I_p und J_q gemeinsame Indizes haben.

Betrachten wir als Beispiel den Vektorraum $V=\mathbb{R}^3$ und das äußere Produkt von zwei Vektoren:

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \sum_{i,j=1}^{3} x^{i} y^{j} \boldsymbol{e}_{i} \wedge \boldsymbol{e}_{j}$$
(16.31)

$$= (x^{1}y^{2} - x^{2}y^{1})\boldsymbol{e}_{1} \wedge \boldsymbol{e}_{2} + (x^{1}y^{3} - x^{3}y^{1})\boldsymbol{e}_{1} \wedge \boldsymbol{e}_{3} + (x^{2}y^{3} - x^{3}y^{2})\boldsymbol{e}_{2} \wedge \boldsymbol{e}_{3}.$$
(16.32)

Dies entspricht der antisymmetrischen Matrix:

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \simeq \begin{pmatrix} 0 & x^1 y^2 - x^2 y^1 & x^1 y^3 - x^3 y^1 \\ x^2 y^1 - x^1 y^2 & 0 & x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ x^3 y^1 - x^1 y^3 & x^3 y^2 - x^2 y^3 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (16.33)

Das äußere Produkt von drei Vektoren im \mathbb{R}^3 ergibt die zugehörige Determinante und entspricht dem Spatprodukt:

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z} = \left((x^1 y^2 - x^2 y^1) z^3 - (x^1 y^3 - x^3 y^1) z^2 + (x^2 y^3 - x^3 y^2) z^1 \right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3.$$
(16.34)

Die hier definierten Strukturen gelten allerdings für beliebige Vektorräume. Das äußere Produkt von zwei Vektoren lässt sich in beliebigen Dimensionen durch eine antisymmetrische Matrix darstellen. Wie wir gleich sehen werden, entspricht diese antisymmetrische Matrix nur im \mathbb{R}^3 einem Vektor.

16.2.4 Die äußere Algebra

Bilden wir die direkte Summe der verschiedenen total antisymmetrischen Tensorprodukte zu einem Vektorraum V, also $\bigoplus_q \bigwedge^q V$ so erhalten wir wiederum einen Vektorraum (2^d-dimensional), auf dem zusätzlich das äußere Produkt definiert ist. Diesen Vektorraum mit der so definierten Produktstruktur bezeihnet man als *äußere Algebra* zu V oder auch *Grassmann-Algebra*. Die im folgenden Abschnitt beschriebene Dualitätstransformation ist ein Automorphismus der äußere Algebra.

16.2.5 Die Hodge-Dualität und der *-Operator

Ist auf dem Vektorraum ein Skalarprodukt $g: V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben, können wir dies auf die äußere Algebra erweitern. Zunächst definiert ein Skalarprodukt auf V ein Skalarprodukt auf $\bigwedge^q V$ nach folgender Vorschrift: Es seien $\{\boldsymbol{v}_i\}$ und $\{\boldsymbol{w}_i\}$ (i = 1, ..., q) beliebige Vektoren aus V, dann sind

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_q$$
 und $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 \wedge \boldsymbol{w}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}_q$ (16.35)

Elemente aus $\bigwedge^q V$. Für diese beiden Elemente definieren wir:

$$G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \det g(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j) = \begin{vmatrix} g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1) & g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_q) \\ g(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) & g(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(\boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{w}_1) & g(\boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{w}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{w}_q) \end{vmatrix} .$$
(16.36)

Da sich jedes Element $\boldsymbol{x} \in \bigwedge^q V$ als Linearkombination solcher Produktvektoren schreiben lässt und $G(\cdot, \cdot)$ in beiden Argumenten linear sein soll, ist dadurch ein Skalarprodukt auf $\bigwedge^q V$ definiert. Diese Definition stimmt überein mit der allgemeinen Definition der Erweiterung des Skalarprodukts auf Tensorprodukträume, die in Kapitel 2.6 gegeben wurde.

Offenbar haben der Raum $\bigwedge^{q} V$ und der Raum $\bigwedge^{d-q} V$ dieselbe Dimension. Tatsächlich besteht ein Isomorphismus, $*: \bigwedge^{q} V \to \bigwedge^{d-q} V$, zwischen diesen beiden Räumen, den man als Hodge-Dualität oder auch als *-Operator bezeichnet. Sei $\boldsymbol{x} \in \bigwedge^{q} V$, dann ist $*\boldsymbol{x}$ definiert durch die Bedingung:

$$\boldsymbol{y} \wedge *\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_d \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \bigwedge^q V.$$
 (16.37)

Diese Beziehung wird sehr einfach, wenn es sich bei $\{e_i\}$ um eine Orthonormalbasis handelt: Zu jedem Basiselement $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}$ von $\bigwedge^q V$ gibt es das "komplementäre" Basiselement,

$$*(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_q}) = (-1)^{\sigma} \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{j_{d-q}}, \qquad (16.38)$$

dessen Indizes gerade aus den Elementen zu den Indizes $\{1, ..., d\}$ besteht, die nicht in $\{i_1, i_2, ..., i_q\}$ sind, sodass für beide Indexmengen zusammengenommen gilt:

$$\{i_1, i_2, \dots, i_q\} \cup \{j_1, j_2, \dots, j_{d-q}\} = \{1, 2, \dots, d\} \quad \text{und} \quad \{i_1, i_2, \dots, i_q\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_{d-q}\} = \emptyset.$$
(16.39)

Das Vorzeichen $(-1)^{\sigma}$ des dualen Basiselements bestimmt sich daraus, dass gelten soll:

$$(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_q}) \wedge ((-1)^{\sigma} \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{j_{d-q}}) = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_d.$$
(16.40)

Mit dem total antisymmetrischen ϵ -Symbol,

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i_1, i_2, \dots, i_d) \text{ zyklische Permutation von } (1, 2, \dots, d) \\ -1 & \text{falls } (i_1, i_2, \dots, i_d) \text{ antizyklische Permutation von } (1, 2, \dots, d) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (16.41)$$

kann man auch schreiben:

$$*(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_q}) = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_q j_1 \dots j_{d-q}} \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \boldsymbol{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{j_{d-q}}, \qquad (16.42)$$

wobei sowohl die Indexmenge $(i_1, ..., i_q)$ als auch die Indexmenge $(j_1, ..., j_{d-q})$ geordnet sind, d.h. $j_1 < ... < i_q$ und $j_1 < ... < j_{d-q}$.

Betrachten wir dazu das Beispiel des 3-dimensionalen Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$. Der Raum $\bigwedge^0 V$ besteht aus den Körperelementen, d.h. den reellen Zahlen. Es ist der Raum der Skalare. Der dazu duale Raum ist $\bigwedge^3 V$ mit dem Basisvektor $\mathbf{e}_1 \land \mathbf{e}_2 \land \mathbf{e}_3$. Diese Elemente bezeichnet man manchmal als Pseudoskalare, da sich ihr Vorzeichen unter einer Koordinatenspiegelung umkehrt (siehe auch Abschnitt 2.7). Der Raum $\bigwedge^1 V = V$ ist einfach der 3-dimensionale Raum der Vektoren. Der dazu duale Raum $\bigwedge^2 V$ ist der Raum der antisymmetrischen 3×3 -Matrizen. Wir hatten schon gesehen (Abschnitt 2.7.2), dass sich ein 3-Vektor auch als antisymmetrische Matrix schreiben lässt und umgekehrt. Hier ändern sich die Vorzeichen der Komponenten eines Vektors unter Punktspiegelung, nicht jedoch die Vorzeichen der Komponenten der antisymmetrischen Matrix. Daher bezeichnet man die "Vektoren", die eigentlich antisymmetrische Matrizen sind (z.B. der Drehimpuls), auch als Pseudovektoren.

Der zugehörige duale Vektor ist das Kreuzprodukt von den Vektoren \boldsymbol{x} und \boldsymbol{y} :

$$\star(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) = (x^1y^2 - x^2y^1)\boldsymbol{e}_3 - (x^1y^3 - x^3y^1)\boldsymbol{e}_2 + (x^2y^3 - x^3y^2)\boldsymbol{e}_1.$$
(16.43)

16.3 Differentialformen

Bisher haben wir einen Vektorraum betrachtet und darauf die äußere Algebra definiert. Nun betrachten wir eine Mannigfaltigkeit und definieren darauf Felder von Elementen der äußeren Algebra des Tangentialraums bzw. seines Dualraums. Diese Felder sind eine Funktion der Punkte auf der Mannigfaltigkeit - also eine Funktion des Orts - und daher kann man diese Felder auch ableiten oder integrieren.

Sei M eine Mannigfaltigkeit und TM ihr Tangentialraum. Eine Abbildung: $\omega : M \to \bigwedge^q TM^*$ mit $p \mapsto \omega(p) \in \bigwedge^q T_p M^*$ bezeichnet man als Differential-q-Form bzw. kurz als Differentialform. Für q = 1 spricht man auch schon mal von einer Pfaff'schen Differentialform. Eine 1-Form ordnet also jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit eine Element des dualen Tangentialraums zu. Entsprechend ordnet eine q-Form jedem Punkt der Mannigfaltigkeit ein Element des Dualraums zu dem total antisymmetrisierten q-fachen Tensorproduktraum zu.

16.3.1 1-Formen

Eine 1-Form ist eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ ein Element aus $T_p M^*$ zuordnet. Es handelt sich also um ein Feld linearer Abbildungen, das an einem Punkt p einem Vektor (Element von $T_p M$) eine Zahl zuordnet. Ein Beispiel für eine solche 1-Form ist das totale Differential einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$df(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \qquad (Summenkonvention). \tag{16.44}$$

Die totalen Differentiale dx^i der Koordinatenfunktion $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\boldsymbol{x} \mapsto x^i$ dienen hier als Basiselemente des Vektorraums $T_p M^*$.² Die Vektoren, auf die sie wirken, sind die Richtungsableitungen

$$\boldsymbol{X} = X^{i} \frac{\partial}{\partial x^{i}} \,. \tag{16.45}$$

Die Wirkung von df auf X erfolgt nach der Vorschrift

$$\left\langle \mathrm{d}x^{i}, \frac{\partial}{\partial x^{j}} \right\rangle = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j}} = \delta^{i}_{j}$$
 (16.46)

und somit

$$\langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{X} \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^{i}} \mathrm{d}x^{i}, X^{j} \frac{\partial}{\partial x^{j}} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^{i}} X^{j} \left\langle \mathrm{d}x^{i}, \frac{\partial}{\partial x^{j}} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^{i}} X^{i} \,. \tag{16.47}$$

Das entspricht der Richtungsableitung von f entlang der Richtung, die durch X definiert ist.

Eine allgemeine 1-Form können wir in folgender Weise schreiben:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \,\mathrm{d}x^i \,. \tag{16.48}$$

Manchmal liest man, dass p-Formen die Objekte sind, auf die Integrale wirken. In der Tat ist der Kalkül der Differentialformen eine elegante Form, Identitäten für Integrale zu bestimmen, die von dem gewählen Koordinatensystem unabhängig sind und somit geometrische Eigenschaften kennzeichnen. 1-Formen beispielsweise können entlang von Wegen γ integriert werden. Dabei gilt:

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{\omega} = \int_{\gamma} \omega_i \mathrm{d}x^i = \int_{t_0}^{t_1} \omega_i(\boldsymbol{x}(t)) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t \,. \tag{16.49}$$

²Bisher habe ich die Koordinaten in einer Karte mit $\{u^i\}$ bezeichnet und die Koordinaten $\{x^i\}$ dem einbettenden Raum vorbehalten. Die Konstruktionen in diesem Kapitel sind aber unabhängig von einer Einbettung, daher bezeichne ich hier die Koordinaten in den Karten mit $\{x^i\}$.

Für ein totales Differential folgt:

$$\int_{\gamma} \mathbf{d}f = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x^{i}} \mathrm{d}x^{i} = f(\mathbf{x}(t_{1})) - f(\mathbf{x}(t_{0})), \qquad (16.50)$$

wobei $\boldsymbol{x}(t_1)$ und $\boldsymbol{x}(t_0)$ der End- bzw. Anfangspunkt des Weges γ sind.

16.3.2 *p***-Formen**

Eine p-Form kann in einem lokalen Koordinatensystem immer in der Form

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \, \mathrm{d} x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d} x^{i_p} \tag{16.51}$$

geschrieben werden. Der Faktor 1/p!rührt daher, dass nach der Einstein'schen Summenkonvention über alle doppelt auftretenden Indizes von 1 bis d zu summieren ist. Damit treten dieselben Indizeskonfigurationen aber p!-fach auf. Alternativ könnte man die Summe auch nur über Indexmengen laufen lassen, für die $i_1 < i_2 < ... < i_p$ gilt, und dann den Faktor 1/p! weglassen.

Eine 0-Form ist einfach eine Funktion f auf der Mannigfaltigkeit (also an jedem Punkt eine Zuordnung einer reellen Zahl bzw. allgemein die Zuordnung eines Körperelements).

16.3.3 Die äußere Ableitung

Wir hatten schon gesehen, dass man von einer 0-Form - also einer Funktion f(x) - das totale Differential bilden kann und auf diese Weise eine 1-Form erhält. Diese Operation kann man für beliebige p-Formen verallgemeinern. Es sei $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ eine allgemeine p-Form, dann definieren wir die äußere Ableitung als

$$d\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^j \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \,. \tag{16.52}$$

Als Beispiel betrachten wir den \mathbb{R}^3 und wenden die äußere Ableitungg zunächst auf eine 1-Form an:

$$d\boldsymbol{\omega} = d(\omega_{1}dx^{1} + \omega_{2}dx^{2} + \omega_{3}dx^{3})$$

$$= \left(\frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{1}}dx^{1} + \frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{2}}dx^{2} + \frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{3}}dx^{3}\right) \wedge dx^{1} + \left(\frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{1}}dx^{1} + \frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{2}}dx^{2} + \frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{3}}dx^{3}\right) \wedge dx^{2}$$

$$+ \left(\frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{1}}dx^{1} + \frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{2}}dx^{2} + \frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{3}}dx^{3}\right) \wedge dx^{3}$$

$$= \left(\frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{2}}\right) dx^{1} \wedge dx^{2} + \left(\frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{3}}\right) dx^{1} \wedge dx^{3} + \left(\frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{3}}\right) dx^{2} \wedge dx^{3}$$

$$(16.53)$$

Wir erhalten in diesem Fall das Hodge-duale zu einer Rotation. Offensichtlich ist das nur, sofern sich die Koordinaten $\{dx^i\}$ auf ein Orthonormalsystem beziehen, es gilt aber auch allgemein.

Schließlich soll die äußere Ableitung noch auf eine 2-Form im \mathbb{R}^2 angewandt werden. Für die Komponenten wählen wir dabei die dualen Indizes, d.h., wir schreiben die 2-Form in folgender Form:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \,\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 - \omega_2 \,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + \omega_3 \,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \,. \tag{16.54}$$

Die äußere Ableitung davon ist:

$$d\boldsymbol{\omega} = d\left(\omega_{1} dx^{2} \wedge dx^{3} - \omega_{2} dx^{1} \wedge dx^{3} + \omega_{3} dx^{1} \wedge dx^{2}\right)$$
(16.55)
$$= \left(\frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{1}} dx^{1} + \frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{2}} dx^{2} + \frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{3}} dx^{3}\right) \wedge dx^{2} \wedge dx^{3}$$
$$- \left(\frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{1}} dx^{1} + \frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{2}} dx^{2} + \frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{3}} dx^{3}\right) \wedge dx^{1} \wedge dx^{3}$$
$$+ \left(\frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{1}} dx^{1} + \frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{2}} dx^{2} + \frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{3}} dx^{3}\right) \wedge dx^{1} \wedge dx^{2}$$
$$= \left(\frac{\partial\omega_{1}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial\omega_{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial\omega_{3}}{\partial x^{3}}\right) dx^{1} \wedge dx^{2} \wedge dx^{3}.$$
(16.56)

In diesem Fall erhalten wir offensichtlich das Hodge-duale der Divergenz.

Die äußere Ableitung von einer p-Form, die selbst schon eine äußere Ableitung ist, verschwindet:

$$\mathrm{dd}\boldsymbol{\omega} = 0. \tag{16.57}$$

Der Grund ist, dass in der zweifachen Anwendung der äußeren Ableitung die Koeffizientenfunktionen zweimal abgeleitet werden:

$$\mathrm{dd}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_p} \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j \right) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \,. \tag{16.58}$$

Die zweifache Ableitung ist aber symmetrisch in den Indizes, wohingegen das äußere Produkt der zugehörigen Differentiale antisymmetrisch ist. Daher verschwindet der Ausdruck bei der Summation über die Indizes zu den Ableitungen.

Eine *p*-Form $\boldsymbol{\omega}$, für die d $\boldsymbol{\omega} = 0$ gilt, heißt geschlossen. Falls es zu einer *p*-Form $\boldsymbol{\omega}$ eine p-1-Form $\boldsymbol{\alpha}$ gibt, sodass $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\alpha}$, bezeichnet man $\boldsymbol{\omega}$ als exakt. Das obige Theorem besagt also, dass jede exakte *p*-Form auch geschlossen ist. Das Poincaré'sche Lemma besagt umgekehrt, dass in einem einfach wegzusammenhängenden Gebiet (jeder geschlossene Weg lässt sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen) auch die Umkehrung gilt: Jede geschlossene *p*-Form ist auch exakt. Einen Sonderfall haben wir in Kapitel 7.3.4 behandelt.

Als Spezialfall im \mathbb{R}^3 ergeben sich aus $dd\boldsymbol{\omega} = 0$ die Identitäten aus Abschnitt 4.3.3

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) = 0$$
 und $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = 0.$ (16.59)

Viele weitere bekannte Identitäten ergeben sich aus der verallgemeinerten Produktregel, die sich ebenfalls leicht beweisen lässt:

$$d(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = (d \boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\beta} + (-1)^{q} \boldsymbol{\alpha} \wedge (d \boldsymbol{\beta}), \qquad (16.60)$$

wobei $\boldsymbol{\alpha}$ eine beliebige q-Form und $\boldsymbol{\beta}$ eine beliebige p-Form sind. Das Ergebnis der äußeren Ableitung ist eine q + p + 1-Form.

Man kann zur äußeren Ableitung d auch ein sogenanntes Kodifferential δ definieren, gegeben durch $\delta = (-1)^p * d*$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, auf was für eine Form es angewendet wird. Die Stern-Operation macht aus einer *p*-Form zunächst eine d - p-Form. Die äußere Ableitung macht daraus eine d - p + 1-Form und die anschließende Stern-Operation macht daraus eine p - 1-Form. Eine Anwendung kennen wir schon: Die Divergenz, angewandt auf ein Vektorfeld, ergibt ein Skalarfeld. Im Sinne des Differentialformenkalküls macht man aus dem Vektorfeld zunächst eine 2-Form (vgl. Gl. 16.54), wendet darauf die äußere Ableitung an und erhält eine 3-Form, die im \mathbb{R}^3 aber dual zu einem Skalarfeld ist (vgl. Gl. 16.56).

16.3.4 Integrale

Wir hatten schon erwähnt, dass 1-Formen die "natürlichen" mathematischen Größen sind, die über einen Weg integriert werden können. Entsprechend sind p-Formen die natürlichen Größen für Integrale über einen p-dimensionalen Unterraum einer Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist eine d-Form (d die Dimension der Mannigfaltigkeit) die natürliche Volumenform für eine Integration über die Mannigfaltigkeit selbst.

Ich möchte das zunächst anhand der Integration einer 2-Form über eine Fläche und einer 3-Form über ein Volumen im \mathbb{R}^3 erläutern (siehe Kapitel 7.3 und 7.4). Die 2-dimensionale Fläche \mathcal{F} sei parametrisiert durch die Koordinaten u^1, u^2 und an jedem Punkt p werde sie durch die Vektoren $\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}}$ $(i = 1, 2, 3 \text{ und } \alpha = 1, 2)$ aufgespannt. Ein Vektorfeld \vec{F} , das nun über eine Fläche integriert werden soll - was wir bisher mit $\vec{F} \cdot d\vec{f}$ bezeichnet haben - wird nun zu einer 2-Form, die auf die beiden Vektorfelder $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^{\alpha}}$ angewandt wird:

$$\vec{F} \cdot d\vec{f} \longrightarrow F_{ij} dx^i \wedge dx^j \longrightarrow \vec{F} \cdot \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right| du^1 du^2.$$
 (16.61)

Entsprechend wird ein Volumenelement im \mathbb{R}^3 nun zu einer 3-Form, die auf die drei Vektorfelder, die lokal ein Volumen aufspannen, angewandt wird:

$$\phi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}V \longrightarrow \phi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \longrightarrow \phi(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^3} \right) \right| \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3 \,. \tag{16.62}$$

Der letzte Schritt entspricht eigentlich nur einem Koordinatenwechsel von den kartesischen Koordinaten $\{x^i\}$ zu den neuen Koordinaten $\{u^{\alpha}\}$. Seien ganz allgemein (U_1, ϕ_1) und (U_2, ϕ_2) zwei lokale Karten einer *d*-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, dann definiert die Abbildung $\phi_2 \circ \phi_{-1}^1 : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{R}^d$ einen Koordinatenwechsel auf dem Gebiet $U_1 \cap U_2$. Für eine entsprechende *p*-Form gilt dann

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{i_1\dots i_p} \mathrm{d} x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d} x^{i_p} = \omega_{i_1\dots i_p} \left| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right| \mathrm{d} y^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d} y^{j_p} \,. \tag{16.63}$$

Die *p*-Form selbst bleibt bei einem Koordinatenwechsel natürlich unverändert, aber ihre Komponenten in lokalen Koordinaten ändern sich.

Die Integralsätze von Stokes und Gauß werden nun zu dem allgemeinen Integralsatz von Stokes: Sei $\boldsymbol{\omega}$ eine p-1-Form von M und \mathcal{F} eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M mit p-1-dimensionalem Rand $\partial \mathcal{F}$, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial \mathcal{F}} \boldsymbol{\omega} \,. \tag{16.64}$$

Zum Beweis betrachten wir Koordinaten, in denen die *p*-dimensionale Untermannigfaltigkeit durch den *p*-dimensionalen Würfel $(x^1, ..., x^p) \subset [0, 1]^p$ beschrieben wird, d.h. die Vektorfelder, die diesen Würfel aufspannen, sind $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ (i = 1, ..., p). Dann können wir für eine p-1-Form, deren äußere Ableitung über diesen Würfel integriert werden soll, schreiben: $\boldsymbol{\omega} = \sum_i \omega^i dx^1 ... dx^i ... dx^p$, wobei dx^i and deuten soll, dass der Term dx^i fehlt. Alle anderen Terme in einer p-1-Form ergeben null, wenn sie auf die Vektorfelder X^i (i = 1, ..., p) angewandt werden. Außerdem ist $d\boldsymbol{\omega} = \sum_i (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega^i}{\partial x^i} dx^1 ... dx^i ... dx^p$ und wir erhalten:

$$\int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{p} \int (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega^{i}}{\partial x^{i}} \mathrm{d}x^{1} \dots \mathrm{d}x^{i} \dots \mathrm{d}x^{p} = \sum_{i=1}^{p} \int \omega \Big|_{x^{i}=0}^{x^{i}=1} \mathrm{d}x^{1} \dots \widehat{\mathrm{d}x^{i}} \dots \mathrm{d}x^{p} = \int_{\partial \mathcal{F}} \boldsymbol{\omega} \,. \tag{16.65}$$

Ahnlich wie auch bei den Beweisen für den Stokes'schen und Gaußschen Satz in Kapitel 7 beschreibt die letzte Summe eine Summe über die 2p-Oberflächen (für jede der p Dimensionen die entsprechenden zwei gegenüberliegenden Flächen, deren "Normalenvektor" in die zugehörige Richtung zeigt), die den p-dimensinalen Würfel beranden.

16.4 Anwendungen

16.4.1 Elektrodynamik I: 3-dimensionaler Formalismus

Natürlich kann man auch die Elektrodynamik auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten formulieren, doch hier beziehen wir uns auf die Elektrodynamik im \mathbb{R}^3 . Das bedeutet, wir betrachten den \mathbb{R}^3 als Mannigfaltigkeit und gleichzeitig als die Karte zu dieser Mannigfaltigkeit. In diesem Abschnitt beziehen sich die Differentiale immer auf den Raum als \mathbb{R}^3 . Indizes laufen von 1 bis 3 und bezeichnen die räumlichen Koordinaten.

Ausgangspunkt sind das skalare Potenzial $\phi(\boldsymbol{x})$, eine 0-Form, und das Vektorpotenzial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, eine 1-Form: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = A_i(\boldsymbol{x}) dx^i$. Das elektrische Feld \boldsymbol{E} ist der Gradient des skalaren Potenzials, also $\boldsymbol{E} = -d\phi$, und damit eine 1-Form. Das magnetische Feld \boldsymbol{B} ist die Rotation des Vektorpotenzials und somit eine 2-Form: $\boldsymbol{B} = d\boldsymbol{A}$. Gibt es noch eine Zeitabhängigkeit, gelten die Beziehungen:

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{d}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$
 und $\boldsymbol{B} = \mathrm{d}\boldsymbol{A}$. (16.66)

Eine Eichtransformation $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla \chi$ und $\phi \to \phi + \dot{\phi}$ bedeutet nun:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + d\chi$$
 und $\phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial}{\partial t}\chi$. (16.67)

Unter den Eichtransformationen bleiben E und B invariant:

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{d}\phi' + \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\mathrm{d}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{d}\chi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{d}\chi = -\mathrm{d}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$
(16.68)

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{d}\boldsymbol{A}' = \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \mathrm{d}\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}\boldsymbol{A} \,. \tag{16.69}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen lauten:

$$d\boldsymbol{B} = 0 \quad (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0) \qquad \text{und} \qquad d\boldsymbol{E} = d\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \,. \tag{16.70}$$

Für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen müssen wir noch die Ladungsdichte und die Ströme als Formen definieren. Die Ladungsdichte muss über ein Volumen integriert werden, sodass man die Gesamtladung innerhalb dieses Volumens erhält; sie ist eine Volumendichte und damit eine 3-Form: $\rho(\boldsymbol{x})dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ muss über eine Fläche integriert werden, um einen Strom zu ergeben. Sie ist somit eine 2-Form. Die Kontinuitätsgleichung wird zu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{d}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = 0 \qquad (16.71)$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten nun:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho(\boldsymbol{x}) \implies \mathrm{d} * \boldsymbol{E} = \rho$$
 (16.72)

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \implies \mathrm{d} * \boldsymbol{B} - \frac{\partial}{\partial t} * \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{j}.$$
 (16.73)

Man beachte hier, dass das Hodge-duale des elektrischen Feldes, *E, eine 2-Form ist und das Hodgeduale des magnetischen Feldes, *B, eine 1-Form. Das totale Differential einer 2-Form ergibt eine 3-Form (die Ladungsdichte) und das totale Differential einer 1-Form eine 2-Form (die Stromdichte).

16.4.2 Elektrodynamik II: 4-dimensionaler (kovarianter) Formalismus

Der 3-dimensionale Formalismus der Elektrodynamik des letzten Abschnitts wird besonders symmetrisch und elegant, wenn man die Elektrostatik und Magnetostatik betrachtet, also keine Zeitabhängigkeiten vorliegen. Mit einer Zeitabhängigkeit ist es sinnvoll, die Zeit als vierte Koordinate der Raumzeit aufzufassen (wir schreiben dafür $x^0 = ct$, wobei im Folgenden immer Einheiten gewählt werden, in denen die Lichtgeschwindigkeit c den Wert 1 hat) und den Differentialformenkalkül des \mathbb{R}^4 zu betrachten. Bei den Dualitätstransformationen (dem *-Operator) muss allerdings bedacht werden, dass die symmetrische, nicht-entartete Bilinearform die Minkowski-Metrik ist. Das beeinflusst bei den Dualitätstransformationen einige Vorzeichen.

Das 4-Vektorpotenzial $A = (\phi, \mathbf{A})$ ist nun eine 1-Form: $A = A_i dx^i$, wobei $A_0 = \phi$ die Zeitkomponente dieser 1-Form ist. Die Stromdichte wird zu einer 3-Form:

$$j(x) = \rho \,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + j^1 \,\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + j^2 \,\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + j^3 \,\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \,. \tag{16.74}$$

Hierbei ist Folgendes zu bedenken: Das Integral über das räumliche 3-Volumen ist ein Integral über die Ladungsdichte und ergibt die Gesamtladung in dem Volumen. Die 3-dimensionalen Integrale über die Stromdichte sind räumliche Flächenintegrale sowie ein Integral über die Zeit. Die räumlichen Flächenintegrale ergeben einen Strom, das zusätzliche Integral über die Zeit ergibt wieder eine Ladung: Die Gesamtladung Q, die innerhalb eines bestimmten Zeitraums durch eine bestimme Fläche geflossen ist.

Die Kontinuitätsgleichung lautet nun:

$$dj = 0.$$
 (16.75)

Das elektrische und magnetische Feld werden nun zum Feldstärketensor (eine 2-Form) zusammengefasst:

$$F = dA = \sum_{i=1}^{3} E_i dx^0 \wedge dx^i + \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k \simeq F \mu \nu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$
(16.76)

Hierbei ist F = dA die differentielle Form von $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$.

Eine Eichtransformation besteht wiederum in der Freiheit, zu A ein totales Differential addieren zu können:

$$A \to A' = A + \mathrm{d}\chi\,,\tag{16.77}$$

und die kovariante Lorentz-Eichtung $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ entspricht nun der Forderung: d * A = 0.

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind erfüllt, weil F bereits ein totales Differential ist:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}\mathrm{d}A = 0\,.\tag{16.78}$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen erfordern wieder den zu F dualen Tensor $\tilde{F} = *F$, bei dem relativ zu F im Wesentlichen (bis auf Vorzeichen) das elektrische und magnetische Feld ausgetauscht sind:

$$*F = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (16.79)

Damit lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen:

$$d * F = j. (16.80)$$

Die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt, da dj = dd * F = 0.

16.4. ANWENDUNGEN

Zwei Komplikationen treten in der Praxis auf, die mit der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ = diag(-1,1,1,1) zusammenhängen und sich hauptsächlich auf den 4-dimensionalen Formalismus beziehen: (1) Bei den Dualitätstransformationen muss in den Zeitkomponenten das Vorzeichen in der Minkowski-Metrik berücksichtigt werden, und (2) muss man zwischen unten und oben stehenden Indizes, also z.B. A_{μ} und A^{μ} oder $F_{\mu\nu}$ und $F^{\mu\nu}$ unterscheiden. Auch hier bewirkt die Minkowski-Metrik, dass in den zeitlichen Komponenten Vorzeichenwechsel auftreten können. Wenn wir von Differentialformen sprechen, tragen die Komponenten die Indizes unten.

Eine dritte Komplikation ist eher physikalischer Natur: Man muss beim sogenannten makroskopischen Elektromagnetismus (oder Elektromagnetismus in einem Medium) zwischen den Feldstärken - E als elektrische Feldstärke und H als magnetische Feldstärke, beides sind im 3dimensionalen Formalismus 1-Formen - und den Flussdichten - D als elektrische Flussdichte und B als magnetische Flussdichte, beides sind im 3-dimensionalen Formalismus 2-Formen - unterscheiden. Die Dualitätstransformation enthält dann noch die Materialgrößen ϵ und μ , bei nicht isotropen Medien können das Tensoren sein, und eventuell noch die Magnetisierung M oder die Polarisation P.

16.4.3 Thermodynamik

Aus der Thermodynamik kennen wir z.B. die Gibbs'sche Fundamentalform

$$dE = TdS - pdV + \mu dN.$$
(16.81)

Hierbei sind E die innere Gesamtenergie, S die Entropie, V das Volumen und N die Teilchenzahl eines thermodynamischen Systems, sowie T die Temperatur, p der Druck und μ das chemische Potenzial dieses Systems. Während die extensiven Zustandsgrößen E, S, V und N (zumindest theoretisch) für beliebige Mikrozustände definiert sind, sind die intesiven Größen T, p und μ zunächst nur für thermodynamische Gleichgewichtszustände definiert. Außerdem geht man in diesem Fall davon aus, dass die Größen S, V und N kontrolliert werden können (also durch den Aufbau des Systems eingestellt werden können), wohingegen sich die intensiven Größen

$$T(S, V, N) = \frac{\partial E}{\partial S} \qquad p(S, V, N) = -\frac{\partial E}{\partial V} \qquad \mu(S, V, N) = \frac{\partial E}{\partial N}$$
(16.82)

entsprechend der kontrollierten Parameter anpassen. Solche Systeme bezeichnet man in der Thermodynamik als mikrokanonische Systeme.

Man stellt sich die Formen dE, dS, dV und dN gerne als infinitesimale Differenzen oder Verschiebungen vor und interpretiert die Fundamentalform als eine Beziehung zwischen diesen vier Größen. Man kann die Gibb'sche Fundamentalform aber auch als eine Beziehung zwischen Differentialformen und somit linearen Abbildungen interpretieren. Diese Differentialformen sind auf einen Prozess anzuwenden, wobei ein Prozess durch einen Weg auf dem Raum der thermischen Gleichgewichtszustände beschrieben wird, d.h. beispielsweise eine Funktion $\gamma(t) = (S(t), V(t), N(t))$, die angibt, wie sich die (unabhängigen) Größen S, V und N als Funktion eines Parameters (das kann, muss aber nicht die Zeit sein) verändern. Da der Prozess ausschließlich thermische Gleichgewichtszustände durchläuft, handelt es sich um einen reversiblen Prozess, d.h., er kann in beide Richtungen realisiert werden. Man erhält dann

$$E(t) = \int_{\gamma} (T dS - p dV + \mu dN) = \int_{t_0}^t \left(T(t') \frac{dS}{dt'} - p(t') \frac{dV}{dt'} + \mu(t') \frac{dN}{dt'} \right) dt'.$$
 (16.83)

Dies beschreibt, wie sich die innere Energie des Systems im Verlauf des vorgegebenen Prozesses verändert.

Wir beschreiben für eine gegebene einphasige Substanz den Raum der thermodynamischen Gleichgewichtszustände durch drei Koordinaten, z.B., durch die Entropie S, das Volumen V und die

Teilchenzahl N. Die Gesamtenergie E ist dann eine Funktion auf diesem Raum, d.h. E = E(S, V, N). Wir können aber auch einen 4-dimensionalen Raum mit den Koordinaten E, S, V, N betrachten und die Menge der Gleichgewichtszustände als eine 3-dimensionale Hyperfläche in diesem Raum, definiert durch die Gleichung $\Phi(E, S, V, N) = E - E(S, V, N) = 0$, ansehen. Dies hat den Vorteil, dass alle vier Parameter gleichberechtigt sind und zur Charakterisierung der Hyperfläche der thermischen Gleichgewichtszustände je drei dieser Größen gewählt werden können. Insbesondere kann man die Entropie S als Funktion der anderen Parameter betrachten, also S = S(E, V, N), und die Gibb'sche Fundamentalform in der Form

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}E + \frac{p}{T}\mathrm{d}V - \frac{\mu}{T}\mathrm{d}N \tag{16.84}$$

mit

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \qquad p = T \frac{\partial S}{\partial V} \qquad \mu = -T \frac{\partial S}{\partial N} \tag{16.85}$$

schreiben, wobei alle Größen als Funktion von (E, V, N) aufzufassen sind. Dies ist in der statistischen Mechanik manchmal von Vorteil, wenn man die Boltzmann-Entropie $S = k_{\rm B} \ln \Omega(E, V, N)$ als den natürlichen Logarithmus der Anzahl Ω der Mikrozustände zu einem gegebenen Makrozustand, gekennzeichnet durch (E, V, N), definiert.

Der Formalismus der Differentialformen in der Thermodynamik zeigt auch seine Vorteile, wenn man Gleichungen der Form

$$\mathrm{d}E = \delta Q - \delta W \tag{16.86}$$

betrachtet. Hierbei handelt es sich um die Energie
erhaltung bei thermodynamischen Systemen. δQ beschreibt die Änderung der inner
en Energie aufgrund eines Wärmeflusses in das System (oder aus dem System) und
 δW beschreibt die Änderung der inneren Energie aufgrund von Arbeit
t $\delta W = p dV$, die das System an der Umgebung leistet. Während d
E ein totales Differential darstellt, also eine exakte
 1-Form, handelt es sich bei δQ und
 δW einfach nur um 1-Formen, zu denen es aber keine Funktionen (Zustandsgrößen) gibt von denen diese 1-Formen Differentiale sind. Es gibt keine Zustandsgrößen Wärme oder Arbeit. Diese 1-Formen sind also im Allgemeinen nicht exakt. Dies soll das δ zum
 Ausdruck bringen.

In diesem Fall ist es naheliegender, die Ausdrücke δQ und δW als Abbildungen zu betrachten, die einem Prozess einen Wert zu ordnen. Die Menge an Wärme, die bei einem Prozess zwischen einem System und seiner Umgebung ausgetauscht wurde, kann man wieder durch ein Integral berechnen:

$$\Delta Q(\gamma) = \int_{\gamma} \delta Q = \int \frac{\delta Q(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$
(16.87)

Dieses Integral hängt von dem Weg γ ab (ähnlich wie die zu leistende Arbeit gegen ein nichtkonservatives Kraftfeld vom Weg abhängt).

Ein Beispiel: Die Höhenfunktion auf einer Landkarte

Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge betrachten wir ein einfaches Beispiel. Gegeben sei die Höhenfunktion H(x, y) über einer 2-dimensionalen Landschaft (bzw. in einer Karte dieser Landschaft), parametrisiert durch die Koordinaten x und y. Das totale Differential ist

$$dH(x,y) = h_x(x,y)dx + h_ydy = \delta X + \delta Y$$
(16.88)

mit

$$h_x(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$$
 und $h_y(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$. (16.89)

16.4. ANWENDUNGEN

 $\delta X = h_x dx$ und $\delta Y = h_y dy$ sind 1-Formen, die nicht exakt sind. Zu einem Weg $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, der die Punkte $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ und $(x, y) = (x(t_1), y(t_1))$ verbindet, kann man den gesamten Höhenunterschied zwischen Anfangs- und Endpunkt bestimmen,

$$H(x,y) - H(x_0,y_0) = \int_{\gamma} dH = \int_{t_0}^{t_1} \left(h_x(x(t),y(t)) \frac{dx}{dt} + h_y(x(t),y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt;$$
(16.90)

dieser Höhenunterschied hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht aber vom Weg selber. Man kann aber auch berechnen, wie viel Höhenunterschied man entlang der x-Achse (z.B. Ost-West-Richtung) und wie viel Höhenunterschied man entlang der y-Achse (Nord-Süd-Richtung) zurückgelegt hat:

$$\Delta X = \int \frac{\delta X(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int h_x(x(t), y(t)) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \Delta Y = \int \frac{\delta Y(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int h_y(x(t), y(t)) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \,. \tag{16.91}$$

Diese Größen hängen vom Weg ab. Daher gibt es auch keine Funktion, die nur von dem Ort (x, y) abhängt und die angibt, "wie viel Höhe dieser Punkt bezüglich der Ost-West-Richtung" hat. Einem Punkt kann man nicht entnehmen, wie man dorthin gekommen ist. Die Größen δX und δY sind also nur sinnvoll, wenn man sie auf einen Weg anwendet und integriert.

Legendre-Transformationen

Der Formalismus mit Differentialformen erlaubt auch einen einfachen Wechsel zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen. Beispielsweise ist die Entropie in einem System sehr schwer zu kontrollieren und auf einen festen Wert einzustellen, wohingegen die Temperatur sehr leicht zu kontrollieren ist - dazu verwendet man einfach ein Wärmebad. In vielen Fällen ist auch der Druck leichter zu kontrollieren als das Volumen, beispielsweise bei Flüssigkeiten, die sich nicht in einem abgeschlossenen Behälter befinden und dem Atmosphärendruck unterliegen.

Der Wechsel beispielsweise von der Koordinate Entropie zur Koordinate Temperatur erfolgt einfach dadurch, dass man von dem thermodynamischen Potenzial (der Energie) das Produkt aus Temperatur und Entropie abzieht. Dann folgt:

$$d(E - TS) = dE - SdT - TdS = -SdT - pdV + \mu dN.$$
(16.92)

Die Größe F = E - TS bezeichnet man als *freie Energie*. Die unabhängigen (kontrollierten) Variablen sind nun die Temperatur T, das Volumen V und die Teilchenzahl N, wohingegen sich die Entropie S, der Druck p und das chemische Potenzial μ entsprechend einstellen. Solche Systeme bezeichnet man als kanonische Systeme. Sie werden realisiert, indem man das System in einem geschlossenen festen Behälter mit einem Wärmebad der Temperatur T in Kontakt bringt. Wird zusätzlich noch der Druck p kontrolliert, betrachtet man als Fundamentalform:

$$d(E - TS + pV) = -SdT - pdV + \mu dN + Vdp + pdV = -SdT + Vdp + \mu dN.$$
(16.93)

Das thermodynamische Potenzial H = E - TS + pV bezeichnet man als *freie Enthalpie*. Die kontrollierten unabhängigen Variablen sind nun T, p und N. Realisiert werden diese Systeme durch einen geschlossenen Behälter, der in Kontakt mit einem Wärmebad bei der Temperatur T ist und der z.B. einen frei bewegtlichen Kolben hat, sodass der Druck p konstant bleibt sich aber das Volumen einstellen kann.

Die Transformationen von E = E(S, V, N) zu F = F(T, V, N) bzw. zu H = H(T, p, N)bezeichnet man als *Legendre-Transformationen*. Die verschiedenen thermodynamischen Potenziale sind lediglich verschiedene Möglichkeiten, die Menge der thermischen Gleichgewichtszustände durch unterschiedliche Parameter zu charakterisieren. Ein anderes Beispiel für eine Legendre-Transformation ist aus der Mechanik bekannt, wo man einmal die Lagrange-Funktion $L = L(q, \dot{q})$ und einmal die Energie H = H(q, p) als "Potenzial" betrachtet. Für die Lagrange-Funktion gilt:

$$dL = p d\dot{q} + F dq$$
 mit $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ und $F = \frac{\partial L}{\partial q}$, (16.94)

wobei in der zweiten Gleichung die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q} = F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{16.95}$$

steckt. Der Wechsel von der Variablen \dot{q} zur Variablen p erfolgt wieder durch eine Legendre-Transformation:

$$d(L - p\dot{q}) = p \,d\dot{q} + F \,dq - p \,d\dot{q} - \dot{q} \,dp = +F \,dq - \dot{q} \,dp \,.$$
(16.96)

Für die Energie $H=\dot{q}p-L$ folgt:

$$dH = -F dq + \dot{q} dp$$
 mit $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ und $-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} = -F$. (16.97)

Kapitel A1

Anhang I

Im Anhang werden einige Beweise nachgetragen, die etwas rechenaufwendig sind allerdings keine großen konzeptuellen bzw. grundlegenden Probleme beinhalten.

A1.1 Die Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

Wir beweisen zunächst folgende Identität für drei beliebige Vektoren (im \mathbb{R}^3):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.$$
(A1.1)

Die Identität soll für beliebige drei Vektoren gelten, insbesondere auch für drei linear unabhängige Vektoren. Da der Vektor auf der linken Seite orthogonal zu \vec{a} sein muss, kann er keine Komponente in \vec{a} -Richtung haben. Es gilt also:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \beta \, \vec{b} - \gamma \, \vec{c} \,. \tag{A1.2}$$

Das Skalarprodukt dieses Vektors mit \vec{a} muss verschwinden:

$$\vec{a} \cdot (\beta \, \vec{b} - \gamma \, \vec{c}) = 0 \,. \tag{A1.3}$$

oder

$$\beta(\vec{a}\cdot\vec{b}) - \gamma(\vec{a}\cdot\vec{c}) = 0.$$
(A1.4)

Eine Lösung dieser Gleichung für β und γ ist offensichtlich

$$\beta = x(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad \text{und} \quad \gamma = -x(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{A1.5}$$

für eine noch beliebige Zahl x. Da die Identität für drei beliebige Vektoren gelten soll, ist das auch die einzige Möglichkeit. Wir legen den Faktor x nun dadurch fest, dass wir drei spezielle Vektoren wählen, bei denen das Ergebnis bekannt ist:

$$\vec{a} = \vec{e}_1 \ , \ \vec{b} = \vec{e}_1 \ , \ \vec{c} = \vec{e}_2$$
 (A1.6)

$$\implies \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{e_1} \times (\vec{e_1} \times \vec{e_2}) = \vec{e_1} \times \vec{e_3} = -\vec{e_2} \,. \tag{A1.7}$$

Für β und γ folgt:

$$\beta = 0 \quad \gamma = -1 \implies x = 1. \tag{A1.8}$$

Damit ist die Identität Gl. A1.1 bewiesen.

Nun stellen wir die *i*-te Komponente auf beiden Seiten von Gl. A1.1 durch ϵ - und δ -Symbole dar. Zunächst die linke Seite:

$$\left(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\right)_{i} = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_{j} (\vec{b} \times \vec{c})_{k} = \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} a_{j} b_{l} c_{m} = \sum_{jlm} \left(\sum_{k} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}\right) a_{j} b_{l} c_{m} .$$
(A1.9)

Für die rechte Seite von Gl. A1.1 gilt:

$$\left(\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\right)_{i}=\sum_{j}\left(a_{j}c_{j}b_{i}-a_{j}b_{j}c_{i}\right)$$
(A1.10)

Die Skalarprodukte werden nun durch δ -Symbole (mit Summationsindex l) ausgedrückt und der Index i an den Vektorkomponenten ebenfalls durch ein δ -Symbol (Summationsindex m) ersetzt:

$$\sum_{j} (a_j c_j b_i - a_j b_j c_i) = \sum_{jlm} \left(a_j c_l \delta_{jl} b_m \delta_{im} - a_j b_l \delta_{jl} c_m \delta_{im} \right)$$
(A1.11)

$$= \sum_{jlm} \left(a_j c_m \delta_{jm} b_l \delta_{il} - a_j b_l \delta_{jl} c_m \delta_{im} \right)$$
(A1.12)

$$= \sum_{jlm} \left(\delta_{jm} \delta_{il} - \delta_{jl} \delta_{im} \right) a_j b_l c_m \tag{A1.13}$$

Die beiden rechten Seiten von Gl. A1.9 und A1.13 müssen für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gleich sein, also müssen die Ausdrücke innerhalb der Klammern gleich sein und damit ist die Identität für die ϵ -Symbole bewiesen.

A1.2 Einige Integrale

A1.2.1 Das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x} dx$$

Wir berechnen zunächst das Integral

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \sin kx \, dx \,, \tag{A1.14}$$

wobei gilt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{d}a \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \sin kx \,\mathrm{d}x \,. \tag{A1.15}$$

Mit $\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$ lässt sich das Integral über x ausführen:

$$I(a) = \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-ax} \left(e^{ikx} - e^{-ikx} \right) dx = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{a - ik} - \frac{1}{a + ik} \right) = \frac{k}{k^2 + a^2}.$$
 (A1.16)

Das Integral über a ergibt sich nun aus Gl. 9.127 zu:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} \, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}a \, I(a) = \frac{\pi}{2} \,. \tag{A1.17}$$

A1.2.2 Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos kx}{x^2} dx$

Zur Bestimmung dieses Integrals verwende ich Gl. 9.127 aus Kapitel 9. Zunächst gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x \,. \tag{A1.18}$$

Am Ende werde ich den Grenzfall $a \rightarrow 0$ betrachten. Nach Gl. 9.127 gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} \mathrm{e}^{-|k|a} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} \mathrm{e}^{-|k|a} \,. \tag{A1.19}$$

Da wir an dem Grenzwert $a \to 0$ interessiert sind, entwickle ich die Exponentialfunktion bis zur linearen Ordnung in a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} (1 - |k|a + O(a^2)) - \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} (1 - |k|a + O(a^2)) = \pi |k| + O(a). \quad (A1.20)$$

Nun kann man den Grenzfall $a \to 0$ nehmen und erhält:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{x^2} \,\mathrm{d}x = \pi |k| \,. \tag{A1.21}$$

Kapitel A2

Anhang II

Im Anhang werden einige Beweise nachgetragen, die etwas rechenaufwendig sind allerdings keine großen konzeptuellen bzw. grundlegenden Probleme beinhalten.

A2.1 Die Oberfläche der *d*-dimensionalen Einheitskugel

Die Oberfläche der d-dimensionalen Einheitskugel bestimmt man beispielsweise mithilfe von Gauß'schen Integralen. Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
 (A2.1)

erhält man für das Integral in d Dimensionen:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)} d^d x = \pi^{d/2} .$$
 (A2.2)

Ausgedrückt in Kugelkoordinaten gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)} = \int_0^\infty r^{d-1} dr e^{-r^2} \int_\Omega d\Omega \,.$$
(A2.3)

Die gesuchte Oberfläche ist

$$\Omega(d) = \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \,. \tag{A2.4}$$

Mit der Definition der Gamma-Funktion

$$\int_0^\infty t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \Gamma(n) \tag{A2.5}$$

und

$$dy = dr^2 = 2rdr$$
 bzw. $dr = \frac{1}{2r}dy$ oder $dr = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ (A2.6)

folgt

$$\int_{0}^{\infty} r^{d-1} \mathrm{e}^{-r^{2}} \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} y^{(\frac{d}{2}-1)} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$$
(A2.7)

Damit ergibt sich für die Oberfläche der *d*-dimensionalen Einheitskugel:

$$\Omega(d) = \frac{2(\pi)^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$
(A2.8)

A2.2 Die Minkowski-Ungleichung

Die Minkowski-Ungleichung tritt im Zusammenhang mit ℓ_p -Normen auf und entspricht im Wesentlichen der Dreiecksungleichung:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p},$$
(A2.9)

wobei $x_i \in \mathbb{C}$ und $1 \leq p \in \mathbb{R}$. Wir verwenden für den Beweis die Ungleichung für konvexe Funktionen $(f''(x) \geq 0)$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) , \qquad 0 \le \lambda \le 1.$$
(A2.10)

Die Funktion $f(x) = x^p$ ist konvex für $p \ge 1$. Die Ungleichung besagt, dass für den Graphen der Funktion die Verbindungslinie zwischen zwei Funktionswerten oberhalb der Funktion selbst verläuft. Wir wählen im Folgenden:

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} , \quad B = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} , \quad x = \frac{|x_i|}{A} , \quad y = \frac{|y_i|}{B} , \quad \lambda = \frac{A}{A+B}.$$
 (A2.11)

Damit folgt $1 - \lambda = \frac{B}{A+B}$. Die obige Ungleichung lautet nun:

$$\left(\frac{A}{A+B}\frac{|x_i|}{A} + \frac{B}{A+B}\frac{|y_i|}{B}\right)^p \le \frac{A}{A+B}\left(\frac{|x_i|}{A}\right)^p + \frac{B}{A+B}\left(\frac{|y_i|}{B}\right)^p.$$
 (A2.12)

Diese Ungleichung gilt für jedes i, wir können also über alle i summieren:

$$\frac{1}{(A+B)^p} \sum_{i=1}^n \left(|x_i| + |y_i|\right)^p \le \frac{A}{(A+B)A^p} \sum_{i=1}^n (|x_i|)^p + \frac{B}{(A+B)B^p} \sum_{i=1}^n (|y_i|)^p.$$
(A2.13)

Da

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = A^p \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p = B^p \quad (A2.14)$$

ist die rechte Seite der Ungleichung gleich 1 und wir erhalten nach Multiplikation mit $(A + B)^p$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i| \right)^p \le (A+B)^p \,. \tag{A2.15}$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die p-te Wurzel folgt die Minkowski-Ungleichung.

A2.3 Die Parallelogramm-Identität

Wenn g(x, y) ein Skalarprodukt von Vektoren x und y bezeichnet und $||x||^2 = g(x, x)$ die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm, gilt

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = g(x+y,x+y) + g(x-y,x-y) = 2g(x,x) + 2g(y,y) = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$
 (A2.16)

Die gemischten Terme heben sich in der Gleichung weg. Diese Identität,

$$[||x+y||^{2} + ||x-y||^{2} = 2||x||^{2} + 2||y||^{2}],$$
(A2.17)

bezeichnet man als *Parallelogramm-Identität*. Eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm erfüllt diese Identität immer.

A2.3. DIE PARALLELOGRAMM-IDENTITÄT

Umgekehrt besagt der *Satz von Jordan und von Neumann*, dass man auf einem normierten Vektorraum genau dann ein Skalarprodukt definieren kann, das diese Norm induziert, wenn die Norm die Parallelogramm-Identität erfüllt. Das Skalarprodukt ist in diesem Fall

$$g(x,y) = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \right).$$
(A2.18)

Dies ist die Form, die man in Mathematikbüchern findet. Sie ist allerdings im zweiten Argument (y) antilinear, d.h. es gilt $g(x, \alpha y) = \overline{\alpha}g(x, y)$. Für die in der Physik übliche Notation müssen x und y vertauscht werden.

Zunächst gilt, da $|1 + i| = |1 - i| = \sqrt{2}$:

$$g(x,x) = \frac{1}{4} \left(\|2x\|^2 - 0 + i(|1+i|\|x\|) - i(|1-i|\|x\|) \right) = \|x\|^2.$$
 (A2.19)

Damit sind auch $g(x,x) \ge 0$ und $g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ gezeigt. Im nächsten Schritt nutzen wir aus, dass

$$\|y + ix\| = \|i(y + ix)\| = \|-x + iy\| = \|x - iy\|$$
(A2.20)

und eine entsprechende Identität für ||y - ix||. Damit folgt

$$g(y,x) = \overline{g(x,y)}$$
 (A2.21)

Nun zeigen wir den additiven Teil der Linearitätsbedingung, d.h. g(x, y + z) = g(x, y) + g(x, z). Dies geschieht im Real- und Imaginärteil getrennt. Ich beginne mit dem Realteil.

Re
$$g(x, y+z) = \frac{1}{4} \left(\|x+y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2 \right).$$
 (A2.22)

Nun gilt nach der Parallelogramm-Identität

$$||x + y + z||^2 = 2||x + y||^2 + 2||z||^2 - ||x + y - z||^2$$
(A2.23)

$$= 2||x+z||^{2} + 2||y||^{2} - ||x-y+z||^{2}, \qquad (A2.24)$$

wobei wir die Identität einmal auf (x + y) und z und einmal auf (x + z) und y angewandt haben. Da die linke Seite gleich beiden Termen auf der rechten Seite ist, können wir sie auch als die halbe Summe darstellen:

$$\|x+y+z\|^{2} = \frac{1}{2} \Big(2\|x+y\|^{2} + 2\|z\|^{2} - \|x+y-z\|^{2} + 2\|x+z\|^{2} + 2\|y\|^{2} - \|x-y+z\|^{2} \Big)$$

$$= \|z\|^{2} + \|y\|^{2} + \|x+y\|^{2} + \|x+z\|^{2} - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^{2} - \frac{1}{2}\|x+y-z\|^{2}$$
(A2.25)

Für den zweiten Term auf der rechten Seite von Gl. A2.22 erhalten wir eine entsprechende Ungleichung, indem wir x durch -x ersetzen (und ausnutzen, dass ||a|| = ||-a||):

$$\|x - y - z\|^{2} = \|z\|^{2} + \|y\|^{2} + \|x - y\|^{2} + \|x - z\|^{2} - \frac{1}{2}\|x + y - z\|^{2} - \frac{1}{2}\|x - y + z\|^{2}$$
(A2.26)

Wir bilden nun die Differenz der beiden Terme und erhalten

$$\|x+y+z\|^{2} - \|x-y-z\|^{2} = \|x+y\|^{2} + \|x+z\|^{2} - \|x-y\|^{2} - \|x-z\|^{2}$$
(A2.27)

und somit

$$\operatorname{Re} g(x, y + z) = \operatorname{Re} g(x, y) + \operatorname{Re} g(x, z).$$
(A2.28)

Für den Imaginärteil der gesuchten Identität gilt:

Im
$$g(x, y+z) = \frac{1}{4} \left(\|x + i(y+z)\|^2 - \|x - i(y-z)\|^2 \right).$$
 (A2.29)

Offenbar müssen wir nur überall konsequent y durch iy und z durch iz ersetzen, sodass wir für die rechte Seite erhalten:

$$\|x + i(y+z)\|^{2} - \|x - i(y+z)\|^{2} = \|x + iy\|^{2} + \|x + iz\|^{2} - \|x - iy\|^{2} - \|x - iz\|^{2}.$$
 (A2.30)

Dies ist das gewünschte Ergebnis:

$$g(x, y+z) = g(x, y) + g(x, z)$$
(A2.31)

Es verbleibt noch das Skalierungsgesetz: $g(x, \alpha y) = \alpha g(x, y)$. Hier beweist man zunächst noch rein algebraisch dieses Gesetz für $\alpha \in \mathbb{Q}$ und nutzt dann aus, das die Abbildung $y \mapsto g(x, y)$ in ystetig ist (auch die Norm ist eine stetige Abbildung) und somit das Gesetz für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Dann beweist man die Identität auch für die imaginäre Einheit i.

Aus Gl. A2.31 folgt für y = z die Gleichung g(x, 2y) = 2g(x, y). Durch Iteration erhält man g(x, ny) = ng(x, y). Nun betrachtet man

$$g\left(x,\frac{1}{n}y\right) = \frac{n}{n}g\left(x,\frac{1}{n}y\right) = \frac{1}{n}g\left(x,\frac{n}{n}y\right) = \frac{1}{n}g(x,y).$$
 (A2.32)

Damit erhält man insgesamt

$$g(x, \alpha y) = \alpha g(x, y) \qquad \alpha \in \mathbb{Q}.$$
 (A2.33)

Wegen der Stetigkeit von g(x, y) im Argument y (und auch in x) folgt diese Gleichung auch für $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\alpha = i$ gilt:

$$g(x, iy) = \frac{1}{4} \left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 + i\|x - y\|^2 - i\|x + y\|^2 \right)$$
(A2.34)

$$= i\frac{1}{4}\left(-i\|x+iy\|^{2}+i\|x-iy\|^{2}+\|x-y\|^{2}-\|x+y\|^{2}\right)$$
(A2.35)

$$= -ig(x,y). \tag{A2.36}$$

Damit wurden alle Identitäten bewiesen, die ein Skalarprodukt charakterisieren.

A2.4 Fourier-Reihen

Gegeben seien die folgenden drei Funktionen, definiert jeweils für das Intervall $[-\pi, +\pi)$. Diese Funktionen werden periodisch mit der Periode 2π auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt:



(Die senkrechten Linien in den Graphen sind nicht Teil der Funktion sondern dienen der besseren Anschauung.)

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten dieser Funktionen berechnen wir die folgenden Integrale: Die drei folgenden Integrale verschwinden, da eine Funktion symmetrisch und die andere antisymmetrisch ist:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) \cos nx \, dx = 0.$$
(A2.40)

Die restlichen Integrale sind:

$$\int_{0}^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{n} x \sin nx \Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx$$
(A2.41)

$$= 0 - 0 + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^\pi = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$
(A2.42)

Da beide Funktionen symmetrisch sind, ist das Integral von $-\pi$ bis $+\pi$ das Doppelte:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$
(A2.43)

Weiterhin ist:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \tag{A2.44}$$

$$= -(-1)^{n} \frac{2\pi}{n} - \frac{1}{n^{2}} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -(-1)^{n} \frac{2\pi}{n}.$$
 (A2.45)

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{n} \cos nx \Big|_{0}^{\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$
(A2.46)

Für die Fourier-Reihe gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \right) \sin nx \tag{A2.47}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x\right) \cos nx \,. \tag{A2.48}$$

Damit erhalten wir

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x...\right)$$
(A2.49)

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \dots\right)$$
(A2.50)

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)x = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \dots \right)$$
(A2.51)

A2.5 Identitäten zu orthogonalen Polynomen

Viele der folgenden expliziten Rechnungen sind ausführlichere Versionen von Rechnungen aus [Arfken 1970]. Im Gegensatz zu den Kapiteln 14 und 15, wo meist die Differentialgleichungen der Ausgangspunkt waren und daraus die Lösungsfunktionen und einige ihrer Eigenschaften konstruiert wurden, sind hier die Funktionen selbt, z.B. definiert durch erzeugende Funktionen, der Ausgangspunkt und es werden unter anderem die Differentialgleichungen abgeleitet, die sie erfüllen.

A2.5.1 Legendre-Polynome

Die erzeugende Funktion der Legendre-Polynome ist:

$$g(t,x) = \frac{1}{(1-2tx+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \,.$$
(A2.52)

Rekurrenzrelationen und Differentialgleichung

Leiten wir diese Gleichung einmal nach t und einmal nach x ab, erhalten wir auf der linken Seite:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(t,x) = \frac{t}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} = \frac{t}{(1-2tx+t^2)}g(t,x)$$
(A2.53)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t,x) = \frac{x-t}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} = \frac{x-t}{(1-2tx+t^2)}g(t,x)$$
(A2.54)

Wir beginnen mit der zweiten Gleichung: Setzen wir in

$$(1 - 2tx + t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t, x) = (x - t)g(t, x)$$
(A2.55)

die Reihendarstellungen ein, folgt:

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = (x - t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$
(A2.56)

und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}.$$
 (A2.57)
Eine Anpassung der Summationsvariablen, sodass man gleiche Potenzen von terhält, liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2xnP_n(x)t^n + (n-1)P_{n-1}(x)t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(xP_n(x)t^n - P_{n-1}(x)t^n \right),$$
(A2.58)

und da diese Gleichung für jedes t (mit |t| < 1, aber das spielt hier keine Rolle) gelten soll, folgt:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$
(A2.59)

bzw.

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$
(A2.60)

Die Gleichungen sind auch für n = 0 richtig, sofern wir $P_{-1}(x) = 0$ definieren.

Aus Gleichung A2.54 erhalten wir nach ähnlichen Schritten:

$$(1 - 2tx + t^2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(t, x) = tg(t, x)$$
 (A2.61)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}$$
(A2.62)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(P'_{n+1}(x)t^{n+1} - 2xP'_n(x)t^{n+1} + P'_{n-1}(x)t^{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}$$
(A2.63)

und damit

$$P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x) + 2xP'_n(x)$$
(A2.64)

Wir können Gl. A2.60 nach x ableiten und dann Gl. A2.64 verwenden, um dem Term mit $P'_n(x)$ zu eliminieren, und erhalten

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x).$$
(A2.65)

Aus den Gleichungen A2.65 und A2.64 können wir $P'_{n-1}(x)$ eliminieren (indem wir die Summe bilden) oder auch $P'_{n+1}(x)$ (indem wir die Differenz beider Gleichungen bilden) und erhalten jeweils:

$$P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + xP'_n(x)$$
(A2.66)

$$P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x).$$
(A2.67)

Wir multiplizieren Gl. A2.66 mit x und ersetzen in Gl. A2.67 den Index n durch n + 1, dann können wir aus diesen beiden Gleichungen $xP'_{n+1}(x)$ eliminieren und erhalten:

$$(1 - x2)P'_{n}(x) = -(n+1)P_{n+1}(x) + (n+1)xP_{n}(x).$$
(A2.68)

Entsprechend können wir auch Gl. A2.67 mit x multiplizieren und in Gl. A2.66 den Index n durch n-1 ersetzen, aus diesen beiden Gleichungen $xP'_{n-1}(x)$ eliminieren und erhalten schließlich:

$$(1 - x2)P'_{n}(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_{n}(x).$$
(A2.69)

Wir leiten diese Gleichung nochmals nach x ab und eliminieren $P'_{n-1}(x)$ mit Gleichung A2.67. Das führt auf die Differentialgleichung:

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$
(A2.70)

Dies ist eine Eigenwertgleichung der Form:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right) = -n(n+1)P_n(x)$$
(A2.71)

Setzen wir $x = \cos \theta$ und nutzen aus, dass $\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$, erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} P_n(\cos\theta) \right) = -n(n+1)P_n(\cos\theta) \,. \tag{A2.72}$$

Der Operator auf der linken Seite von Gl. A2.71 ist selbst-adjungiert (vgl. Gl. 15.13). Wegen des Faktors $(1 - x^2)$ verschwinden auch die Randterme bei der partiellen Integration.

Orthogonalitätsrelation und Normierung

Da es sich bei Gl. A2.71 um die Eigenwertgleichung zu einem selbst-adjungierten Operator handelt, sind die Polynome $P_n(x)$ orthogonal. Der Normierungsfaktor ergibt sich aus:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-2xt+t^2)} dx = \int_{-1}^{1} \sum_{n,m=0}^{\infty} P_n(x) P_m(x) t^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 t^{2n} \,. \tag{A2.73}$$

Wegen der Orthogonalität verschwinden alle Terme in der zweiten Gleichung, bei denen $n \neq m$ ist. Das Integral auf der linken Seite ist:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-2xt+t^2)} dx = -\frac{1}{2t} \ln(1-2xt+t^2) \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{t} \Big(\ln(1+t) - \ln(1-t) \Big).$$
(A2.74)

Nutzt man die Reihenentwicklung des Logarithmus (Gl. 4.68) fallen die ungeraden Terme wegen des entgegengesetzten Vorzeichens weg, die geraden Terme treten jeweils doppelt auf und wir erhalten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 \mathrm{d}x \right) t^{2n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} \,. \tag{A2.75}$$

Damit folgt auch die Normierung der Legendre-Polynome:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$
(A2.76)

Die Rodrigues-Darstellung

Die Legendre-Polynome haben folgende Darstellung:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n \,. \tag{A2.77}$$

Dies bezeichnet man als die *Rodrigues-Darstellung*. Üblicherweise beweist man diese Gleichung, indem man die explizite Potenzreihenentwicklung vergleicht. Ich gehe hier etwas anders vor.

Ich beweise zunächst, dass die Rodriguez-Darstellung die Rekurrenzrelation A2.66 erfüllt.

$$P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x^2 - 1)^{n+1}$$
(A2.78)

$$= \frac{1}{2^{n} n!} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \left((x^{2} - 1)^{n} x \right)$$
(A2.79)

$$= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} (x^2 - 1)^n \right) x + (n+1) \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \quad (A2.80)$$

$$= xP'_{n}(x) + (n+1)P_{n}(x).$$
(A2.81)

326

A2.5. IDENTITÄTEN ZU ORTHOGONALEN POLYNOMEN

Beim zweiten Schritt habe ich die Leibniz-Formel verwendet:

$$\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x), \qquad (A2.82)$$

die hier allerdings nach dem zweiten Term abbricht. Damit wurde eine Rekurrenzformel für die Ableitung von $P_n(x)$ bewiesen. Dies legt $P_n(x)$ bis auf eine Konstante fest. Wir bestimmen $P_n(1)$ nach der Rodrigues-Formel:

$$P_n(x)\Big|_{x=1} = \left.\frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left((x+1)^n (x-1)^n \right) \right|_{x=1}$$
(A2.83)

Wenden wir die Leibniz-Formel auf das Produkt an, verschwinden bei x = 1 alle Terme, die noch ein (x - 1) enthalten. Es bleibt also lediglich der Term übrig, bei dem alle Ableitungen auf $(x - 1)^n$ angewandt werden; dies ergibt einen Faktor n!. Außerdem wird $(x + 1)^n$ zu 2^n und damit folgt:

$$P_n(x)\big|_{x=1} = P(1) = 1.$$
(A2.84)

Dasselbe Ergebnis erhalten wir aus der erzeugenden Funktion für x = 1:

$$g(t, x = 1) = \frac{1}{(1 - 2t + t^2)^{1/2}} = \frac{1}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n .$$
 (A2.85)

Eine zweite Möglichkeit, die Rodrigues-Darstellung abzuleiten, geht von der Funktion

$$f_n(x) = (x^2 - 1)^n \tag{A2.86}$$

aus. Die erste Ableitung dieser Gleichung liefert:

$$(1 - x2)f'_{n}(x) = -2nf_{n}(x), \qquad (A2.87)$$

nochmalige Ableitung ergibt:

$$(1 - x2)f''_{n}(x) + 2(n - 1)xf'_{n}(x) + 2nf_{n}(x) = 0.$$
(A2.88)

Nun bilden wir von dieser Gleichung die *n*-te Ableitung und verwenden dabei die Leibniz-Formel. Mit $g(x) = f^{(n)}(x)$ führt dies auf

$$(1-x^2)g_n''(x) - 2nxg_n'(x) - n(n-1)g_n(x) + 2(n-1)xg_n'(x) + 2(n-1)ng_n(x) + 2ng_n(x) = 0,$$
(A2.89)

oder

$$(1 - x2)g''_n(x) - 2xg'_n(x) + n(n+1)g_n(x) = 0.$$
 (A2.90)

Die Funktion

$$g_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$
 (A2.91)

erfüllt somit die Legendre'sche Differentialgleichung. Die Normierungskonstante kann wieder durch den Wert bei x = 1 festgelegt werden.

A2.5.2 Assoziierte Legendre-Polynome

Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung A2.70:

$$(1 - x2)P''_{n}(x) - 2xP'_{n}(x) + n(n+1)P_{n}(x) = 0.$$
 (A2.92)

Behauptung: Die Funktionen

$$u_m(x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_n(x) \tag{A2.93}$$

erfüllen die Differentialgleichung

$$(1 - x2)u''_{m}(x) - 2x(m+1)u'_{m}(x) + (n-m)(n+m+1)u_{m}(x) = 0.$$
 (A2.94)

(Der Index *n* bleibt in diesem Abschnitt konstant.) Der Beweis erfolgt (beispielsweise) durch vollständige Induktion. Für m = 0 erhalten wir die Differentialgleichung der Legendre-Polynome und $u_0(x) = P_n(x)$. Der Induktionsanfang gilt also. Wir nehmen nun an, obige Gleichung sei für m erfüllt und leiten sie einmal ab, wobei wir $u_{m+1}(x) = u'_m(x)$ setzen:

$$-2xu'_{m+1}(x) + (1-x^2)u''_{m+1}(x) - 2x(m+1)u'_{m+1}(x) - 2(m+1)u_{m+1}(x) - (n-m)(n+m+1)u_{m+1}(x) = 0$$

bzw.

$$(1 - x^2)u_{m+1}''(x) - 2x(m+2)u_{m+1}'(x) - (2(m+1) + (n-m)(n+m+1))u_{m+1}(x) = 0$$
 (A2.95)

oder

$$(1-x^2)u_{m+1}''(x) - 2x(m+2)u_{m+1}'(x) - (n-m-1)(n+m+2)\big)u_{m+1}(x) = 0.$$
 (A2.96)

Es gilt somit auch der Induktionsschluss.

Nun betrachten wir die Funktion:

$$v_m(x) = (1 - x^2)^{m/2} u_m(x).$$
 (A2.97)

Aufgelöst nach $u_m(x)$ folgt für die ersten beiden Ableitungen nach x:

$$u'_{m}(x) = \left(\frac{mx}{(1-x^{2})}v_{m}(x) + v'_{m}(x)\right)(1-x^{2})^{-m/2}$$
(A2.98)

$$u_m''(x) = \left(\frac{mx}{(1-x^2)}v_m(x) + v_m'(x)\right)\frac{mx}{(1-x^2)}(1-x^2)^{-m/2}$$

$$+ \left[\frac{m}{(1-x^2)}v_m(x) + \frac{2mx^2}{(1-x^2)^2}v_m(x) + \frac{mx}{(1-x^2)}v_m'(x) + v_m''(x)\right](1-x^2)^{-m/2}$$

$$= \left[\frac{m}{(1-x^2)}v_m(x) + \frac{m(m+2)x^2}{(1-x^2)^2}v_m(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)}v_m'(x) + v_m''(x)\right](1-x^2)^{-m/2}$$
(A2.99)

Wir setzen diese beiden Ausdrücke in Gl. A2.94 ein, multiplizieren mit $(1 - x^2)^{m/2}$ und erhalten

$$mv_m(x) + \frac{m(m+2)x^2}{(1-x^2)}v_m(x) + 2mxv'_m(x) + (1-x^2)v''_m(x)$$
(A2.100)

$$-2x(m+1)\left(\frac{mx}{(1-x^2)}v_m(x) + v'_m(x)\right) + (n-m)(n+m+1)v_m(x) = 0 \quad (A2.101)$$

 oder

$$(1-x^2)v_m''(x) - 2xv_m'(x) - \frac{m^2x^2}{(1-x^2)}v_m(x) + mv_m(x) + (n-m)(n+m+1)v_m(x) = 0$$
 (A2.102)

Mit

$$-\frac{x^2}{(1-x^2)} = 1 - \frac{1}{1-x^2}$$
(A2.103)

328

folgt

$$(1 - x^2)v_m'(x) - 2xv_m'(x) - \frac{m^2}{(1 - x^2)}v_m(x) + n(n+1)v_m(x) = 0$$
(A2.104)

Dies bezeichnet man als die *assoziierte* (oder zugeordnete) Legendre'sche Differentialgleichung. Wir haben somit gezeigt, dass die Funktionen

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_n(x)$$
(A2.105)

(das Vorzeichen $(-1)^m$ ist Konvention) die assoziierte Legendre'sche Differentialgleichung erfüllen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^m(x)\right) - \frac{m^2}{(1-x^2)}P_n^m(x) = -n(n+1)P_n^m(x) \ . \tag{A2.106}$$

Ausgedrückt durch $x = \cos \theta$ lautet diese Gleichung:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} P_n^m(\cos\theta) \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_n^m(\cos\theta) = -n(n+1)P_n^m(\cos\theta) \, . \tag{A2.107}$$

Da es sich bei den Legendre-Polynomen $P_n(x)$ um Polynome *n*-ter Ordnung handelt, verschwinden höhere Ableitungen nach x. Die assoziierten Polynome sind also nur für $m \leq n$ sinnvoll. Man kann auch zeigen, dass es für m > n keine Lösungen der Differentialgleichung gibt, die bei $x = \pm 1$ endlich bleiben bzw. auf [-1, +1] quadratintegrierbar sind.

Die Definition der zugeordneten Legendre-Polynome in Gl. A2.105 ist zunächst nur für $m \ge 0$ sinnvoll, und da es sich bei $P_n(x)$ um Polynome *n*-ter Ordnung handelt, ist *m* auf den Bereich $m \le n$ beschränkt. Andererseits hängt Gleichung A2.106 nur von m^2 ab und ist daher auch für $m \le 0$ (mit $|m| \le n$) sinnvoll. Daher definiert man die assoziierten Legendre-Polynome für negative Wert von *m* über die Rodrigues-Darstellung:

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}} (x^2 - 1)^n \,. \tag{A2.108}$$

Diese Definition ist auch für negative Werte von m sinnvoll, also für $-n \le m \le n$. Es handelt sich für negative Werte von m um dieselbe x-Abhängigkeit, allerdings ist der Normierungsfaktor ein anderer:

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \,. \tag{A2.109}$$

A2.5.3 Hermite-Polynome

Die erzeugende Funktion ist

$$e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$
 (A2.110)

Ableitung nach x auf der linken Seite ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-t^2+2tx} = 2t\mathrm{e}^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} 2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2H_n(x)(n+1)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$
 (A2.111)

Ableitung nach x auf der rechten Seite von Gl. A2.110 liefert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \,. \tag{A2.112}$$

Diese Identität gilt, da $H_0(x) = 1$ (das folgt direkt aus Gl. A2.110) und somit $H'_0(x) = 0$. Durch Vergleich erhalten wir:

$$H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x)$$
 oder $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$. (A2.113)

Leitet man beide Seiten von Gl. A2.110 nach t ab, erhält man auf der linken Seite:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t^2+2tx} = (-2t+2x)\mathrm{e}^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} 2xH_n(x)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} 2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}$$
(A2.114)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2x H_n(x) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n H_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (A2.115)$$

und auf der rechten Seite findet man:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}H_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!}$$
(A2.116)

Vergleich der beiden Ergebnisse liefert:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$
(A2.117)

 oder

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0$$
(A2.118)

Nutzen wir nun Gl. A2.113 folgt:

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + H'_{n-1}(x) = 0.$$
(A2.119)

Wir multiplizieren die Gleichung mit 2n und nutzen nochmals Gl. A2.113 aus:

$$2nH_n(x) - 2xH'_n(x) + H''_n(x) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad (A2.120)$$

Wir definieren nun die Funktionen

$$\psi_n(x) = H_n(x) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right). \tag{A2.121}$$

Für ihre ersten beiden Ableitungen gilt

$$\psi'_n(x) = \left(H'_n(x) - xH_n(x)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$
 (A2.122)

$$\psi_n''(x) = \left(H_n''(x) - 2xH_n'(x) - H_n(x) + x^2H_n(x)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$
(A2.123)

Zusammen mit der Differentialgleichung für ${\cal H}_n(x)$ wird daraus:

$$\psi_n''(x) = \left(-2nH_n(x) - H_n(x) + x^2H_n(x)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -(2n+1)\psi_n(x) + x^2\psi_n(x).$$
 (A2.124)

Diese Funktionen erfüllen also die Differentialgleichung:

$$-\psi_n''(x) + x^2\psi_n(x) = (2n+1)\psi_n(x)$$
 (A2.125)

Aus den Gleichungen A2.122 und A2.113 folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_n(x) + x\psi_n(x) = 2nH_{n-1}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 2n\psi_{n-1}(x).$$
(A2.126)

 oder

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)\psi_n(x) = 2n\psi_{n-1}(x)$$
(A2.127)

Subtrahieren wir andererseits von Gl.A2.122 auf beiden Seiten $x\psi_n(x)$, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - x\right)\psi_n(x) = \left(H'_n(x) - 2xH_n(x)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \tag{A2.128}$$

und mit Gl. A2.119 (mit dem Index $n \to n+1$) folgt

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - x\right)\psi_n(x) = -H_{n+1}(x)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \tag{A2.129}$$

oder

$$\left(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x)$$
(A2.130)

Damit folgt

$$\left(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \psi_0(x) = \psi_n(x) \tag{A2.131}$$

bzw.

$$\left(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = H_n(x) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \tag{A2.132}$$

 oder

$$\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = H_n(x)$$
(A2.133)

Ähnliche Gleichungen erhalten wir aus Gl. A2.119 auch für die Hermite-Polynome:

$$\left(2x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)H_n(x) = H_{n+1}(x) \tag{A2.134}$$

Beginnen wir mit $H_0(x) = 1$, folgt:

$$H_n(x) = \left(2x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n 1.$$
 (A2.135)

Eine weitere Identität, die oftmals auch als Definition der Hermite-Polynome dient, erhalten wir aus Gl. A2.110:

$$\left. \frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}} \mathrm{d}^{-t^{2}+2tx} \right|_{t=0} = H_{n}(x) \tag{A2.136}$$

Mit

$$e^{x^2} \left. \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{-t^2 + 2tx - x^2} \right|_{t=0} = e^{x^2} \left. \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{-(t-x)^2} \right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left. \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-(t-x)^2} \right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$$
(A2.137)

folgt:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$
(A2.138)

Auch die Orthogonalität der Hermite-Polynome lässt sich aus der erzeugenden Funktion (Gl. A2.110) ableiten (aus [Arfken 1970]). Für das Produkt von zwei Hermite-Polynomen und die Gewichtsfunktion e^{-x^2} gilt:

$$e^{-x^2 - s^2 + 2xs - t^2 + 2tx} = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \frac{s^m t^n}{m! n!} .$$
 (A2.139)

Integration über x über die reelle Achse ergibt:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{s^m t^n}{m! n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - s^2 + 2xs - t^2 + 2tx} dx$$
(A2.140)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s-t)^2} e^{2st} dx \qquad (A2.141)$$

$$= \sqrt{\pi} e^{2st} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (st)^n .$$
 (A2.142)

Zunächst sicht man, dass auf der rechten Seite keine unterschiedlichen Potenzen von s und t auftreten; alle Terme auf der linken Seite, bei denen $n \neq m$ ist, verschwinden also. Das ist die Orthogonalität der Hermite-Polynome. Durch den Vergleich der Potenzen von (st) erhält man auch den Normierungsfaktor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 2^n \sqrt{\pi} n! \,. \tag{A2.143}$$

A2.5.4 Laguerre-Polynome

Die erzeugende Funktion ist

$$g(t,x) = \frac{e^{-tx/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad |t| < 1.$$
 (A2.144)

Ableitung nach x auf der linken Seite ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{e}^{-tx/(1-t)}}{1-t} = -\frac{t\mathrm{e}^{-tx/(1-t)}}{(1-t)^2} = -\frac{t}{1-t}g(t,x)\,. \tag{A2.145}$$

Ableitung nach t auf der linken Seite ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{e}^{-tx/(1-t)}}{1-t} = -\frac{x}{(1-t)}g(t,x) - \frac{tx}{(1-t)^2}g(t,x) + \frac{1}{(1-t)}g(t,x)$$
(A2.146)

$$= -\frac{x}{(1-t)^2}g(t,x) + \frac{1}{(1-t)}g(t,x).$$
 (A2.147)

Multiplizieren wir die obere Gleichung (A2.145) mit (1 - t) und die untere (Gl. A2.147) mit $(1 - t^2)$, folgen die beiden Gleichungen:

$$(1-t)\frac{d}{dx}g(t,x) = -tg(t,x)$$
 (A2.148)

$$(1 - 2t + t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t, x) = (1 - t - x)g(t, x).$$
 (A2.149)

Setzen wir in diese beiden Gleichungen die erzeugende Darstellung der Laguerre-Polynome ein (Gl. A2.144) so erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1}$$
(A2.150)

$$(1 - 2t + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = (1 - t - x) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n.$$
 (A2.151)

Aus der oberen dieser beiden Gleichungen erhalten wir durch Koeffizientenvergleich:

$$L'_{n+1}(x) - L'_n(x) = -L_n(x), \qquad (A2.152)$$

aus der unteren folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n n(t^{n-1} - 2t^n + t^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t^n - t^{n+1} - xt^n) \quad (A2.153)$$

bzw.
$$((n+1)L_{n+1} - 2nL_n + (n-1)L_{n-1}) = (L_n - xL_n - L_{n-1})$$
 (A2.154)

und damit die Rekurrenzrelation:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n-x+1)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$
(A2.155)

Wir leiten diese Gleichung einmal nach x ab:

$$(n+1)L'_{n+1}(x) = (2n-x+1)L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) - L_n(x).$$
(A2.156)

Auf der linken Seite nutzen wir Gl. A2.152 aus und fassen gleiche Terme zusammen:

$$xL'_{n}(x) = n(L'_{n}(x) - L'_{n-1}(x)) + nL_{n}(x).$$
(A2.157)

Nun können wir für den ersten Term auf der rechten Seite nochmals Gl. A2.152 ausnutzen und erhalten:

$$xL'_{n}(x) = nL_{n}(x) - nL_{n-1}(x)$$
(A2.158)

Wir leiten diese Gleichung nochmals nach x ab und nutzen zunächst Gl. A2.152 und dann Gl. A2.158 aus:

$$xL_n''(x) + L_n'(x) = nL_n'(x) - nL_{n-1}'(x) = -nL_{n-1}(x) = xL_n'(x) - nL_n(x).$$
(A2.159)

Damit erhalten wir als Differentialgleichung für $L_n(x)$

$$xL_n''(x) = (x-1)L_n'(x) - nL_n(x).$$
(A2.160)

Für die Ableitungen der Funktionen $\phi_n(x)={\rm e}^{-x/2}L_n(x)$ gilt

$$\phi'_{n}(x) = -\frac{1}{2} e^{-x/2} L_{n}(x) + e^{-x/2} L'_{n}(x)$$
(A2.161)

$$\phi_n''(x) = \frac{1}{4} e^{-x/2} L_n(x) - e^{-x/2} L_n'(x) + e^{-x/2} L_n''(x)$$
(A2.162)

$$= (L_n''(x) - L_n'(x))e^{-x/2} + \frac{1}{4}\phi_n(x).$$
 (A2.163)

Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit x und nutzen Gleichungen A2.160 und A2.161 aus:

$$x\phi_n''(x) = x(L_n''(x) - L_n'(x))e^{-x/2} + \frac{x}{4}\phi_n(x)$$
(A2.164)

$$= (x-1)L'_{n}(x)e^{-x/2} - n\phi_{n}(x) - xL'_{n}(x)e^{-x/2} + \frac{x}{4}\phi_{n}(x)$$
(A2.165)

$$= -\phi'_{n}(x) - \frac{1}{2}\phi_{n}(x) - n\phi_{n}(x) + \frac{x}{4}\phi_{n}(x)$$
(A2.166)

$$= -\phi'_n(x) - \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)\phi_n(x).$$
 (A2.167)

Damit erfüllen die Funktionen $\phi_n(x)$ die Differentialgleichung:

$$x\phi_n''(x) + \phi_n'(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)\phi_n(x) = 0$$
(A2.168)

Dies lässt sich als Eigenwertgleichung zu einem selbst-adjungierten Operator deuten (sofern $\phi_n(x)$ und $\phi'_n(x)$ bei x = 0 beschränkt sind) und daher sind die Funktionen $\phi_n(x)$ orthogonal. Wir können die Orthogonalität auch wieder aus dem erzeugenden Funktional ableiten:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) t^n s^m = e^{-x} \frac{e^{-tx/(1-t)}}{1-t} \frac{e^{-sx/(1-t)}}{1-s} = \frac{\exp\left(-x\frac{(1-ts)}{(1-s)(1-t)}\right)}{(1-t)(1-s)}$$
(A2.169)

Das Integral über x von 0 bis ∞ auf der rechten Seite liefert:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\exp\left(-x\frac{(1-ts)}{(1-s)(1-t)}\right)}{(1-t)(1-s)} dx = -\frac{1}{1-ts} \exp\left(-x\frac{(1-ts)}{(1-s)(1-t)}\right)\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{(1-ts)}.$$
 (A2.170)

Damit finden wir:

,

$$\int_0^\infty \sum_{n,m=0}^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) t^n s^m dx = \frac{1}{(1-ts)} = \sum_{n=0}^\infty (ts)^n, \qquad (A2.171)$$

woraus folgt:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm} \qquad (A2.172)$$

A2.5.5 Assoziierte Laguerre-Polynome

Die erzeugende Funktion der assoziierten Laguerre-Polynome ist

$$g(t,x) = \frac{e^{-tx/(1-t)}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)t^n \qquad |t| < 1.$$
(A2.173)

Die Schritte von Gl. A2.144 bis Gl. A2.152 bzw. Gl. A2.155 lassen sich nahezu unverändert durchführen und ändern lediglich an manchen Stellen einen Faktor $1 \rightarrow k + 1$:

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n-x+k+1)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$$
(A2.174)

Gleichung A2.152 bleibt unverändert:

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^{k}(x) - \frac{d}{dx}L_{n}^{k}(x) = -L_{n}(x), \qquad (A2.175)$$

aus Gl. A2.158 wird:

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_{n}^{k}(x) = nL_{n}^{k}(x) - (n+k)L_{n-1}^{k}(x)$$
(A2.176)

und Gl. A2.160 wird zu:

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}L_n^k(x) = (x-k-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x) - nL_n^k(x) \, . \tag{A2.177}$$

Wir definieren nun die Funktionen:

$$\phi_n^k(x) = e^{-x/2} x^{k/2} L_n^k(x) \,. \tag{A2.178}$$

Sie erfüllen die Differentialgleichung

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\phi_n^k(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi_n^k(x) + \left(-\frac{x}{4} + \frac{2n+k+1}{2} - \frac{k^2}{4x}\right)\phi_n^k(x) = 0$$
(A2.179)

Die Orthogonalität dieser Funktionen folgt wiederum aus der Beobachtung, dass es sich hier um eine Eigenwertgleichung für einen selbst-adjungierten Operator handelt. Für die assoziierten Laguerre-Polynome gilt die Orthogonalitätsrelation:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{k} L_{n}^{k}(x) L_{m}^{k}(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm}$$
(A2.180)

Auch diese Relation lässt sich aus der erzeugenden Funktion (Gl. A2.173) ableiten, wenn man folgendes Integral verwendet:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^k dx = \frac{1}{\alpha^{k+1}} k! \,. \tag{A2.181}$$

Damit wird

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(-x\frac{(1-ts)}{(1-s)(1-t)}\right)}{(1-t)^{k+1}(1-s)^{k+1}} x^k \mathrm{d}x = \frac{k!}{(1-ts)^{k+1}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+k)!}{n!} (ts)^n$$
(A2.182)

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich das Ergebnis aus Gl. A2.180.

A2.5.6 Kugelflächenfunktionen

Literaturverzeichnis

- [Arfken 1970] Arfken, George; Mathematical Methods for Physicists; 2nd ed.; Academic Press, New York, 1970.
- [Deschamps 1970] Deschamps, G.A.; Exterior differential forms, in Mathematics Applied to Physics,
 É. Roubine (Ed.), Springer Verlag, 1970.
- [Dirac 1939] Dirac, P.A.M.; A new notation for quantum mechanics; Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 35 (1939), S. 416–418.
- [Dittmaier 2017] Dittmaier, Stefan, Höhere Mathematik für Physiker Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen; Skript, Universität Freiburg, Sommersemester 2017.
- [EDM 2000] Encyclopedic Dictionary of Mathematics; 2nd ed.; The MIT Press, 2000.
- [Filk 2012] Filk, Thomas; Einführung in die Methoden der Theoretischen Physik; Skript, Universität Freiburg, 2012. www.mathphys.uni-freiburg.de/physik/filk/public_html/Skripte/Texte/Theo_1.pdf.
- [Filk 2021] Filk, Thomas; Analysis für Physiker und Physikerinnen, Skript, Universität Freiburg, 2021. www.mathphys.uni-freiburg.de/physik/filk/public_html/Skripte/Texte/Analysis_Skript.pdf.
- [Gantmacher 1959] Gantmacher, Felix Ruvimovich, Theory of Matrices, Vol. I & II, Chelsea Publishing Company, 1959.
- [Grosse 2020] Große, Nadine, Analysis I, Skript Universität Freiburg, WS 20/21.
- [Guyon 1997] Guyon, Etienne, Hulin, Jean-Pierre, Petit, Luc; *Hydrodynamik*, Friedrich Vieweg&Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1997.
- [Hildebrandt 2006] Hildebrandt, Stefan; Analysis I, 2. Auflage, Springer Verlag, 2006.
- [Jackson 2006] Jackson, John David; *Klassische Elektrodynamik*; 4. Auflage; Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2006.
- [de Jager 1970] de Jager, E. M., Theory of distributions, in Mathematics Applied to Physics, É. Roubine (ed.), Springer-Verlag, 1970.
- [Kobayashi-Nomizu 1963] Kobayashi, S., Nomizu, K.; Foundations of Differential Geometry Volume 1; John Wiley & Sons, 1963.

[Kowalsky 1992] Kowalsky, Hans-Joachim, Lineare Algebra; de Gruyter, 1992.

- [Kuwert 2007] Kuwert, Ernst; Analysis I; Skript zur Vorlesung WS 2007/08 am Mathematischen Institut Freiburg.
- [Kuwert 2008a] Kuwert, Ernst; Analysis II; Skript zur Vorlesung SS 2008 am Mathematischen Institut Freiburg.
- [Kuwert 2008b] Kuwert, Ernst; Analysis III; Skript zur Vorlesung WS 2008/09 am Mathematischen Institut Freiburg.
- [Lancaster 1969] Lancaster, Peter, Theory of Matrices, Academic Press, 1969.
- [Lang 1973] Lang, Serge; Real Analysis; Addison-Wesley Publishing Company, Second printing, 1973.
- [Martin-Pizarro 2020] Martin-Pizarro, Amador, *Lineare Algebra I Ein Kurzskript*, Skipt Universität Freiburg, Akademisches Jahr 20/21.
- [Mildenberger 2021] Heike Mildenberger; *Lineare Algebra I Fassung vom 11.2.2022*, Skript Universität Freiburg, Akademisches Jahr 21/22.
- [Reed-Simon 1975] Reed, Michael, Simon, Barry; Fourier Analysis, Self-Adjointness; Academic Press, New York, 1975.
- [Richtmyer 1981] Richtmyer, Robert D.; Principles of Advanced Mathematical Physics Volume I; Springer-Verlag, 1981.
- [Rudin 2009] Rudin, Walter; Analysis, 4. Auflage; Oldenbourg Verlag, 2009.
- [Snyder 1994] Snyder, John P., Voxland, Philip M.; An Album of Map Projections, U.S. Geological Survery, Professional Paper 1453.
- [Sommer 1970] Sommer, Friedrich; Functions of complex variables, in Mathematics Applied to Physics; Springer-Verlag, 1970.
- [Spivak 1965] Spivak, M.; Calculus on Manifolds; W.A. Benjamin Inc.; 1965.
- [Thirring 1988] Thirring, W.; Lehrbuch der Mathematischen Physik Band 1: Klassische Dynamische Systeme; 2. Auflage, Springer-Verlag, 1988.
- [Wiki-holomorph] Wikipedia; Eintrag: *Holomorphe Funktion*; https://de.wikipedia.org/wiki/Holomorphe_Funktion (zuletzt aufgerufen am 4.7.2021).
- [Wiki-orthogonal] Wikipedia; Eintrag: Orthogonal coordinates; https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_coordinates (zuletzt aufgerufen am 1.8.2021).

Bildnachweise

- [Dittmaier 2017] Dittmaier, Stefan, Höhere Mathematik für Physiker Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen; Skript, Universität Freiburg, Sommersemester 2017.
- [Wiki-Moebius] Wikipedia "Möbiusband"; https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Möbiusband.png
- [Wiki-Klein] Wikipedia "Kleinsche Flasche"; https://de.wikipedia.org/wiki/Kleinsche_Flasche#/media/Datei:Klein_bottle.svg

[Wolfram-Euler] WolframMathWorld "Euler Angles" https://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html

Index

Abbildung, 16 Abbildung (siehe auch Funktion) lineare, 45 messbar, 126 abelsche Gruppe, 20 abgeschlossene Menge, 75, 221 Ableitung, 63 partielle, 69 totale, 70 Ableitungsoperator, 241 Abschluss, 58 Adjazenzmatrix, 17 adjungierter Operator, 245 Äquivalenz (linearer Abbildungen), 25 affiner Raum, 51, 116 euklidischer, 122 aktive Transformation, 47 algebraisch abgeschlossen, 163 allgemeine lineare Gruppe, 24 analytische Fortsetzung, 183 analytische Funktion, 169 Anfangsbedingungen, 84 harmonischer Oszillator, 85 Antilinearität, 30 antisymmetrisch, 34 antisymmetrische Relation, 16 aperiodischer Grenzfall, 92 Äquivalenzklasse, 18 Äquivalenzrelation, 18 Arbeit, 135, 312 Argument (einer komplexen Zahl), 165 Assoziativität, 19 assoziierte Laguerre-Polynome, 292, 334 assoziierte Legendre'sche Differentialgleichung, 329 asymmetrische Relation, 16 Atlas (Differentialgeometrie), 117, 296 autonome Differentialgleichung, 87, 89 avancierte Green'sche Funktion, 216

Azimutalgleichung, 271, 293 Bahnkurve, parametrisierte, 64, 109 Banach-Raum, 226 Basis, 22, 229 duale, 148 orthonormierte, 155 reziproke, 149 Beschleunigung, 73, 111 beschränkt, 240 beschränkte Menge, 75 beschränkte Operatoren, 243 Bessel'sche Differentialgleichung, 278 Bessel-Funktion, 279, 283 Betrag einer komplexen Zahl, 163 Bezugssystem, 52 Bild (einer linearen Abbildung), 23 Bilinearform, symmetrische, 29 Binormalenvektor, 113 Bogenlänge, 134 Bogenlängenparametrisierung, 111, 135 Boltzmann-Entropie, 312 Borel-Algebra, 126 Borel-messbar, 126 Bra-Ket-Notation, 228, 251 für Vektoren, 228 Brouwer, Fixpunktsatz von, 227 Cardano, Gerolamo, 161 Cauchy'scher Hauptwert, 199 Cauchy'scher Integralsatz, 177 Cauchy-Konvergenz, 57, 223 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen, 171Cauchy-Schwarz Ungleichung, 32 charakteristische Gleichung, 276 d'Alembert-Operator, 76 Definitionsbereich unbeschränkter Operatoren,

243

Delta-Distribution (siehe auch Delta-Funktion), 251Delta-Folgen, 195 Delta-Funktion, 133, 188, 192, 195, 197, 200, 209, 251Derivation, Kommutator als, 244 Determinante, 24, 34, 47 Dichte, 197 dichte Teilmenge, 58, 223 Diffeomorphismus, 297 Differentialgleichung, 83, 87 assoziierte Legendre, 329 autonome, 87, 89 Bessel'sche, 278 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, 89 gedämpfter Oszillator, 91 gekoppelte, 83 gewöhnliche, 83 harmonischer Oszillator, 85 Hermite'sche, 280 homogene, 89 hypergeometrische, 281 inhomogene, 89, 90, 95 Legendre, 279, 281 lineare, 89 mit konstanten Koeffizienten, 91 logistische, 101 Ordnung, 83 Quadratur, 99 Zerfall und Wachstum, 84 Differentialgleichungssystem gekoppeltes, lineares, 96 differenzierbare Struktur, 296 Diffusionsgleichung, 259, 269 Dimension, 22 Dirac, Paul, 187 Dirac-Identität, 200 Dirac-Maß, 130, 133 direkte Summe (von Vektorräumen), 42 Dirichlet'sche Randbedingungen, 219 Dirichlet-Funktion, 130, 238 diskrete Metrik, 223 diskrete Topologie, 56 Distribution, 188 Ableitung, 194 Konvergenz, 191 Rechenregeln, 193

temperierte, 192 Distributivgesetz, 21 Divergenz (eines Vektorfeldes), 73, 157 Doppelkegel, 117 doppelte Überlagerung, 184 Drehimpuls, 46 Dreibein, mitgeführtes, 112 Dreiecksungleichung, 22, 33 Druck, 311 duale Basis, 148 dualer Vektor (totale Ableitung), 70 Dualraum, 187 Durchschnittsgeschwindigkeit, 64 dyadisches Produkt, 39 Ebene, 52, 118 Eigenfunktionen Kugelflächenfunktionen, 294 uneigentliche, 250 Eigenraum, 35 Eigenwerte, 24, 76 normaler Abbildungen, 35 Projektionsmatrizen, 39 selbst-adjungierter Abbildungen, 35 unitärer Operatoren, 246 Einbettung, 147 einfach (weg)zusammenhängend, 142 Einheitskugel, Oberfläche, 319 Einselement, 20 Einstein'sche Summenkonvention, 48, 147 Elementarereignisse, 127 Ellipse, 119 Tissot, 154 Ellipsoid, 154 Energie, 106 entartete Bilinearform, 30 Entropie, 311 Ereignisse, 127 Erhaltungsgröße, 106 erstes Integral, 106 Erwartungswert, 132 Erzeugende Funktion assoziierte Laguerre-Polynome, 334 Hermite-Polynome, 329 Laguerre-Polynome, 332 Legendre-Polynome, 324 Euler'sche Formel, 163, 164 Euler, Leonhard, 161

INDEX

Euler-Lagrange-Gleichung Feldtheorie, 204 Mechanik, 203 Exponentialansatz, 91, 93 Exponential function, 59, 283 Ableitung, 80 Extrempunkt, 75 Faktorregel, 63 Faltung, 208, 241, 256 "fast überall", 127 Feldfunktion, 174 Feldtheorie, Euler-Lagrange-Gleichung, 204 Feldtheorie, Lagrange-Funktion, 203 Fermat, Satz von, 75 Fermi-Verteilung, 101 Fernwirkung, 83 Fixpunkt, 103, 227 Fixpunktsatz, 227 Fläche, 113 implizite Darstellung, 116 parametrisierte, 113 Flächenelement, 137 Kugeloberfläche, 138, 153 Polarkoordinaten, 134, 152 Flächenintegral, 137 Flächenmaß, 137 Fluss eines Vektorfeldes, 137 im Phasenraum, 103 Fourier, Jean, 253 Fourier-Darstellung, 254 Fourier-Entwicklung, 235 Fourier-Koeffizienten, 235 verallgemeinerte, 230 Fourier-Transformation, 191, 251, 253, 254 als Automorphismus auf \mathscr{S} , 191 Distribution, 257 Fourier-Transformierte, 254 Freie Energie, 313 Freie Enthalpie, 313 Frobenius, Ferdinand Georg, 275 Frobenius, Methode von, 275 Fubini, Satz von, 131 Fundamentallösung, 208 Fundamentalsatz der Algebra, 163 Funktion analytische, 169

analytische Fortsetzung, 183 holomorphe, 169 meromorphe, 180 periodisch, 233 Funktional, 187, 202 Funktional, linear, 226 Funktionalableitung, 202 Gamma-Funktion, 282 Ganghöhe, 110 ganze Zahlen, 20 Gauß, Carl Friedrich, 161 Gauß-Funktion, 132, 195 Gauß'scher Integralsatz, 144 gebrochen lineare Transformation, 168 gedämpfter Oszillator, 207 gekoppelte Differentialgleichungen, 83 Gel'fand-Tripel, 250, 252 Geodäte, 150 geometrische Reihe, 59, 80 Gerade, 52 geschlossene Menge, 56 Geschwindigkeit, 64, 110 Gibbs'sche Fundamentalform, 311 $GL(n, \mathbb{R})$, allgemeine lineare Gruppe, 24 gleichförmige Konvergenz, 59 Gleichgewichtszustände, thermodynamische, 311 gleichmäßige Stetigkeit, 61 Gleichungen, kubische und quartische, 161 globales Maximum, 74 globales Minimum, 74 Gradient, 71, 156 Gradientenfeld, 136 Gram'sche Determinante, 151 Gram'sche Matrix, 151 Gram-Schmidt-Verfahren, 33 Graph, 16 Green'sche Funktion avancierte, 216 gedämpfter Oszillator, 212 kausale, 218, 264 Laplace-Operator, 212 Laplace-Operator in d Dimensionen, 213 retardierte, 216 Green'sche Identitäten, 218 Green, George, 208 Grenzwert, 57 Gruppe, 19

342

abelsch, 20 Gruppenhomomorphismus, 20 Häufungspunkt, 57, 58 Hahn-Banach-Theorem, 226 Hamilton'sches Prinzip, 203 harmonische Funktionen, 172 harmonischer Oszillator, 85, 278 gedämpfter, 91 getriebener, 94 Hauptachsen, 76 Hauptnormalenvektor, 113 Hauptträgheitsachsen, 36 Hauptträgheitsmomente, 36 Hausdorff-Axiom, 56 Hausdorff-Raum, 56 Hausdorff-Topologie, 56 Heaviside-Funktion, 130, 193, 197, 201 Heine und Borel, Satz von, 224 Helix, 110 Beschleunigung, 111 Geschwindigkeit, 111 Helmholtz-Gleichung, 267 Helmholtz-Operator, 214 Hermite'sche Differentialgleichung, 280 Hermite-Polynome, 281, 283, 329 hermitesch konjugiert, 35 Hesse-Matrix, 74, 76, 98 Hilbert-Raum, 228 quadratintegrable Funktionen, 231 quadratsummierbare Folgen, 230 separabel, 229 Hilbert-Schmidt-Operator, 249 Hintereinanderschaltung linearer Abbildungen, 23 Hochpunkt, 75 Hodge-Stern-Operator, 47 holomorphe Funktion, 169 homogene Relation, 15 Hyperbel, 119 Hyperebene, 52 hypergeometrische Differentialgleichung, 281 hypergeometrische Funktion, 282 hypergeometrische Reihe, 282 Ideal, 21

Impulsoperator, 245, 249, 250 Indexschreibweise, 48 indiskrete Topologie, 56 inhomogene lineare Differentialgleichung, 105 innere Energie, 311 innerer Punkt, 58 Inneres Produkt, 30 Integral, 66, 128 unbestimmtes, 66 Integralgleichung, 84, 88 Integralgleichung von Cauchy, 178 Integralsatz von Cauchy, 177 Integrationskonstante, 84, 90 Integratorfunktion, 130 Invarianz, einer Distribution, 197 inverser Operator, 207 inverses Element, 20 Involution, 162 irreduzibel, 51 isometrische Abbildung, 259 isometrische Operatoren, 245 Isomorphismus von Gruppen, 20 iterative Gleichung, 85, 88 Jacobi-Determinante, 143 Jacobi-Identität, für Kommutatoren, 244 Jacobi-Matrix, 72, 151 Jordan und von Neumann, Satz von, 321 Jordan'sche Normalform, 26 Jordan-Block, 26 Jordan-von Neumann, Satz, 224 Körper, 21 kanonische Systeme, 313 Karte, 116, 296 kartesisches Produkt, 15, 42 Kastenfunktion, 195 kausale Green'sche Funktion, 218 Kegelschnitte, 117 Kern (einer linearen Abbildung), 23 Kettenregel, 64 Klein'sche Flasche, 297 Klein-Gordon-Gleichung, 269 Kommutativität, 20 Kommutator, 244 kompakte Teilmenge, 61, 75, 224

komplexe Konjugation, 162

konforme Abbildung, 175

komplexe Zahlen, 161

344

konjugierte harmonische Funktionen, 173 Kontinuitätsgleichung, 146 kontravariant, 48 Konvergenz, 222 gleichförmig, 59 punktweise, 59 schwache (für Distributionen), 195 Konvergenz einer Folge, 57 Konvergenzradius, 60 bei analytischen Funktionen, 183 konvexe Menge, 227 Koordinatendarstellung, 164 Koordinatensingularitäten, 115 Koordinatensystem, 52 Parameterbereich, 120 Koordinatentransformation, 121, 147 Kosinus-Funktion, 59 Ableitung, 80 Orthogonalität, 234 Taylor-Entwicklung, 80 kovariant, 48 Kovektor, 45 Kraft, konservative, 106 Kreis, 119 Krümmung, 112 Krümmungsradius, 112 Krümmungsvektor, 112 Kugel, 144 Kugelflächenfunktionen, 294 Kugelkoordinaten, 121, 152 Kugeloberfläche, 114, 116, 138, 153, 299 Koordinaten, 299 Winkelkoordinaten, 114 kumulative Wahrscheinlichkeit, 133 \mathcal{L}^2 , siehe auch Hilbert-Raum, quadratintegrable Funktionen, 251 Lagrange-Funktion, 202 Laguerre-Polynome, 283, 292, 332 Landau, Edmund, 61 Landau-Symbole, 61 Laplace-Gleichung, 172, 218, 267 holomorphe Funktionen, 172 Laplace-Operator, 76 allgemeine Koordinaten, 157 Kugelkoordinaten, 158, 270 Kugeloberfläche, 158 orthogonale Koordinaten, 157

Zylinderkoordinaten, 158 Laurent-Entwicklung, 179 Laurent-Reihe, 180 Lebesgue-Integral, 129, 130 Legendre'sche Differentialgleichung, 279, 281 Legendre-Polynome, 283, 324 erzeugende Funktion, 324 zugeordnete, 293 Legendre-Transformationen, 313 Leibniz-Formel, 327 Levi-Civita-Symbol, 34 L'Hospital, Satz von, 79 lichtartig, 30 linear unabhängig, 22 lineare Abbildung, 45 lineare Differentialgleichung, 89 lineare Näherung, 104 linearer Operator, 240 lineares Funktional, 226 Linienelement, 135 allgemeine Metrik, 150 links total (Relation), 16 Lipschitz-stetig, 61 Logarithmus, 59, 201 logistische Gleichung, 101 lokales Maximum, 74 lokales Minimum, 74 Lokalität, 83 Lorentz-Kurve, 195 ℓ_p -Norm, 226 Maclaurin, Colin, 78 Maclaurin-Reihe, 78 magnetische Quantenzahl, 271 Mannigfaltigkeit, 295 eingebettete, 299 Maß. 126 eines Quaders, 131 Matrixelemente, 242 Matrixmultiplikation, 23 Maximum, lokales und globales, 74 Menge abgeschlossen, 221 geschlossene, 56 kartesisches Produkt, 15 offene, 56, 221 meromorphe Funktion, 180 messbare Abbildung, 126

INDEX

messbare Menge, 126 Gegenbeispiel, 125 messbarer Raum, 126 Metrik, 148 diskrete, 223 Kugelkoordinaten, 153 Kugeloberfläche, 153 Polarkoordinaten, 152 metrischer Feldtensor, 148 metrischer Raum, 55, 222 mikrokanonisch, 311 Minimum, lokales und globales, 74 Minkowski-Metrik, 30 Minkowski-Ungleichung, 320 Mittelwert, 132 Modulo-Rechnen, 19 Möbius, August Ferdinand, 168 Möbius-Band, 297 Möbius-Transformation, 168 Moivre, Satz von, 165 Momentangeschwindigkeit, 64 Multiindex, 190 Multiplikationsoperator, 241 neutrales Element, 19 Newton'sche Bewegungsgleichung, 83, 88 nicht entartet (Bilinearform), 30 Norm, 22, 31, 223, 320 Äquivalenz, 225 einer Funktion, 233 normal (lineare Abbildung), 35 Normalvektor, 115 Normalverteilung, 132 normierter Vektorraum, 55 Normtopologie, 242 \mathcal{O}, o -Notation, 61 O(N), 41Oberfläche Einheitskugel, in d Dimensionen, 213 offene Menge, 56, 221 offener Ball, 55 Operator linearer, 240

Spurklasse, 248 Operatornorm, 240, 242 Operatortopologie, starke und schwache, 242 Ordnung einer Differentialgleichung, 83 Ordnungsrelation, 17 orientierbar, 297 orthogonal, 31, 229 orthogonale Gruppe, 41 Orthogonalität von Funktionen, 234 orthonormal, 31, 229 Orthonormalbasis, 31, 155, 285 periodische Funktionen, 234, 235 Polarkoordinaten, 152 Ortsoperator, 245, 249, 251 Oszillator gedämpfter, 207, 211, 273 marginaler Grenzfall, 273 Parabel, 119 parallele affine Räume, 52 Parallelogramm-Identität, 229, 320 Parameterdarstellung, 117 Doppelkegel, 118 Fläche, 113 Kugeloberfläche, 114 Mannigfaltigkeit, 115 Wege, 109 parametrisierte Fläche, 113 Parseval'sche Identität, 230, 258, 259 Partialordnung, 17 partielle Ableitung, 69 partielle Integration, 67 Partition, 18, 128 passive Transformation, 47 periodische Funktion, 233 Permutation gerade und ungerade, 20, 34 Permutationsgruppe, 20 Phasenraum, 88, 90 Picard und Lindelöf, Satz von, 89, 227 Picard, großer Satz, 180 Picard-Lindelöf-Verfahren, 84, 86, 88 Plancherel-Identität, 259 Planck'sche Konstante, 265 Planck'sches Strahlungsgesetz, 198 Planck, Max, 198 Pochhammer, Leo August, 282 Pochhammer-Symbol, 282 Poincaré, Satz von, 142 Poisson-Gleichung, 212, 218 Polargleichung, 271, 293 Polarkoordinaten, 120, 152, 296

346

Polstelle, 179 Polynomfunktion von Jordan-Blöcken, 27 Potentialfunktion, 174 Potenzial, 136 potenzielle Energie, 136 Potenzmenge, 18 Prä-Hilbert-Raum, 228 principal value, Cauchy, 199 Produktmaß, 131 Produktregel, 63 Projektion, 38 orthogonale, 38 Pseudo-Zufallszahlgenerator, 133 Pseudotensor, 46 Punkt, 57 Punktladung, 188 Punktmasse, 188 Punkttopologie, 56 Punktverteilung, 133 punktweise Konvergenz, 59 Quadermaß, 131 quadratintegrierbar, 231 Quantenmechanik, 265 Quantentheorie, 249 Quantisierungsbedingung, 280, 281 Quellendichte, 145 Quotientenmenge, 19 Rand, 58 Randpunkt, 58 Rang (einer linearen Abbildung), 23 rationale Zahlen, 20 Raum, 57 metrischer, 55, 222 topologischer, 126, 221 Raum, als Menge aller Orte, 110, 120 raumartig, 30 Realitätsbedingung, 235 rechtseindeutig (Relation), 16 reduzibel, 51 reell-analytische Funktion, 78 reelle Zahlen, 57 reflexive Relation, 16 Regelfunktion, 128 Regularisieren, 262 Rekursionsformel, Verfahren von Frobenius, 276 Relation, 15

antisymmetrisch, 16 Äquivalenzrelation, 18 asymmetrisch, 16 homogen, 15 links total, 16 mehrstellig, 15 rechtseindeutig, 16 reflexiv, 16 symmetrische, 16 totale, 16 transitiv. 16 Relativitätstheorie, 30 Residuum, 181 retardierte Green'sche Funktion, 216 reversibler thermodynamischer Prozess, 311 reziproke Basis, 149 im \mathbb{R}^3 , 149 Polarkoordinaten, 152 Richtungsableitung, 69 Riemann'sche Fläche, 184 Riemann'sche Zahlenkugel, 168 Riemann'scher Abbildungssatz, 176 Riemann'sches Integral, 66, 128 Riemann-Lebesgue, Satz von, 255 Riesz'scher Darstellungssatz, 232 rigged Hilbert space, 252 Ring, 21 kommutativ, 21 unitär, 21 Rodrigues-Darstellung Legendre-Polynome, 326 Rotation, 159 Rotation (eines Vektorfeldes), 73, 138 Sattelpunkt, 76 Satz von Heine, 61 Satz, implizite Funktionen, 117 Schmiegeebene, 113 Schrödinger-Gleichung, 270 freie, 265 schwache Konvergenz, 195 schwache Operatornorm, 242 Schwarz, Laurent, 187 Schwarz, Satz von, 74 Schwarz-Funktion, 252 Schwarz-Raum, 190 selbst-adjungiert, 35 selbst-adjungierter Operator, 245

INDEX

Semilinearität, 30 separabler Vektor, 42 Separationsansatz, 268 Sesquilinearform, hermitesche, 29 σ -Algebra, 126 Sinus-Funktion, 59 Ableitung, 80 Orthogonalität, 234 Taylor-Entwicklung, 80 Skalarprodukt, 44, 45, 148, 320 hermitesches. 31 kanonisches, 31 komplexe periodische Funktionen, 235, 253 reelle periodische Funktionen, 233 $SL(2, \mathbb{C}), 169$ SO(N), 41Sobolew, Sergei Lwowitsch, 187 Spatprodukt, 34, 47 Spektraldarstellung, 130, 247 Spektralzerlegung, 40 Spektrum, 247, 250 spezielle orthogonale Gruppe, 41 spezielle unitäre Gruppe, 41 spontane Masseerzeugung, 214 spontane Symmetriebrechung, 214 Spur eines Operators, 248 Spurklasseoperator, 248 Stabilität von Fixpunkten, 104 Standardabweichung, 132 Standardskalarprodukt, 31 stationärer Punkt, 75 Stetigkeit, 60 Stieltjes-Integral, 130 Stokes'scher Satz, 138 Stromfunktion, 173 Sturm-Liouville-Operatoren, 285, 287 Sturm-Liouville-Problem, 289 SU(N), 41Subbasis, 222 Summenregel, 63, 234 Superpositionsprinzip, 89 symmetrische Relation, 16 Tangentialraum, 115, 148, 297 Tangentialvektor, 115, 121, 147, 298 an eine Fläche, 114 an einen Weg, 110 Taylor-Reihe, 78

Teilung, 18 Temperatur, 311 Tensor, 45 Tensorprodukt, 42 Testfunktionen, 252 der Raum \mathcal{D} , 190 der Raum \mathscr{S} , 190 Thermodynamik, 311 Tiefpunkt, 75 Tissot'sche Indikatrix, 154 Tonelli, Satz von, 131 Topologie, 55 diskrete, 56 feiner und gröber, 56 gleichförmige, 242 indiskrete, 56 trennend, 222 topologischer Raum, 126, 221 totale Relation, 16 totales Differential, 70 Totalität, 17 Totalordnung, 17 Trägheitsindex, 30 Trägheitstensor, 36 Trajektorie, 109 Transformation aktive, 47 passive, 47 transitive Relation, 16 trennend (Topologie), 222 Trennung der Variablen, 99 Trennungsaxiome, 56, 222 Treppenfunktion, 128 trigonometrische Funktion, 283

U(N), 41 Überdeckung, 224 Umgebung, 58 Umgebungsstetigkeit, 60 Umordnungssatz, Riemann'scher, 59 uneigentliche Eigenvektoren, 247 unitär, 41 unitäre Gruppe, 41 unitäre Operatoren, 245 Eigenwerte, 246 unitäre Transformation, 259 Untergruppe, 20

348

Varianz, 132 Variation der Konstanten, 105 Vektor, 45 dualer, 70 separierbar, 42 verschränkt, 42 Vektorprodukt, 34 Vektorraum, 21 direkte Summe, 42 dualer, 27 Funktionenräume, 189 normierter, 55 periodischer Funktionen, 233 verschränkter Vektor, 42 Vertauschungsrelationen kanonische, 244, 248 Verteilungsfunktion, 127 Verträglichkeit (Karten), 296 vollständig (Atlas), 296 Vollständigkeit, 57, 223 Volumenelement, 143, 151 Kugelkoordinaten, 153 Polarkoordinaten, 152 Volumenintegral, 143 von Neumann'sche Randbedingungen, 219 Wärme, 312 Wärmeleitungsgleichung, 259 Wahrscheinlichkeitsdichte, 127 Gauß-Verteilung, 132 gleichverteilt, 133 Wahrscheinlichkeitsfunktion, 127 Wahrscheinlichkeitsmaß, 127 Wahrscheinlichkeitsraum, 127 Weg, parametrisierter, 109, 297 Weglänge, 150 Weierstraß, Satz von, 75, 166 Weierstraß & Casorati, Satz von, 180 Wellengleichung, 269 Wellenoperator, 76 Wellenpaket, 250, 252 Wendepunkt, 75 wesentliche Singularität, 275 Windungszahl, 178 Winkel, 31 Winkelkoordinaten der Kugeloberfläche, 153 Wirbeldichte, 139 Wirkung, 202

Wronski-Determinante, 272 \mathbb{Z}_p , 19 zeitartig, 30 Zeitentwicklungsoperator, 265 Zeittranslationsinvarianz, 93 Zufallsvariable, 127 Zweistellige Relation, 15 zyklisch, 34 Zylinderkoordinaten, 120