

Analysis für Physiker und Physikerinnen

Thomas Filk

Skript zur Vorlesung

Wintersemester 2015/16

Wintersemester 2016/17

Wintersemester 2017/18

Wintersemester 2019/20

(Version vom 19. 2. 2021)

Vorwort

Die seit dem Wintersemester 2015/16 bestehende Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Physik an der Universität Freiburg sieht vor, dass im ersten Semester eine Vorlesung „Analysis für Physiker und Physikerinnen“ angeboten wird. Diese Vorlesung soll im Rahmen der Theorievorlesungen der Physik gehalten werden und ersetzt die früheren Vorlesungen „Analysis I“ und „Analysis II“, die Exportveranstaltungen der Mathematik waren. Der Grund für die Änderungen war, dass viele für die Physik wichtigen Themen der Analysis, beispielsweise die Integralsätze von Gauß und Stokes, in den beiden genannten Mathematikvorlesungen nicht behandelt werden (sie sind Thema der Analysis III, deren Besuch im Rahmen des Physikstudiums nie verpflichtend war).

Natürlich ist es unmöglich, eine dreisemestrige Vorlesung zur Analysis in einem Semester zu unterrichten, ohne dass wesentliche Kürzungen vorgenommen werden. Hinzu kommt noch die Problematik, dass viele Konzepte der linearen Algebra, beispielsweise das Thema „Vektorräume“, nun vergleichsweise früh in der Analysis benötigt werden, obgleich diese in der Vorlesung zur linearen Algebra in der Mathematik erst später behandelt werden. Das machte eine (sehr gekürzte) Behandlung dieser Themen der linearen Algebra in dieser Vorlesung notwendig. Ich habe mich bemüht, diese Kürzungen auf Bereiche zu beschränken, die für das Physikstudium von untergeordneter Bedeutung sind. Zwei Kriterien standen bei der Themenauswahl im Vordergrund: Zum Einen sollten grundlegende Begriffe der Analysis, die zum Verständnis der meisten Mathematiklehrbücher notwendig sind und dort vorausgesetzt werden, auch behandelt werden – ein Physiker bzw. eine Physikerin sollten in der Lage sein, sich ohne allzu großen Mehraufwand in jedes Lehrbuch der Mathematik einarbeiten zu können. Zum Anderen sollte der Schwerpunkt auf Themen liegen, die in der Physik besonders wichtig sind. Inwieweit dies gelungen ist, wird sich erst noch erweisen. Entsprechende Rückmeldungen sind daher willkommen.

Es gibt einige Kapitel bzw. Abschnitte, deren Überschriften durch ein * markiert sind. Diese Abschnitte wurden aus Zeitgründen nicht oder nur kurz in den Vorlesungen behandelt und dienen in erster Linie als Zusatzinformation. Die entsprechenden Themen (z.B. die Theorie komplexer Funktionen oder die Fourier-Analyse in Kap. 11) werden in anderen Vorlesungen nochmals aufgegriffen.

Niemand wird bezweifeln, dass man ein Musikinstrument (Klavier, Geige, Gitarre, Querflöte, etc.) nur durch intensives Üben erlernen und beherrschen kann. Weder eine Vorlesung über die theoretischen Hintergründe der Noten- und Harmonielehre noch das Lesen von Büchern über diese Themen kann die praktischen Übungen ersetzen. Ähnlich ist es auch

mit der Mathematik. Die Vorlesung, das Skript und auch Bücher geben eine Einführung in die Methoden und Grundlagen, doch eine mehr oder weniger souveräne Anwendung wird nur durch ausgiebige Praxis und Erfahrung möglich. Den „Riecher“, wann bestimmte Beweisverfahren oder schon bewiesene Sätze ein guter Ausgangspunkt für ein konkretes Problem sind, oder wann welche Näherungen sinnvoll und zielführend sind, wie man qualitative Aussagen über nicht exakt bekannte Lösungen erhält etc., diesen Riecher wird man erst durch Übung und Erfahrung erhalten. Dies gilt natürlich nicht nur für die Mathematik sondern auch für die Physik (und vermutlich für fast alle wissenschaftlichen Disziplinen). Die ausgiebige Beschäftigung mit den begleitenden Übungsaufgaben sowie der Besuch der Übungsgruppen sind ein Mindestmaß an Praxis, das diese Vorlesung begleiten sollte.

Da es im Verlauf der Studiums unvermeidbar sein wird, sich das notwendige Grundvokabular der Physik und Mathematik auch in englischer Sprache anzueignen, wurden die wichtigsten Begriffe bei ihrem ersten Auftauchen in diesem Skript auch in ihrer englischen Übersetzung angegeben. Dies soll die Studierenden dazu ermuntern, gleich von Beginn des Studiums an auch englischsprachige Bücher als Begleittexte heranzuziehen.

Auch wenn die Vorlesung mittlerweile mehrfach angeboten und dieses Skript angepasst und überarbeitet wurde, enthält es vermutlich noch einige Fehler und/oder missverständliche Formulierungen. Rückmeldungen sind daher willkommen. Das Skript ist etwas ausführlicher als die Vorlesung. Insbesondere enthält es mehr Beispiele, als in der kurzen Zeit einer Vorlesung behandelt werden können. Trotzdem kann es weder den Besuch der Vorlesung (und schon gar nicht den Besuch der Übungen) noch ein gutes Mathematikbuch zu diesem Thema ersetzen.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Inhaltsverzeichnis	4
1 Mathematische Grundlagen	13
1.1 Elementare Mengenlehre und logische Operationen	13
1.1.1 Schwierigkeiten bei der Definition von „Menge“	13
1.1.2 Elemente einer Menge	14
1.1.3 Logische Symbole	15
1.2 Operationen mit Mengen	19
1.2.1 Vereinigung, Durchschnitt, Differenz	19
1.2.2 Teilmengen	20
1.2.3 Potenzmenge – Menge aller Teilmengen	20
1.3 Beweisverfahren	21
1.3.1 Direkter Beweis	22
1.3.2 Beweis durch Widerspruch	23
1.3.3 Beweis durch vollständige Induktion	25
1.3.4 Weitere Beweisverfahren	27
1.4 Die Binomialkoeffizienten	28
1.5 Relationen	30
1.5.1 Das kartesische Produkt	30
1.5.2 Zweistellige homogene Relationen	31
1.5.3 Darstellung einer Relation als Graph – die Adjazenzmatrix	32
1.5.4 Ordnungsrelation	33
1.5.5 Äquivalenzrelationen, Äquivalenzklassen und Quotientenmengen	35
1.6 Abbildungen	37
1.6.1 Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen	38
1.6.2 Graphische Darstellung	40
1.6.3 Abbildungen als spezielle Relationen	40

1.6.4	Hintereinanderschaltung von Abbildungen	41
1.6.5	Folgen und nochmals Potenzmengen	41
1.7	Die Mächtigkeit von Mengen	42
1.7.1	Abzählbar unendliche Mengen	43
1.7.2	Reelle Zahlen – überabzählbar unendlich	45
1.7.3	*Die Kontinuumshypothese und ein unendlicher Turm von Mächtigkeiten	47
2	Elementare Algebra	49
2.1	Gruppen	49
2.2	Körper	51
2.3	Vektorräume	53
2.3.1	Skalarprodukt und Norm	54
2.4	Zwei Ungleichungen	56
2.4.1	Cauchy-Schwarz-Ungleichung	56
2.4.2	Dreiecksungleichung	57
2.4.3	Zusammenfassung der Vektorraumstrukturen	58
2.5	Vektorprodukt, Spatprodukt und Determinante	58
2.6	Lineare Abbildungen, Eigenwerte und Hauptachsen	61
2.7	*Funktionsräume als Vektorräume	63
3	Grenzwerte und Topologien	65
3.1	\mathbb{N}, \mathbb{Z} und \mathbb{Q}	66
3.1.1	Erweiterungen von Zahlenmengen durch Hinzunahme der inver- sen Elemente	66
3.1.2	Erweiterung durch Lösungsmengen von Gleichungen	67
3.2	Metrische Räume und Grenzwerte von Folgen	68
3.2.1	Metrischer Raum	68
3.2.2	Häufungspunkte und Grenzwerte von Folgen	69
3.2.3	Offene und abgeschlossene Mengen	72
3.3	Rechenregeln für Grenzwerte	75
3.3.1	Kombination konvergenter Folgen	75
3.3.2	Beschränkte Folgen	75
3.4	Reihen	76
3.4.1	Konvergenz und Divergenz von Reihen	77
3.4.2	Konvergenzkriterien für Reihen	79
3.4.3	Rechnen mit Reihen	81
3.5	Einige spezielle Funktionen	81
3.5.1	Polynome	81

3.5.2	Die Exponentialfunktion	84
3.5.3	Beweis der Konvergenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$	85
3.5.4	Der natürliche Logarithmus	87
3.5.5	Sinus- und Kosinus-Funktion	87
3.5.6	Hyperbolische Funktionen	88
3.6	Konvergenz von Funktionen	88
3.7	Topologische Räume	89
3.7.1	Axiomatische Definition einer Topologie	89
3.7.2	Kompakte Räume	92
4	Reelle und komplexe Zahlen	93
4.1	Konstruktive Definition von \mathbb{R}	93
4.1.1	Vervollständigung eines metrischen Raums	93
4.1.2	Die reellen Zahlen	94
4.1.3	Die n -te Wurzel	96
4.2	Die komplexen Zahlen	97
4.2.1	Definition der komplexen Zahlen	97
4.2.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	98
4.2.3	Die Euler'sche Formel	100
4.2.4	Die Polardarstellung komplexer Zahlen	101
4.3	Schranken und Schnitte	103
4.3.1	Schranken	103
4.3.2	Dedekind'sche Schnitte	106
4.3.3	Nochmals die n -te Wurzel	106
5	Stetigkeit und Ableitung	109
5.1	Stetige Abbildungen	109
5.1.1	Beweis der Äquivalenz von Folgen- und Epsilon-Delta-Stetigkeit	112
5.1.2	Stetigkeitsregeln	113
5.1.3	Der Zwischenwertsatz [<i>intermediate value theorem</i>]	113
5.1.4	Der Satz von Weierstraß	114
5.1.5	Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit	114
5.2	Die \mathcal{O} - und o -Notation	115
5.2.1	\mathcal{O} und o für Folgen	116
5.2.2	\mathcal{O} und o für Funktionen	117
5.3	Die Ableitung einer Funktion	118
5.3.1	Ableitung einer reellwertigen Funktion	118
5.3.2	Ableitungsregeln	120
5.3.3	Bahnkurven und ihre Geschwindigkeit	124
5.3.4	Gradient, Richtungsableitung und partielle Ableitung	125

5.3.5	Allgemeine Ableitung	129
5.3.6	Divergenz und Rotation	129
5.4	Höhere Ableitungen	130
5.4.1	Extrempunkte und stationäre Punkte	132
5.4.2	Laplace- und d'Alembert-Operator	134
5.4.3	Ableitungsidentitäten	134
5.5	Die Taylor-Entwicklung	136
5.5.1	Der Satz von L'Hospital	137
5.5.2	Einige spezielle Funktionen	138
6	Integrale	141
6.1	Das Integral als Flächenmessung	141
6.1.1	Einfache Eigenschaften des Integrals	143
6.1.2	Der Hauptsatz der Integralrechnung	144
6.1.3	Unbestimmte Integrale	145
6.2	Integrationsregeln	146
6.2.1	Partielle Integration	146
6.2.2	Partialbruchzerlegung	146
6.2.3	Substitutionsregel	147
6.3	Zwei Anwendungen	149
6.3.1	Arbeit als Integral über eine Kraft	149
6.3.2	Rotationskörper und Längen	151
7	Gewöhnliche Differentialgleichungen	153
7.1	Zwei Beispiele	154
7.1.1	Die Zerfalls- bzw. Wachstumsgleichung	154
7.1.2	Der harmonische Oszillator	156
7.2	Allgemeine Bemerkungen	158
7.3	Lineare Differentialgleichungen	161
7.3.1	Allgemeine Eigenschaften	161
7.3.2	Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koef- fizienten	163
7.3.3	Weshalb Exponentialansatz?	166
7.3.4	Der getriebene gedämpfte Oszillator	167
7.4	Gekoppelte lineare Differentialgleichungen	168
7.4.1	Gekoppelte lineare homogene Differentialgleichungen erster Ord- nung	169
7.4.2	Gekoppelte lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ord- nung	172
7.5	Spezielle Lösungsverfahren	175

7.5.1	Trennung der Variablen	175
7.5.2	Beispiel: Die logistische Differentialgleichung	177
7.5.3	*Die logistische Abbildung	182
7.5.4	Die Energieerhaltung	187
8	Parametrisierte Räume	191
8.1	Parametrisierte Wege im \mathbb{R}^n	191
8.1.1	Die Parametrisierung von Wegen	191
8.1.2	Der Tangentialvektor - Die Geschwindigkeit	192
8.1.3	Die Beschleunigung	194
8.1.4	Das mitgeführte Dreibein	195
8.2	Flächen	197
8.3	Parameterdarstellung d -dimensionaler Räume im \mathbb{R}^n	199
8.4	Charakterisierung durch Bedingungen – Implizite Funktionen	200
8.5	Kegelschnitte	202
8.6	Koordinatensysteme	204
8.6.1	Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2	205
8.6.2	Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3	205
8.6.3	Kugelkoordinaten	206
8.6.4	Allgemeine Koordinatentransformationen	206
9	Mehrfachintegrale	209
9.1	Elementare Einführung in die Maßtheorie	209
9.1.1	Messbare Mengen – σ -Algebren	209
9.1.2	Maße	211
9.1.3	Wahrscheinlichkeitsmaße	211
9.1.4	Integrale	212
9.1.5	Mehrfachintegrale - Der Satz von Fubini	213
9.1.6	Beispiele für Maße	214
9.2	Kurvenintegrale	218
9.2.1	Die Bogenlänge	219
9.2.2	Kurvenintegration über skalare Felder	220
9.2.3	Berechnung der Arbeit	220
9.2.4	Integration über Gradientenfelder	220
9.3	Flächenintegrale und Stokes'scher Satz	221
9.3.1	Flächenelement und Flächenintegral im \mathbb{R}^3	221
9.3.2	Beispiel: Die Kugeloberfläche	222
9.3.3	Der Stokes'sche Satz	223
9.3.4	Der Satz von Poincaré	226
9.3.5	Das eindimensionale Integral als Flächenintegral	227

9.4	Volumenintegrale und der Satz von Gauß	228
9.4.1	Volumenelement und Volumenintegration	228
9.4.2	Beispiel: Die Kugel vom Radius R	229
9.4.3	Der Satz von Gauß – Die Divergenz als Quellendichte	229
9.5	Die Kontinuitätsgleichung	230
10	Elementare Konzepte der Differentialgeometrie	233
10.1	Indexnotation und Einstein'sche Summenkonvention	234
10.2	Verallgemeinertes Skalarprodukt und metrischer Tensor	235
10.3	Reziproke bzw. duale Basis	237
10.4	Intrinsische Bedeutung der Metrik	238
10.5	Jacobi-Determinanten und Metrik	239
10.6	Drei Beispiele	240
10.6.1	Polarkoordinaten	241
10.6.2	Kugelkoordinaten	242
10.6.3	Die Kugeloberfläche	242
10.7	Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten	244
10.7.1	Reziproke Basis in krummlinigen Koordinaten	245
10.7.2	Der Gradient in krummlinigen Koordinaten	245
10.7.3	* Divergenz in krummlinigen Koordinaten	246
10.7.4	Der Laplace-Operator	248
10.7.5	Gradient und Laplace-Operator in bekannten Koordinaten . . .	248
11	* Komplexe Funktionen und Fourier-Transformation	251
11.1	Analytische und holomorphe Funktionen	251
11.2	Der Cauchy'sche Integralsatz	253
11.3	Analytische Fortsetzung	255
11.4	Meromorphe Funktionen	256
11.5	Integraltransformationen	257
11.5.1	Faltungen	258
11.6	Fourier-Reihen	259
11.6.1	Die Entwicklungskoeffizienten	259
11.6.2	Der Vektorraum periodischer Funktionen	261
11.6.3	Ein paar mathematische Feinheiten	262
11.6.4	Komplexe Fourier-Reihen	264
11.7	Fourier-Transformation	266
11.7.1	*Der Grenzwert $L \rightarrow \infty$	266
11.7.2	Der Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen	268
11.7.3	Anwendungen	269

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	11
Literaturangaben und Referenzen	271
Stichwortverzeichnis	273

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Elementare Mengenlehre und logische Operationen

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer kurzen Einführung in die Grundbegriffe der Mengenlehre [*set theory*]. In diesem Zusammenhang erfolgt auch eine Definition der wichtigsten logischen Konzepte wie UND, ODER und NICHT. Im Grunde genommen handelt es sich um ein „Lexikon mathematischer Symbole und ihrer Bedeutungen“. Dieses Lexikon ist bei weitem nicht vollständig, aber die hier verwendeten Bezeichnungen werden sowohl in der Mathematik als auch der Physik immer wieder benötigt. Sie bilden eine Art „elementarer Grundwortschatz“ der Mathematik.

1.1.1 Schwierigkeiten bei der Definition von „Menge“

Die Mengenlehre geht auf den Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) zurück, der sie gegen Ende des 19. Jahrhunderts begründete. Erst dadurch konnten viele Konzepte der Mathematik exakt gefasst werden (insbesondere auch der Umgang mit unendlichen Mengen). Der bekannte Mathematiker David Hilbert (1862–1943) meinte in diesem Zusammenhang: „Aus dem Paradies, das Cantor uns gegeben hat, soll uns niemand mehr vertreiben“ [9].

Eine mathematische Definition von *Menge* [*set*] ist nicht einfach. Georg Cantor schrieb [2]:

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Diese sehr allgemeine Definition, die insbesondere nicht festlegt, was alles „Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens“ sein können, erwies sich später als zu un-

präzise. Der Philosoph und Mathematiker Bertrand Russell (1872–1970) zeigte, dass im Rahmen der genannten Definition auch Objekte wie „die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“ möglich sind, und dass solche Konstruktionen zu mathematischen Widersprüchen führen [16]. In der Folgezeit wurde der Begriff der Menge axiomatischer gefasst (bekannt sind in diesem Zusammenhang die Axiome von Zermelo und Fraenkel), sodass Paradoxien wie die von Russell vermieden werden konnten.

Um im Folgenden einen nicht zu abstrakten Einstieg in die Mengenlehre zu ermöglichen, bleiben wir im Wesentlichen bei der Definition Cantors, wobei die „Objekte der Anschauung oder des Denkens“ meist Zahlenmengen (z.B. die Menge der reellen Zahlen), Punktmengen in einem Raum (z.B. die Menge der Punkte in einer Ebene), Mengen von Symbolfolgen (z.B. die Menge aller endlichen Aneinanderreihungen von Buchstaben unseres Alphabets) oder Mengen von Funktionen sind. Der Zusammenhang wird deutlich machen, von welchen Mengen die Rede ist. Vermeiden sollte man aber Konstruktionen wie „die Menge aller Mengen“ (solche Zusammenfassungen bezeichnet der Mathematiker heute nicht als „Menge“ sondern als „Klasse“). Falls M eine sinnvolle Menge ist, kann man jedoch von der „Menge aller Teilmengen von M “ sprechen. Wir werden noch weitere Verfahren kennenlernen, wie man aus gegebenen Mengen neue Mengen konstruieren kann.

Eine besondere Menge ist die leere Menge [*empty set*], die man mit \emptyset bezeichnet. Diese Menge enthält kein Element. Die leere Menge ist Teilmenge [*subset*] von jeder beliebigen Menge M . Es ist die einzige Teilmenge, die 0 Elemente enthält.

1.1.2 Elemente einer Menge

Eine Menge wird durch die Festlegung ihrer Elemente [*elements*] charakterisiert. Dabei setzen wir zunächst gewisse Mengen als bekannt voraus, beispielsweise die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$,¹ die Menge der ganzen Zahlen [*integers*] $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$, die Menge der rationalen Zahlen [*rational numbers*] \mathbb{Q} oder auch die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} , wobei wir diese Zahlenmengen noch genauer definieren werden.

Will man andeuten, dass ein Objekt x ein Element einer Menge M ist, so schreibt man $x \in M$. Möchte man zum Ausdruck bringen, dass ein Element y nicht Element von M ist, schreibt man auch $y \notin M$.

Bei einfachen endlichen Mengen kann man die Elemente aufzählen. Dazu ver-

¹Ob man die Zahl 0 zur Menge der natürlichen Zahlen hinzuzählt ist eine Frage der Definition. Manchmal verwendet man in der Literatur das Symbol \mathbb{N}^* zur Kennzeichnung der natürlichen Zahlen ohne 0. Eine axiomatische Definition der natürlichen Zahlen erfolgt meist durch die sogenannten Peano-Axiome.

wendet man die Klammern $\{$ und $\}$, beispielsweise

$$M_P = \{2, 3, 5, 7\} \quad \text{oder} \quad M_V = \{a, e, i, o, u\} \quad (1.1)$$

für die Menge M_P der Primzahlen [*prime numbers*] kleiner als 10 oder die Menge M_V der Vokale im Alphabet. Bei komplexeren Mengen oder Mengen mit unendliche vielen Elementen versucht man, die Elemente durch ihre Eigenschaften zu charakterisieren, beispielsweise ist

$$M = \{x|x = 2n \text{ für } n \in \mathbb{Z}\} \quad (1.2)$$

die Menge aller geraden Zahlen [*even numbers*], also aller Zahlen x , die sich als das Doppelte einer ganzen Zahl n schreiben lassen. Vor dem senkrechten Strich „|“ steht meist ein typisches Element mit seiner Bezeichnung und hinter dem Strich steht eine mathematische Charakterisierung der Elemente. Diese Schreibweise ist nicht eindeutig, man könnte auch schreiben:

$$M = \{2n|n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{oder} \quad M = \{x \in \mathbb{Z}|x \text{ gerade}\}. \quad (1.3)$$

Wichtiger als die eindeutige Schreibweise ist, dass die Menge M eindeutig charakterisiert ist. So sind folgende Bezeichnungen für die Menge der ungeraden Zahlen [*odd numbers*] durchaus gebräuchlich:

$$M = \{x|x = 2n+1, n \in \mathbb{Z}\}, \quad M = \{2n+1|n \in \mathbb{Z}\}, \quad M = \{x \in \mathbb{Z}|x \text{ ungerade}\}. \quad (1.4)$$

Für die Mathematik sind die Elemente einer Menge immer in irgendeiner Form unterscheidbar und damit identifizierbar. Insbesondere kann eine Menge nicht zweimal dasselbe Element enthalten. Wenn man also sagt „Wir betrachten das Element x der Menge M “, so wird immer angenommen, dass das Element x eindeutig charakterisiert ist. In einer großen Stadt von der „Person Hans Müller“ zu sprechen, ist dagegen nicht immer eindeutig. In der Physik muss man manchmal angeben, in welcher Form ein Objekt oder einen Gegenstand eindeutig charakterisiert werden kann, in der Mathematik gilt dies immer als gegeben.

Sei M eine endliche Menge und N die Anzahl der Elemente von M , so schreibt man oft $|M| = N$. Die Betragsstriche kennzeichnen bei Mengen somit die Anzahl ihrer Elemente (oder auch ihre Mächtigkeit, siehe Abschnitt 1.7).

1.1.3 Logische Symbole

Im Folgenden lernen wir die Bedeutung der Symbole $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall$ kennen.

Eine Symbolfolge wie „ $x \in M$ “ bzw. die Aussage „ x ist Element der Menge M “ ist eine mathematische Aussage oder *Proposition* [*proposition*]. Ein Proposition (eine Aussage) kann wahr [*true*] oder falsch [*false*] sein; eine dritte Möglichkeit gibt es

nicht („tertium non datur“). Es gibt in der Mathematik eine Möglichkeit, Aussagen bzw. Propositionen axiomatisch zu charakterisieren (man definiert dazu ein Alphabet von Symbolen sowie Regeln, wie man zu sinnvollen Symbolfolgen gelangt, die Aussagen entsprechen), was wir hier der Einfachheit halber umgehen. Im Einzelfall sollte uns der gesunde Menschenverstand sagen, ob eine mathematische Aussage sinnvoll ist oder nicht. (Eine gute Einführung in die Grundlagen der Logik findet man in [4].)

Ausgehend von sinnvollen Aussagen, die wir im Folgenden einfach durch Buchstaben a, b, c , etc. bezeichnen, können wir durch logische Operationen zu neuen Aussagen gelangen. Die einfachste dieser Operationen ist \neg mit der Bedeutung NICHT [NOT], die eine Aussage in ihr Gegenteil umwandelt: Zu einer Aussage a ist $\neg a$ (NICHT a) das Gegenteil dieser Aussage. Ist a beispielsweise die Aussage „ $x \in M$ “, so ist $\neg a$ die Aussage „ $x \notin M$ “. Es gibt klare Regeln, wie man aus einer Symbolfolge, die einer mathematischen Aussage entspricht, die Symbolfolge zu der gegenteiligen Aussage erhält, aber auch hier werden wir uns eher auf den gesunden Menschenverstand verlassen.

Mit den folgenden zwei Symbolen können wir Aussagen verknüpfen: \wedge mit der Bedeutung UND [AND] und \vee mit der Bedeutung ODER [OR]. Sind a und b zwei mathematische Aussagen, so ist $a \wedge b$ die Aussage „ a UND b “. Damit diese Aussage wahr ist, müssen sowohl a als auch b wahr sein. In allen anderen Fällen ist diese Aussage falsch. Entsprechend bezeichnet $a \vee b$ die Aussage „ a ODER b “. Diese Aussage ist wahr, wenn entweder a oder b wahr ist (oder aber beide wahr sind). Wichtig ist, dass $a \wedge b$ und $a \vee b$ selbst wieder mathematische Aussagen sind, die entweder wahr oder falsch sein können.

Mit sogenannten Wahrheitstabellen [*truth tables*] kann man die Verknüpfung von Aussagen charakterisieren. Tabelle 1.1 enthält die wichtigsten Verknüpfungen, die auch in diesem Abschnitt erwähnt werden.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	wahr	falsch
falsch	wahr	falsch	wahr	wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	falsch	falsch	wahr	wahr	wahr

Tabelle 1.1: Wahrheitstabelle einiger wichtiger logischer Verknüpfungsregeln.

Wir werden die beiden Symbole \vee und \wedge sehr oft zur Kennzeichnung von Men-

gen verwenden. Beispiele sind:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{N} | (x < 10) \wedge (x \text{ gerade})\} \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{N} | (x < 10) \vee (x \text{ gerade})\} \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{N} | (x < 10) \wedge (x > 5)\} \\ M_4 &= \{x \in \mathbb{N} | (x < 10) \vee (x > 5)\}. \end{aligned}$$

M_1 enthält alle geraden natürlichen Zahlen kleiner als 10, also $M_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. M_2 enthält alle natürlichen Zahlen kleiner als 10 sowie alle geraden natürlichen Zahlen (egal wie groß). M_3 enthält alle Zahlen kleiner als 10 und größer als 5, also $M_3 = \{6, 7, 8, 9\}$, wohingegen M_4 alle natürlichen Zahlen kleiner als 10 und alle natürlichen Zahlen größer als 5 enthält, und somit ist $M_4 = \mathbb{N}$ (man beachte, dass die Elemente zwischen 6 und 9 nicht doppelt auftreten, entsprechend unserer Forderung, dass eine Menge keine Elemente doppelt enthalten kann).

Im nächsten Abschnitt werden wir mit Hilfe dieser Symbole die Vereinigung, den Durchschnitt und das Komplement von Mengen definieren. Vorher wollen wir jedoch noch einige logische Symbole definieren, die später in der Formulierung mathematischer Aussagen wichtig sind.

Das Symbol \Rightarrow bedeutet, dass aus der Aussage auf der linken Seite dieses Symbols die Aussage rechts davon folgt ([... *implies* ...]). Man bezeichnet diese Art der Verknüpfung als *Implikation* [*implication*] oder auch als „wenn ..., dann ...“-Beziehung. Beispielsweise bedeutet $(a \wedge b) \Rightarrow c$, dass aus der Richtigkeit von Aussage a und der Richtigkeit von Aussage b die Richtigkeit von Aussage c folgt. Anders ausgedrückt: *Wenn* a und b wahre Aussagen sind, *dann* ist auch c eine wahre Aussage, bzw., a und c wahr impliziert, dass auch c wahr ist. Ein Beispiel wäre:

$$(x \text{ prim} \wedge x \text{ gerade}) \Rightarrow x = 2. \quad (1.5)$$

Entsprechend bedeutet \Leftarrow , dass die Aussage rechts von diesem Symbol die Aussage links davon impliziert. Das Symbol \Leftrightarrow bezeichnet die *Äquivalenz* [*equivalence*] von zwei Aussagen. Die Aussage auf der einen Seite ist also äquivalent („gleich-wertig“) zu der Aussage auf der anderen Seite. Oder aber: Immer, wenn die Aussage auf einer der beiden Seiten wahr ist, ist auch die Aussage auf der anderen Seite wahr. Ein Beispiel wäre: $x/2 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \text{ gerade}$.

Man kann sich leicht überlegen, dass es insgesamt 16 solcher binärer (also zwei Aussagen verknüpfender) Möglichkeiten gibt (jede der vier Kombinationen von a und b kann wahr oder falsch sein). Viele davon sind „trivial“: Die *Tautologie* [*tautology*] ist immer wahr, die *Kontradiction* [*contradiction*] ist immer falsch, die Negation von a ist, unabhängig von b , immer $\neg a$ etc. Es lassen sich jedoch all diese Verknüpfungsmöglichkeiten aus den genannten Verknüpfungen zusammensetzen.

Abschließend betrachten wir noch die beiden *Quantoren* [essential quantifier] \exists und \forall :

- Der so genannte *Existenzquantor* \exists (ein auf den Kopf gedrehtes bzw. an einer Vertikalen gespiegeltes E) liest sich meist als „Es gibt ein ... in der Menge ..., sodass ...“ [there exists an element ... in ... such that ...]. Er bringt zum Ausdruck, dass es in einer durch den Zusammenhang spezifizierten Menge M (mindestens) ein Element gibt, für das eine bestimmte Eigenschaft erfüllt ist.
- Entsprechend deutet der *Allquantor* \forall (ein auf dem Kopf stehendes A) an, dass eine Eigenschaft für alle Elemente einer Menge erfüllt ist. Er liest sich meist als „Für alle ... in der Menge ... gilt die Aussage ...“ [for all ... in ... holds ...].

Dementsprechend folgen hinter dem Existenz- bzw. Allquantor zwei Ausdrücke: Der erste Ausdruck gibt einfach ein spezielles oder allgemeines Element der Menge an, über das bzw. über die eine Aussage gemacht wird, und der zweite Ausdruck spezifiziert diese Aussage. Um diese beiden Ausdrücke zu trennen, kann man sie auch durch Klammern trennen oder hinter den ersten Ausdruck einen Doppelpunkt setzen (was aber nicht immer gemacht wird, insbesondere wenn mehrere Quantoren zusammenkommen). Sehr oft treten beide Quantoren in demselben Ausdruck auf. Beispiele:

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N} \left(\forall y \in \mathbb{N} (x + y = y) \right) \quad \text{bzw.} \quad \exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : x + y = y \\ \forall x \in \mathbb{N} \left(2x \in \mathbb{N} \right) \quad \text{bzw.} \quad \forall (x \in \mathbb{N}) : 2x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die erste Aussage liest sich in ausführlicher Form etwa so: Es gibt (mindestens) ein x in den natürlichen Zahlen \mathbb{N} , sodass für dieses x folgende Aussage gilt: Für alle y in den natürlichen Zahlen \mathbb{N} gilt die Aussage $x + y = y$. Etwas umgangssprachlicher heißt dies: Es gibt ein x in den natürlichen Zahlen, sodass für jede natürliche Zahl y die Gleichung $x + y = y$ erfüllt ist. Dieses x bezeichnen wir mit 0. Die zweite Aussage lautet einfach: Für jede natürliche Zahl x ist auch $2x$ eine natürliche Zahl.

Man beachte den Unterschied zwischen den folgenden beiden Ausdrücken:

$$\exists x \in M \forall y \in N : \dots \quad \text{und} \quad \forall y \in N \exists x \in M : \dots \quad (1.6)$$

wobei ... eine Bedingung bezeichnet. Der linke Fall liest sich: „Es gibt ein $x \in M$, sodass für alle $y \in N$ die Bedingung ... erfüllt ist“. Der rechte Fall: „Für alle (bzw. jedes) $y \in N$ gibt es ein $x \in M$, sodass ... erfüllt ist“. Der Unterschied ist, dass im linken Fall x für alle y dasselbe Element ist, wohingegen im rechten Fall das Element x für jedes y ein anderes sein kann. Ein Beispiel, das im nächsten Kapitel im Zusammenhang mit der Definition einer mathematischen Gruppe von Bedeutung ist, soll hier schon mal für die ganzen Zahlen vorweggenommen werden:

$$\exists e \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{Z} : e + x = x \quad \text{und} \quad \forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0. \quad (1.7)$$

Die erste Aussage bedeutet: Es gibt ein Element e in den ganzen Zahlen \mathbb{Z} , sodass für alle $x \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $e + x = x$ erfüllt ist. Dieses e ist die Zahl 0. Die zweite Aussage bedeutet, dass es zu jeder ganzen Zahl x eine andere ganze Zahl y gibt, sodass $x + y = 0$. Offensichtlich ist $y = -x$.

Wir werden diese logischen Symbole häufig verwenden. Zu Beginn werde ich ihre Bedeutung meist „übersetzen“, mit der Zeit sollte man aber eine gewisse Übung darin bekommen, Aussagen mit diesen Symbolen zu lesen und zu verstehen.

1.2 Operationen mit Mengen

1.2.1 Vereinigung, Durchschnitt, Differenz

Zwei sehr einfache Verknüpfungen von Mengen sind ihre Vereinigung [*union*] und ihr Durchschnitt [*intersection*]. Für zwei beliebige Mengen A und B gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad A \cap B &= \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\} \\ (2) \quad A \cup B &= \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}. \end{aligned}$$

Das bedeutet: (1) $A \cap B$ ist die Menge aller Elemente x , die *sowohl in A als auch in B* enthalten sind, für die also die Aussagen $x \in A$ und $x \in B$ beide wahr sind. $A \cap B$ bezeichnet man als den *Durchschnitt* oder die *Durchschnittsmenge* der Mengen A und B . Ist die Durchschnittsmenge von A und B leer, gilt also $A \cap B = \emptyset$, so bezeichnet man die beiden Mengen als *disjunkt* [*disjoint*].

(2) $A \cup B$ ist Menge aller Elemente x , die *entweder in A oder in B* sind (oder in beiden), für die also entweder die Aussage $x \in A$ oder die Aussage $x \in B$ wahr ist (oder beide Aussagen wahr sind). Diese Menge bezeichnet man als die *Vereinigung* oder *Vereinigungsmenge* von A und B . Hier wird auch nochmals deutlich, dass eine Menge durch die Menge ihrer Elemente charakterisiert wird: Bei der Vereinigung zweier Mengen geht es nicht darum, die Elemente beider Mengen „zusammenzuwerfen“ wie die Kugeln aus zwei verschiedenen Murnsäcken. Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind, treten in der Vereinigung nicht doppelt auf. Die „Menge aller Personen unter 20 Jahre“ vereinigt mit der „Menge aller Frauen“ enthält Frauen unter 20 nicht doppelt. Entsprechend ist $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$.

Weiterhin ist

$$A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \tag{1.8}$$

gleich der Menge aller Elemente in A , die nicht in B liegen. Manchmal spricht man auch von der *Differenz* der Menge A minus B oder auch der Menge A ohne die Elemente der Menge B .

1.2.2 Teilmengen

Ist A eine Teilmenge [subset] von B , so schreibt man

$$A \subset B \iff (x \in A) \Rightarrow (x \in B). \quad (1.9)$$

Diese Aussage bedeutet, dass $A \subset B$ gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass jedes Element aus A auch ein Element aus B ist. Manchmal unterscheidet man eine *echte Teilmenge* [proper subset] von einer allgemeinen Teilmenge: Bei einer echten Teilmenge gibt es mindestens ein Element in B , das nicht in A ist. Möchte man betonen, dass A eine Teilmenge von B , möglicherweise aber auch gleich der Menge B ist, so schreibt man auch $A \subseteq B$. Manche Autoren verwenden das Symbol \subset nur, wenn eine echte Teilmengenbeziehung ausgedrückt werden soll.

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn A und B dieselben Elemente enthalten. Das lässt sich auch so ausdrücken, dass A Teilmenge von B und B Teilmenge von A sein muss:

$$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A). \quad (1.10)$$

Die Gleichheit von zwei Mengen lässt sich daher auch in zwei Schritten beweisen: Man zeigt zunächst, dass A Teilmenge von B ist, und in einem zweiten Schritt zeigt man, dass B auch Teilmenge von A ist.

Ist A eine Teilmenge von B , so kann man auch das *Komplement von B in A* [complement] bilden: Formal ist es gleich $B \setminus A$, doch in diesem Fall schreibt man auch $\complement_B A$. Gemeint ist, dass dies die Komplementmenge von A aufgefasst als Teilmenge von B ist. Ist aus dem Zusammenhang ersichtlich, bezüglich welcher größeren Menge das Komplement von A gebildet wird, lässt man B auch weg und schreibt einfach $\complement A$ oder auch A^C . In diesem Fall (wo die Menge B aus dem Zusammenhang offensichtlich ist) bezeichnet man B auch schon mal als ein *Universum* [universe].

Unter einer *Partition* [partition] einer Menge M versteht man eine Menge $\{A_i\}$ von paarweise disjunkten Teilmengen $A_i \subset M$, deren Vereinigung die Menge M ergeben. Es gilt somit:

$$M = \bigcup_i A_i \quad \text{mit} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j. \quad (1.11)$$

Der Index i muss hierbei keine diskrete Menge durchlaufen (für ein Beispiel siehe Abschnitt 1.5.5.)

1.2.3 Potenzmenge – Menge aller Teilmengen

Zu jeder Menge M kann man die *Menge aller Teilmengen von M* [set of all subsets] oder auch *Potenzmenge von M* [power set] betrachten. Die formale Definition lautet

$$\mathcal{P}(M) = \{U \mid U \subseteq M\}. \quad (1.12)$$

Die Elemente von $\mathcal{P}(M)$ sind somit selbst Mengen. Für eine Teilmenge $U \subset M$ gilt also $U \in \mathcal{P}(M)$. Wie schon erwähnt wurde, ist die leere Menge eine Teilmenge von jeder Menge, also $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. Außerdem ist auch die Menge M selbst eine (nicht echte) Teilmenge ihrer selbst: $M \subseteq M$ oder $M \in \mathcal{P}(M)$.

Beispiel: Eine Menge mit drei Elementen, $M = \{a, b, c\}$ hat folgende Potenzmenge:

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}. \quad (1.13)$$

Diese Potenzmenge enthält somit 8 Elemente. Allgemein hat die Potenzmenge einer Menge mit N Elementen insgesamt 2^N Elemente, oder anders ausgedrückt: $|M| = N \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^N$. Beweis: Jede Teilmenge $U \subseteq M$ ist eindeutig dadurch charakterisiert, dass man von jedem Element $x \in M$ angibt, ob es in U enthalten ist oder nicht. Das ergibt für jedes Element x in M zwei Möglichkeiten: x *in* der Teilmenge oder x *nicht in* der Teilmenge. Enthält M insgesamt N Elemente, so gibt es also 2^N Möglichkeiten, Teilmengen von M zu konstruieren.

Aus diesem Grund schreibt man statt $\mathcal{P}(M)$ auch manchmal 2^M . Diese Notation zur Bezeichnung der Menge aller Teilmengen verwendet man auch, wenn M unendlich viele Elemente besitzt. Einen weiteren Grund für diese Schreibweise lernen wir in Abschnitt 1.6.5 kennen.

Ein interessanter Fall ergibt sich für $M = \emptyset$. Die leere Menge enthält zwar kein Element, aber sie enthält eine Teilmenge (nämlich sich selbst). Insofern ist $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Die Potenzmenge der leeren Menge enthält also ein Element (entsprechend der allgemeinen Formel $2^0 = 1$). Betrachtet man nun die Potenzmenge der Potenzmenge der leeren Menge, so enthält diese schon zwei Elemente:

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Verschiedentlich wurde die Menge der natürlichen Zahlen axiomatisch durch die Iteration dieses Verfahrens „aus dem Nichts“ konstruiert (z.B. durch den Mathematiker Johann von Neumann).

1.3 Beweisverfahren

Der Beweis [*proof*] ist in der Mathematik die höchste Wahrheitsinstanz. Wurde eine mathematische Aussage bewiesen, gilt diese Aussage als wahr. Die Regeln, nach denen ein Beweis zu erfolgen hat, sind in der mathematischen Logik bzw. dem sogenannten Prädikatenkalkül festgelegt. Wiederum werden wir hier nicht in die axiomatischen und symbolischen Grundlagen eindringen. Im Allgemeinen wird von einem Beweis verlangt, dass die *Beweisannahmen* klar formuliert sind (d.h., in der Formulierung des mathematischen Satzes, den man beweisen möchte, sollten sämtliche Annahmen,

die für den Beweis notwendig sind, aufgezählt werden), und dass die Argumente, die von den Annahmen zu den Schlussfolgerungen (und damit dem Beweis des Satzes) führen, für jeden nachvollziehbar und einsichtig sind. Ist das der Fall, kann man bei Bedarf jedes der Argumente in feinere Schritte unterteilen, bis man schließlich bei den symbolischen Manipulationen landet, die ein strenger Formalismus vorschreibt.

Es gibt mehrere häufig verwendete Beweismethoden, die zunächst vielleicht nicht ganz selbstverständlich sind. Neben einer direkten, rein deduktiven Ableitung sind das besonders der „Beweis durch Widerspruch“ und das Induktionsverfahren.

1.3.1 Direkter Beweis

Hierbei werden aus den Annahmen [*assumptions*] direkt weitere Schlüsse gezogen, die schließlich zum Ziel führen. In der Mathematik bezeichnet man diese Schlussweise auch als *Deduktion* [*deduction*]. Ein typisches Beispiel ist der Beweis in der Geometrie, dass die Winkelsumme in einem Dreieck 180° beträgt.

Die wesentlichen Voraussetzungen (bzw. Beweisannahmen) sind: (1) Zu jeder Geraden und jedem Punkt außerhalb dieser Geraden gibt es genau eine Parallele zu dieser Geraden durch diesen Punkt (dies legt mehr oder weniger die Euklidische Geometrie fest), (2) die Wechselwinkel, wenn eine Gerade zwei Parallelen schneidet, sind gleich. Diese Aussage muss vorher in der Geometrie bewiesen worden sein.

Der Beweis erfolgt nun folgendermaßen. Aus (1) folgt, dass wir durch jeden Eckpunkt eines Dreiecks eine (eindeutige) Parallele zu der diesem Punkt gegenüberliegenden Seite ziehen können. Aus (2) folgt, dass die beiden Innenwinkel des Dreiecks an dieser gegenüberliegenden Seite einen zugehörigen Wechselwinkel bei der Parallelen durch den dritten Punkt haben. Nun zeigt ein Bild (Abb. 1.1) sofort, dass die Summe der drei Winkel an dem Eckpunkt gleich 180° ist.

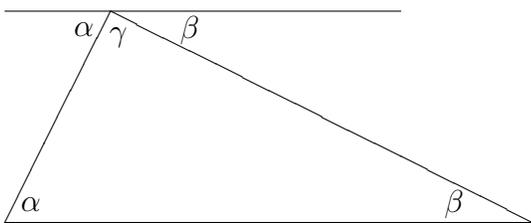


Abbildung 1.1: Die Winkelsumme in einem Dreieck der euklidischen Geometrie beträgt immer 180° Grad.

Man kann nun jeden Schritt des Beweises in weitere Unterschritte unterteilen, doch irgendwann wird auch ein Skeptiker sagen: „Jetzt bin ich zufrieden“.²

²Einige „triviale“ Annahmen habe ich nicht erwähnt, beispielsweise dass sich jede Strecke eindeutig

Als zweites Beispiel für einen direkten Beweis wähle ich die erste binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Wir werden sehen, dass in diesen Beweis neben der Definition des Quadratzeichens einige Eigenschaften der Multiplikation und der Addition eingehen. Wenn man sich dieser Eigenschaften bewusst ist, sieht man sofort ein, dass diese Formel in jeder mathematischen Struktur gilt, in der eine Addition und eine Multiplikation definiert ist und diese Eigenschaften gelten. Die Eigenschaften sind:

$$\text{Distributivgesetze: } x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$$

$$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$$

$$\text{Kommutativgesetz: } x \cdot y = y \cdot a$$

Gilt die das Kommutativgesetz für die Multiplikation, reicht natürlich eine Version der beiden Distributivgesetze. Es gibt aber Mengen (z.B. Matrizen), in denen die Kommutativität nicht gilt, aber beide Distributivgesetze. In diesen Mengen kann man zumindest eine leicht abgewandelte Form der binomischen Formel ableiten.

Mit diesen Gesetzen kann man den linken Term der binomischen Formel schrittweise umformen:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) && \text{(Definition von „Quadrat“)} \\ &= (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b && \text{(erstes Distributivgesetz)} \\ &= a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot a && \text{(zweites Distributivgesetz)} \\ &= a^2 + b \cdot a + a \cdot b + b^2 && \text{(Definition von „Quadrat“)} \\ &= a^2 + 2(a \cdot b) + b^2 && \text{(Kommutativgesetz).} \end{aligned}$$

(Beim letzten Schritt könnte man noch einige Feinheiten unterscheiden, auf die ich hier aber nicht eingehen möchte.) Ohne die Kommutativität der Multiplikation gilt immer noch die vorletzte Gleichung, sofern die beiden Distributivgesetze gelten.

1.3.2 Beweis durch Widerspruch

Beim Beweis durch Widerspruch (nach dem Lateinischen auch als „*reductio ad absurdum*“ bezeichnet) [*proof by contradiction*] nimmt man zunächst das Gegenteil der zu beweisenden Behauptung an. Aus der Annahme dieses Gegenteils leitet man nun nach den herkömmlichen Methoden eine Aussage ab, die zu den Annahmen im Widerspruch steht. Also führt die Annahme des Gegenteils der zu beweisenden Behauptung zu einem Widerspruch. Somit muss dieses Gegenteil falsch sein, und damit ist die zu beweisende Behauptung richtig.

zu einer Geraden verlängern lässt oder dass der Winkel, den eine Gerade an einem Punkt auf dieser Geraden definiert, gleich 180° ist.

Beim Beweis durch Widerspruch wird das „tertium non datur“ verwendet, denn hier wird argumentiert: Wenn die Aussage $\neg a$ falsch ist, muss die Aussage a richtig sein. Es gibt Logiker der Mathematik, die das tertium non datur ablehnen und daher einen Beweis durch Widerspruch nicht gelten lassen. Mit den Konsequenzen einer solchen Logik wollen wir uns hier aber nicht beschäftigen.

Wir betrachten dazu zwei bekannte Beispiele.

$\sqrt{2}$ ist irrational

Ein bekanntes Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch ist der Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Im ersten Schritt nehmen wir an, $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl und ließe sich dementsprechend als $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ schreiben, wobei m und n natürliche Zahlen sind. Außerdem sollen m und n teilerfremd sein, sodass sich der Bruch $\frac{m}{n}$ nicht mehr weiter kürzen lässt. Dies ist keine zusätzliche Annahme, sondern beruht auf einem (vorher schon bewiesenen) Satz, wonach man jede rationale Zahl durch das Verhältnis zweier teilerfremder natürlicher Zahlen ausdrücken kann.

Nun quadriert man die Beziehung und erhält $2 = m^2/n^2$ oder $2n^2 = m^2$. Da auf der linken Seite eine gerade Zahl steht, muss dies auch für die rechte Seite gelten. Doch wenn m^2 eine gerade Zahl ist, muss auch m eine gerade Zahl sein, sodass wir $m = 2k$ schreiben können. Eingesetzt in obige Beziehung bedeutet dies $2n^2 = 4k^2$. Wir können durch 2 dividieren und erhalten $n^2 = 2k^2$. Damit muss auch n eine gerade Zahl sein und wir erhalten einen Widerspruch: m und n müssen beide gerade sein; doch wir hatten angenommen, m und n seien teilerfremd. Also sind wir zu einem Widerspruch gelangt und damit muss unsere Annahme – $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl – falsch sein.

Es gibt unendlich viele Primzahlen

Ein weiteres berühmtes Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch ist der Beweis von Euklid für die Tatsache, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wir nehmen zunächst an, es gebe nur endlich viele Primzahlen, z.B. p_1, p_2, \dots, p_k . Nun bilden wir das Produkt dieser Primzahlen (das für endlich viele Primzahlen endlich ist) und addieren 1:

$$E = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1.$$

Die Zahl E kann nicht durch eine der Primzahlen p_k teilbar sein, da immer ein Rest 1 bleibt. Also muss E entweder selbst eine Primzahl sein, oder aber das Produkt aus Primzahlen, die in obiger Liste nicht auftreten. In beiden Fällen führt die Annahme, die Anzahl der Primzahlen sei endlich und könne hingeschrieben werden, zu einem Widerspruch. Hier wurde vorausgesetzt, dass sich jede Zahl E eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben lässt (oder selbst eine Primzahl ist). Dies bezeichnet man als den Fundamentalsatz der Arithmetik und wurde bei dem Beweis vorausgesetzt.

Manchmal liest man in vereinfachenden Darstellungen, dass E selbst eine Primzahl sein müsse. Diese Aussage ist falsch. Ein Beispiel erhalten wir, wenn wir als Primzahlen die Folge $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ betrachten. Die zugehörige Zahl E ist:

$$E = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031 = 59 \cdot 509.$$

Beide Primzahlen 59 und 509 waren in der ursprünglichen Liste nicht enthalten.

1.3.3 Beweis durch vollständige Induktion

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion [*proof by induction*] bereitet zunächst oft konzeptuelle Schwierigkeiten, da man den Eindruck hat, man setzt das zu Beweisende schon voraus. Es eignet sich besonders für den Beweis von Behauptungen, die für alle natürlichen Zahlen richtig sein sollen. (In der antiken Philosophie versteht man unter einer *Induktion* das Schließen auf eine allgemein gültige Aussage aus einer Verallgemeinerung spezieller Beispiele.)

Die allgemeine Struktur dieses Beweises lässt sich folgendermaßen skizzieren: Die zu beweisende Behauptung sei $a(n)$. Hierbei sei $a(n)$ eine Proposition, die von einer natürlichen Zahl n abhängt, und die Behauptung ist, dass diese Proposition $a(n)$ für alle natürlichen Zahlen n wahr sein soll. (In manchen Fällen soll die Aussage auch nur für alle natürlichen Zahlen größer als eine kleinste Zahl n_0 gelten.)

1. Induktionsanfang: Wir beweisen, dass die Aussage für $n = 0$ (oder, je nachdem wie trivial diese Aussage wird, für $n = 1$) richtig ist. Wir müssen also zeigen: $a(0)$ (oder $a(1)$) ist wahr. Soll die Aussage nur für die natürlichen Zahlen gleich und größer als ein n_0 gelten, muss $a(n_0)$ bewiesen werden.
2. Induktionsschritt: Es wird angenommen, die Aussage $a(n)$ sei richtig für alle $m \leq n$, insbesondere gelte also $a(n)$ selbst. Nun ist zu zeigen, dass aus dieser Annahme auch $a(n+1)$ folgt. Bei diesem Schritt darf $a(n)$ angenommen werden (oder auch $a(n-1)$), die neue Aussage $a(n+1)$ muss aber dann bewiesen werden.

Der Induktionsschluss ist immer derselbe und muss nicht explizit durchgeführt werden. Da $a(0)$ bewiesen wurde (im 1. Schritt), folgt nach dem 2. Schritt auch $a(1)$. Damit folgt aber auch $a(2)$ usw. für alle natürlichen Zahlen n . Es folgen drei Beispiele.

Die Summenformel für ganze Zahlen

Beispiel: Es wird behauptet:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \equiv \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.14)$$

(Das Zeichen \equiv drückt eine Identität [*identity*] aus – hier bedeutet es einfach, dass der Ausdruck $\sum_{k=1}^n k$ identisch zu dem Ausdruck $1 + 2 + \dots + n$ ist. Zu beweisen ist das rechte Gleichheitszeichen.) Der Induktionsanfang (den wir hier für $n = 1$ machen) bedeutet:

$$1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}. \quad (1.15)$$

Diese Aussage ist offensichtlich richtig. Nun nehmen wir an, obige Aussage sei für n richtig. Dann folgt daraus:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}. \quad (1.16)$$

Dies ist aber das, was zu zeigen war. Aus der Annahme, $a(n)$ sei richtig, folgt offenbar auch $a(n + 1)$. Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen n bewiesen.

Winkelsumme in einem n -Eck

Es soll bewiesen werden, dass in einem konvexen n -Eck (bei einem konvexen n -Eck sind alle Innenwinkel kleiner oder gleich 180°) die Summe der Innenwinkel $(n - 2) \cdot 180^\circ$ beträgt. In diesem Fall beginnt der Induktionsschritt bei einem Dreieck, also für $n_0 = 3$. Dafür ist diese Aussage offensichtlich richtig. Nun kann man ein beliebiges (konvexes) $(n + 1)$ -Eck durch eine Diagonale in ein n -Eck und ein 3-Eck unterteilen und damit auch den Induktionsschritt durchführen.

Die Ungleichung von Bernoulli

Benannt ist diese Ungleichung nach Jakob Bernoulli (1654–1705). Für jedes $x \geq -1$ und jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \quad (1.17)$$

Wir prüfen zunächst, dass die Ungleichung für $n = 0$ (oder auch $n = 1$) erfüllt ist. In diesem Fall gilt sogar die Gleichheit. Für $n \geq 2$ können wir eine echte Ungleichung ansetzen.

Nun setzen wir die Gleichung als Induktionsannahme für alle ganzen Zahlen kleiner gleich n voraus und zeigen:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \cdot (1 + x) \geq (1 + nx) \cdot (1 + x) \geq 1 + (n + 1)x. \quad (1.18)$$

Beim letzten Schritt haben wir den (nie negativen) Term nx^2 weggelassen. Für $x \geq -1$, $x \neq 0$ und $n \geq 2$ gilt sogar:

$$(1 + x)^n > 1 + nx. \quad (1.19)$$

1.3.4 Weitere Beweisverfahren

Beweis durch Aufzählung aller Möglichkeiten [*proof by exhaustion*]

Besteht die Behauptung aus endlich vielen Teilaussagen, kann man alle Teilaussagen einzeln durchgehen und die Richtigkeit der Behauptung in jedem Einzelfall zeigen. Das kann manchmal sehr mühselig sein und wird daher auch als „proof by brute force“ bezeichnet. („Proof by exhaustion“ kann sowohl „Beweis durch Ausschöpfung aller Möglichkeiten“ bedeuten als auch „Beweis durch Erschöpfung“.)

Konstruktiver Beweis [*proof by construction*]

Behauptet eine mathematische Aussage die Existenz eines bestimmten Objekts, so kann man den Beweis dadurch führen, dass dieses Objekt explizit konstruiert wird. Beispielsweise kann man die Aussage „Die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ hat für $b < a^2$ zwei reelle Lösungen“ dadurch beweisen, dass man die Lösungen ($x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - b}$) explizit angibt.

Ein typisches Beispiel für einen konstruktiven Beweis finden wir in Abschnitt 4.3. Dort wird behauptet, dass es keine größte rationale Zahl p gibt, sodass $p^2 < 2$. Der Beweis erfolgt dadurch, dass man zu jeder Zahl p , die $p^2 < 2$ erfüllt, eine neue Zahl q konstruiert (explizit angibt), die größer ist als p , für die aber ebenfalls $q^2 < 2$ gilt.

Schubfach- oder Taubenschlagprinzip [*pigeonhole principle*]

Dieses Beweisverfahren ist zwar sehr einfach, führt aber manchmal zu überraschenden Aussagen. Es besagt im Wesentlichen Folgendes: Wenn es mehr Tauben als Taubenschläge gibt, muss es mindestens einen Taubenschlag mit mehr als einer Taube geben. Oder allgemeiner: Möchte man n Objekte auf m Möglichkeiten verteilen und $n > m$, muss es zu mindestens einer Möglichkeit mehr als ein Objekt geben.

Ein triviales Beispiel wäre die Aussage: In einer Schule mit 400 Schülern haben mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag. Da das Jahr nur 365 Tage (oder 366 Tage, falls man Schaltjahre hinzuzählt) hat, müssen offensichtlich mehrere Schüler am selben Tag Geburtstag haben.

Ein etwas weniger triviales Beispiel ist das folgende: Verteilt man 51 Punkte beliebig in einem Quadrat der Kantenlänge 1, so findet man immer drei Punkte, die von einer Kreisscheibe mit Radius $1/7$ überdeckt werden können. Beweis: Man unterteile das Quadrat in 25 Quadrate der Kantenlänge $1/5$. Nach dem Taubenschlagprinzip muss es mindestens ein Teilquadrat geben, das drei Punkte enthält. Doch ein Quadrat mit der Kantenlänge $1/5$ lässt sich durch einen Kreis vom Radius $1/7$ überdecken.

1.4 Die Binomialkoeffizienten

Als erste Anwendung mancher Beweisverfahren sowie auch als Einstieg in kombinatorische Überlegungen beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit den *Binomialkoeffizienten* [*binomial coefficients*].

Bekannt sind die binomischen Formeln und ihre Verallgemeinerungen:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\(x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\(x + y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,\end{aligned}$$

und allgemein:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad (1.20)$$

wobei der Binomialkoeffizient folgendermaßen definiert ist:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \quad (1.21)$$

mit der Fakultätsfunktion:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Es wird definiert:

$$0! = 1.$$

Der Binomialkoeffizient gibt gleichzeitig die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen auszuwählen. Anders ausgedrückt: Eine Menge mit n Elementen hat $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.

Ein direkter Beweis erfolgt in drei Schritten:

1. Es gibt $k!$ Möglichkeiten, k Elemente in eine Folge anzuordnen. Beweis: (iterativ) Es gibt k Elemente, von denen man eines an die erste Stelle setzen kann (also k Möglichkeiten). Es verbleiben $k - 1$ Elemente, von denen man wieder eines an die zweite Stelle setzen kann (also $k - 1$ Möglichkeiten), usw.
2. Es gibt $n!/(n-k)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten, eine bestimmte Folge von k Elementen aus einer Menge von n Elementen zu erzeugen. Beweis: (ähnlich wie vorher) Für das erste Element der Folge gibt es n Möglichkeiten, für das zweite Element verbleiben noch $n - 1$ Möglichkeiten, bis schließlich noch $n - k + 1$ Möglichkeiten für das k .te Element verbleiben.

3. Da bei der Auswahl von k Elementen aus einer n -elementigen Menge die Reihenfolge, in der die k Elemente ausgewählt werden, keine Rolle spielt und es nach (1.) genau $k!$ Möglichkeiten gibt, diese k Elemente in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen, hat man den kombinatorischen Faktor aus (2.) noch durch $k!$ zu dividieren. Anders ausgedrückt: Es gibt $k!$ verschiedene Fälle aus Punkt (2.), die alle derselben Teilmenge von k Elementen entsprechen, also zu derselben Teilmenge führen.

Mit diesem Beweis erhalten wir gleichzeitig einen Beweis für Gl. 1.20. Zu zeigen ist ja, dass die Binomialkoeffizienten aus Gl. 1.21 tatsächlich die Koeffizienten sind, die in einer Entwicklung von $(x + y)^n$ auftreten. Schreiben wir diesen Ausdruck aus:

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y)(x + y)\dots(x + y), \quad (1.22)$$

so erhalten wir n Klammern auf der rechten Seite. Für den Term y^k müssen wir abzählen, auf wie viele Möglichkeiten wir die n Klammern in eine Gruppe mit k Klammern (aus denen das y kommt) und eine Gruppe mit $n - k$ Klammern (aus denen das x kommt) unterteilen können. Das ist genau das kombinatorische Problem der Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge.

Setzen wir in Gl. 1.20 $x = y = 1$, erhalten wir:

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}. \quad (1.23)$$

Das beweist nochmals, dass eine n -elementige Menge insgesamt 2^n Teilmengen hat.

Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (1.24)$$

Der Beweis kann direkt über die Definition erfolgen:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!k!} \quad (1.25)$$

$$= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} \quad (1.26)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}. \quad (1.27)$$

Dies entspricht der obigen Identität. Als kombinatorischer Faktor für die Anzahl von k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge lässt sich diese Gleichung einfach interpretieren: Die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen eine k -elementige Teilmenge zu wählen, ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit $n - 1$

1.5.2 Zweistellige homogene Relationen

Wir betrachten im Folgenden Relationen [*relations*] zwischen den Elementen einer Menge M . Man kann auch Relationen zwischen den Elementen verschiedener Mengen betrachten (dann nennt man die Relation nicht mehr homogen) oder auch Relationen zwischen mehr als zwei Elementen von Mengen (dann erhält man entsprechend mehrstellige Relationen).

Eine Relation R auf einer Menge M ist eine Teilmenge von $M \times M$, also $R \subset M \times M$. Die Elemente einer Relation sind also Paare von Elementen aus M . Gilt für zwei Elemente $x, y \in M$, dass $(x, y) \in R$, dann sagt man auch, dass x und y die Relation erfüllen und schreibt manchmal dafür $x \sim y$ (oder man verwendet ein anderes, der Relation angemessenes Symbol für \sim) oder auch xRy .

Bei Relationen kann man sehr viele verschiedene Eigenschaften studieren. Wir wollen hier nur die wichtigsten aufzählen:

- Eine Relation heißt *symmetrisch* [*symmetric*], wenn aus $(m, n) \in R$ auch folgt $(n, m) \in R$. In logischen Symbolen können wir schreiben:

$$\text{symmetrisch} \quad \forall m, n \in M : (m, n) \in R \Rightarrow (n, m) \in R. \quad (1.31)$$

- *Antisymmetrisch* [*anti-symmetric*] bedeutet, dass aus $(m, n) \in R$ und $(n, m) \in R$ folgt, dass $m = n$ sein muss:

$$\text{antisymmetrisch} \quad \forall m, n \in M : (m, n) \in R \wedge (n, m) \in R \Rightarrow m = n. \quad (1.32)$$

- *Asymmetrisch* [*asymmetric*] heißt eine Relation, wenn aus $(m, n) \in R$ folgt, dass $(n, m) \notin R$. Während bei einer antisymmetrischen Relation also die Diagonalelemente (m, m) durchaus in der Relation sein dürfen, besitzt eine asymmetrische Relation keine Diagonalelemente.

$$\text{asymmetrisch} \quad \forall m, n \in M : (m, n) \in R \Rightarrow (n, m) \notin R. \quad (1.33)$$

- Eine Relation heißt *reflexiv* [*reflexive*], wenn jedes Diagonalelement in der Relation liegt, oder $\forall m \in M : (m, m) \in R$.
- Eine Relation heißt *transitiv* [*transitive*], wenn aus $(m, n) \in R$ und $(n, p) \in R$ folgt $(m, p) \in R$, oder formal

$$(m, n) \in R \wedge (n, p) \in R \implies (m, p) \in R.$$

- Schließlich bezeichnen wir eine Relation als *vollständig* [*complete*], wenn zu je zwei Elementen $m \in M$ und $n \in M$ entweder $(m, n) \in R$ oder $(n, m) \in R$ gilt.

Viele dieser Relationen kann man sich an verwandtschaftlichen Beziehungen verdeutlichen.

- „verwandt sein mit“ ist eine symmetrische Relation: Wenn Person a mit Person b verwandt ist, ist auch Person b mit Person a verwandt. „verliebt sein in“ ist nicht immer symmetrisch, „verheiratet sein mit“ schon.
- Eine Vater-Sohn-Beziehung ist asymmetrisch: Wenn a der Vater von b ist, kann b nicht der Vater von a sein.
- Die schon genannte Relation „ist verwandt mit“ ist reflexiv, denn jede Person ist mit sich selbst verwandt. Die Relation „ist verliebt in“ ist nicht reflexiv, obwohl es reflexive Elemente geben kann (diese bezeichnet man dann als Narzißten).
- Die Relation „ist ein Vorfahre von“ ist transitiv: Wenn Person a ein Vorfahre von b ist, und b ein Vorfahre von c , dann ist auch a ein Vorfahre von c .
- Schließlich ist die Relation „ist gleich alt oder älter als“ eine vollständige Relation: Für je zwei Personen gilt, dass die eine Person gleich alt oder älter als die andere Person ist. Im strengen Sinne ist diese Relation nicht antisymmetrisch, da aus „ a gleich alt oder älter als b “ und „ b gleich alt oder älter als a “ nicht folgt, dass die beiden Personen identisch sind, sondern nur, dass sie gleich alt sind.

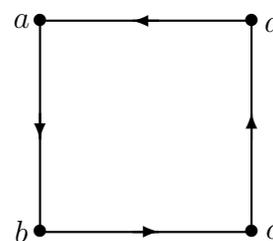
1.5.3 Darstellung einer Relation als Graph – die Adjazenzmatrix

Relationen in endlichen Mengen lassen sich sehr schön als Graphen (Punkte mit Verbindungslinien) darstellen und diese Graphen besitzen eine algebraische Darstellung durch eine Matrix.

Sei $M = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ eine endliche Menge mit N Elementen. Die Elemente der Menge stellen wir als Punkte (Vertizes) in einer Ebene dar. Falls $(v_i, v_j) \in R$, also das geordnete Paar (v_i, v_j) Element der Relation ist (man sagt auch: „für v_i und v_j gilt die Relation“), zeichnet man eine gerichtete Linie von v_i nach v_j . Bei einer symmetrischen Relation kann man auf die Gerichtetheit der Linien auch verzichten: Eine Linie repräsentiert dann beide Elemente (v_i, v_j) und (v_j, v_i) . Für diagonale Elemente (v_i, v_i) kann man einen Selbst-Loop zeichnen, also eine Linie, die einen Vertex mit sich selbst verbindet. Es folgen zwei Beispiele:

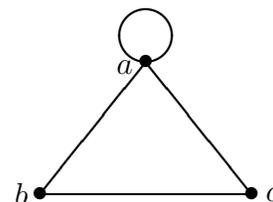
$$M_1 = \{a, b, c, d\}$$

$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$



$$M_2 = \{a, b, c\}$$

$$R_2 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (a, a)\}$$



Man kann eine Relation (bzw. einen Graphen) auch durch eine Tabelle darstellen, die man Adjazenzmatrix [*adjacency matrix*] nennt. Die Adjazenzmatrix A_{ij} ist folgendermaßen definiert:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_j, v_i) \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.34)$$

(Man beachte, dass die Reihenfolge der Indizes an der Adjazenzmatrix umgekehrt ist, als bei der Relation. Dies ist für manche Berechnungen sinnvoll.) Die beiden obigen Beispiele haben folgende Adjazenzmatrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

1.5.4 Ordnungsrelation

Eine wichtige Relation ist die Ordnungsrelation [*order relation*], die eine Formalisierung der Beziehung „ist kleiner oder gleich groß“ darstellt und dementsprechend oftmals mit dem Symbol \leq ausgedrückt wird. Statt also zu schreiben $(m, n) \in R$ mit der Bedeutung „ m ist kleiner als oder gleich groß wie n “ schreibt man einfacher $m \leq n$.

Formal ist eine Ordnungsrelation definiert als eine antisymmetrische, reflexive, transitive Relation, d.h., es gilt (jeweils für alle x, y, z der betrachteten Menge):

$$x \leq x \quad (\text{Reflexivität}) \quad (1.36)$$

$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y \quad (\text{Antisymmetrie}) \quad (1.37)$$

$$(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z \quad (\text{Transitivität}). \quad (1.38)$$

Manche Autoren oder Bücher fordern für eine Ordnungsrelation noch die Vollständigkeit oder *Totalität* [*totality*]:

$$\forall x, y : (x \leq y) \vee (y \leq x) \quad (\text{Totalität}) \quad (1.39)$$

Dies bedeutet, dass für zwei beliebige Elemente auch entweder $x \leq y$ oder die umgekehrte Beziehung gilt. Zur Betonung, dass diese Bedingung erfüllt ist, spricht man in diesem Fall auch von einer *Totalordnung* oder *vollständigen Ordnung*. Möchte man betonen, dass die Bedingung nicht notwendigerweise erfüllt ist, spricht man von einer *Partialordnung* oder *Teilordnung* [*partial ordering*].

Ist auf einer Menge eine Ordnungsrelation definiert, können wir auch die Relation $<$ („echt kleiner als“) definieren:

$$x < y \iff (x \leq y) \wedge (x \neq y). \quad (1.40)$$

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} , die ganzen Zahlen \mathbb{Z} und die reellen Zahlen \mathbb{R} erlauben die Definition einer natürlichen (totalen) Ordnungsrelation. Für die Menge der Punkte in einer Ebene, charakterisiert durch die Koordinaten (x, y) , gibt es zwar eine Ordnungsrelation, aber keine „natürliche“. Die Ordnungsrelation könnte beispielsweise lauten: $(x, y) < (X, Y) \iff (x < X) \vee (\text{falls } x = X) y < Y$. Das heißt, $(x, y) < (X, Y)$ ist immer richtig, wenn $x < X$ gilt. Falls jedoch $x = X$ gilt, ist die Aussage richtig, wenn $y < Y$ gilt. Dies definiert zwar eine Ordnungsrelation, aber sie ist nicht mehr „natürlich“ in folgendem Sinne: Für drei Punkte kann gelten $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$, und obwohl (x_1, y_1) und (x_3, y_3) sehr nahe beieinander liegen (z.B. $y_1 = y_3$ und x_3 ein klein wenig größer als x_1), liegt der Punkt (x_2, y_2) beliebig weit weg von den anderen beiden Punkten (z.B. weil $x_1 = x_2$ aber y_1 und y_2 sehr verschieden sind).

Ein Beispiel für eine Teilordnung (das später in der speziellen Relativitätstheorie wichtig wird) ist folgendes: Es seien $\{(x, y)\}$ die Punkte in einer Ebene. Wir definieren $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ wenn $(y_2 - y_1) \geq (x_2 - x_1)$. Der Abstand in y -Richtung ist also größer als der Abstand in x -Richtung. Die Axiome der Ordnungsrelation lassen sich leicht nachprüfen. Da jedoch nicht für je zwei Punkte in der Ebene entweder $(y_2 - y_1) \geq (x_2 - x_1)$ oder $(y_1 - y_2) \geq (x_1 - x_2)$ erfüllt ist, gibt es Punkte, für die diese Relation weder in der einen noch der umgekehrten Form gilt (daher „Teilordnung“).

Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M kann man durch folgende Vorschrift eine Teilordnung definieren: Für alle $U_i, U_j \subseteq M$ gilt:

$$(U_i, U_j) \in R \iff U_i \subseteq U_j \quad (1.41)$$

Diese (Teil-)Ordnungsrelation ist also immer dann erfüllt, wenn U_i eine Teilmenge von U_j ist. Man überzeugt sich leicht, dass die Axiome der Teilordnung erfüllt sind. Diese Definition ist natürlich auch sinnvoll, wenn die Menge M unendlich viele Elemente hat.

1.5.5 Äquivalenzrelationen, Äquivalenzklassen und Quotientenmengen

Eine besonders wichtige Relation ist die *Äquivalenzrelation* [*equivalence relation*], für die man oft das Symbol $x \sim y$ statt $(x, y) \in R$ verwendet. Ihre Bedeutung beruht darauf, dass sie eine Unterteilung einer Menge in Äquivalenzklassen [*equivalence classes*] ermöglicht. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet man auch als Quotientenmenge [*quotient set*].

Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation ist eine symmetrische, reflexive, transitive Relation. Es gelten also folgende Axiome:

$$x \sim x \quad (\text{reflexiv}) \quad (1.42)$$

$$(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x) \quad (\text{symmetrisch}) \quad (1.43)$$

$$(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z) \quad (\text{transitiv}). \quad (1.44)$$

Ein Beispiel bei den Verwandtschaftsbeziehungen wäre „ x ist verwandt mit y “ oder „ x ist Bruder oder Schwester von y “. Die erste Relation („ist verwandt mit“) ist schwierig zu handhaben, da nahezu jeder Mensch mit jedem verwandt ist und wir den Grad der Verwandtschaft nicht einschränken dürfen (andernfalls gilt die Transitivität nicht immer). Wir können aber definieren: $x \sim y$ bedeutet „ x hat denselben Familiennamen wie y “.

Ein etwas mathematischeres Beispiel wäre eine Äquivalenzrelation auf den Punkten (x, y) der Ebene, definiert durch: $(x_1, y_1) \sim_r (x_2, y_2)$ (oder $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$) sofern $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Zwei Punkte der Ebene sind also äquivalent, wenn sie denselben Abstand vom Ursprung haben. Die drei Axiome sind leicht überprüft. Alle Punkte auf einem Kreis um den Ursprung sind im angegebenen Sinne äquivalent.

Äquivalenzklassen

Die Bedeutung der Äquivalenzrelationen beruht darauf, dass wir eine Menge mit einer Äquivalenzrelation in disjunkte Teilmengen aufteilen können, die man als *Äquivalenzklassen* bezeichnet. Verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt (enthalten also keine gemeinsamen Elemente) und die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist die gesamte Menge selbst.

Man sagt, x gehört zur selben Äquivalenzklasse wie y , wenn $x \sim y$. Eine Äquivalenzklasse ist also definiert durch die Menge aller Elemente, die untereinander äquivalent sind. In den obigen Beispielen bilden die Geschwister einer Familie eine

Äquivalenzklasse, die Personen mit demselben Nachnamen bilden eine Äquivalenzklasse, oder auch die Punkte mit demselben Abstand vom Ursprung (die Punkte auf einem Kreis mit festem Radius) bilden eine Äquivalenzklasse.

Sei M die Menge mit der Äquivalenzrelation \sim und A_i seien die Äquivalenzklassen, dann gilt somit

$$M = \bigcup_i A_i \quad \text{mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j. \quad (1.45)$$

Die Äquivalenzklassen bilden also eine Partition der Menge M .

Für das oben angegebene Beispiel der Äquivalenzklassen von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf Kreisen mit gleichem Radius gilt:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_r K_r \quad \text{mit } K_r = \{(x, y) | x^2 + y^2 = r^2\}. \quad (1.46)$$

Hier ist der „Index“ zur Bezeichnung einer Äquivalenzklasse der Radius r , und innerhalb einer Äquivalenzklasse K_r liegen alle Punkte, die vom Ursprung denselben Abstand r haben.

Umgekehrt definiert eine Partition, also eine Unterteilung einer Menge in paarweise disjunkte Teilmengen, deren Vereinigung die gesamte Menge ergeben, eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen einfach zwei Elemente x und y als äquivalent, wenn sie zur selben Teilmenge gehören. Die Axiome der Äquivalenzrelation sind wiederum leicht gezeigt.

Quotientenmengen

Zu einer Menge M und einer Äquivalenzrelation \sim bezeichnet man die Menge der Äquivalenzklassen als *Quotientenmenge* M/\sim (man spricht auch von der „Menge M modulo der Äquivalenzrelation \sim “). In vielen Fällen wählt man aus jeder Äquivalenzklasse einen *Vertreter* [*representative*], allerdings sollte man die Äquivalenzklasse (als eine Menge) nicht mit ihren Vertretern verwechseln.

Für das obige Beispiel der Unterteilung der Ebene in Kreise erhalten wir:

$$\mathbb{R}^2/\sim_r \simeq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}. \quad (1.47)$$

Die Quotientenmenge besteht also aus der Menge der nicht-negativen reellen Zahlen, d.h. aus der Menge der möglichen Radien. Ich habe in obiger Gleichung das Symbol \simeq benutzt (und nicht $=$) um anzudeuten, dass die beiden Mengen äquivalent sind (es gibt zwischen ihnen eine bijektive Abbildung; darauf kommen wir im nächsten Abschnitt zu sprechen), dass es sich aber nicht unbedingt um dieselben Mengen handelt (links steht eine Quotientenmenge, rechts eine Teilmenge der reellen Zahlen). In vielen Fällen findet man an dieser Stelle aber auch ein Gleichheitszeichen.

Ein weiteres prominentes Beispiel für eine Quotientenmenge ergibt sich aus der Äquivalenzrelation „modulo“ auf der Menge der ganzen Zahlen. Seien x und y zwei ganze Zahlen, dann definieren wir eine Äquivalenzrelation „ $x \equiv y \pmod{N}$ “ durch die Vorschrift:

$$x \equiv y \pmod{N} \Leftrightarrow (x - y) \text{ ist durch } N \text{ ohne Rest teilbar.} \quad (1.48)$$

Man kann auch sagen, $x \equiv y \pmod{N}$, wenn x und y denselben Rest bei einer Division durch N haben. Sehr oft sagt man in diesem Fall „ x ist gleich (oder äquivalent zu) y modulo N “. Die Äquivalenzklassen sind Mengen von Zahlen, die bei einer Teilung durch N denselben Rest haben. Wir können diese Äquivalenzklassen auch durch diesen Rest kennzeichnen. Die Quotientenmenge (dafür schreibt man in diesem Fall meist $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, was man als „ \mathbb{Z} modulo N -fache Vielfache von ganzen Zahlen“ lesen kann) entspricht dann der Menge der Zahlen $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Das Element 0 steht eigentlich für die Menge aller ganzen Zahlen, die durch N teilbar sind. Entsprechend steht 1 für die Menge aller ganzen Zahlen, die bei einer Division durch N den Rest 1 ergeben, usw.

1.6 Abbildungen

Der Begriff „Funktion“ [*function*] wird oft synonym für „Abbildung“ [*mapping*] verwendet. In manchen Fällen schränkt man den Begriff der Funktion auch auf Abbildungen über den und/oder in die reellen bzw. komplexen Zahlen oder höherdimensionale Verallgemeinerungen ein.

Definition: Eine *Abbildung* f von einer Menge U (dem *Definitionsbereich* [*domain*] von f) in eine Menge V (der *Zielmenge* [*codomain*] von f) ordnet jedem Element $x \in U$ genau ein Element $y \in V$ zu. Man schreibt:

$$f : U \rightarrow V \quad x \mapsto f(x) = y. \quad (1.49)$$

Oft schreibt der Physiker für eine Funktion f auch einfach $f(x)$, wobei streng genommen jedoch zwischen der Abbildungsvorschrift f und dem Wert der Funktion $f(x)$ an einer bestimmten Stelle x zu unterscheiden ist.

Man unterscheidet meist die Zielmenge einer Funktion von der Bildmenge [*image set*] der Funktion. Die *Bildmenge* $B \subset V$ ist eine Teilmenge der Zielmenge, und sie besteht aus allen Elementen $y \in V$, für die es (mindestens) ein $x \in U$ gibt, sodass $y = f(x)$:

$$B = \{y \in V \mid \exists x \in U \text{ mit } y = f(x)\}.$$

Zu einer gegebenen Teilmenge $W \subset V$ der Zielmenge (oder auch Bildmenge) ist die *Urbildmenge* [*inverse image*] $f^{-1}(W)$ die Menge der Elemente in U , die auf W

abgebildet werden:

$$f^{-1}(W) = \{x \in U \mid f(x) \in W\}. \quad (1.50)$$

Beispiele von Funktionen sind die Potenzfunktionen, die auf den gesamten reellen Zahlen definiert sind ($n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = a \cdot x^n.$$

Weitere Beispiele sind die Exponentialfunktion und die Sinus- und Kosinusfunktionen (ebenfalls auf \mathbb{R} definiert):

$$f(x) = A \cdot e^{\lambda x} \quad g(x) = B \cdot \cos \omega x.$$

Rationale Funktionen (bei denen im Zähler und Nenner Polynome auftreten) sind oft an bestimmten Punkten (den Singularitäten) nicht definiert. Beispielsweise ist

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

am Punkt $x = 1$ nicht definiert. Man schreibt in diesem Fall auch, dass der Definitionsbereich von f die Menge $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist.

Wichtig für den Begriff der Abbildung (oder der Funktion) ist, dass zu jedem Punkt im Definitionsbereich sein Bild eindeutig definiert ist. Diese Vorschrift muss nicht durch eine Funktion im herkömmlichen Sinne (beispielsweise Sinus-, Potenz- oder Exponentialfunktion) gegeben sein. Beispiele für Funktionen über den reellen Zahlen sind:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Dirichlet-Funktion}) \quad (1.51)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Heaviside-Funktion}) \quad (1.52)$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{Vorzeichenfunktion}) \quad (1.53)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > L/2 \\ -V & |x| \leq L/2 \end{cases} \quad (\text{„Kastenpotential“}) \quad (1.54)$$

1.6.1 Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

Eine Abbildung (oder Funktion) $f : U \rightarrow V$ heißt *injektiv* [*injective*], wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$. Sie heißt *surjektiv* [*surjective*], wenn es zu jedem Element $y \in V$

auch tatsächlich ein Element $x \in U$ gibt, sodass $f(x) = y$. Sind beide Bedingungen erfüllt, heißt die Abbildung *bijektiv* [*bijjective*]. In etwas formalerer Schreibweise gilt:

$$f : U \rightarrow V \text{ injektiv} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in U : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (1.55)$$

$$f : U \rightarrow V \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \forall y \in V : \left(\exists x \in U : f(x) = y \right). \quad (1.56)$$

Abbildung 1.2 illustriert diese Begriffe an Diagrammen.

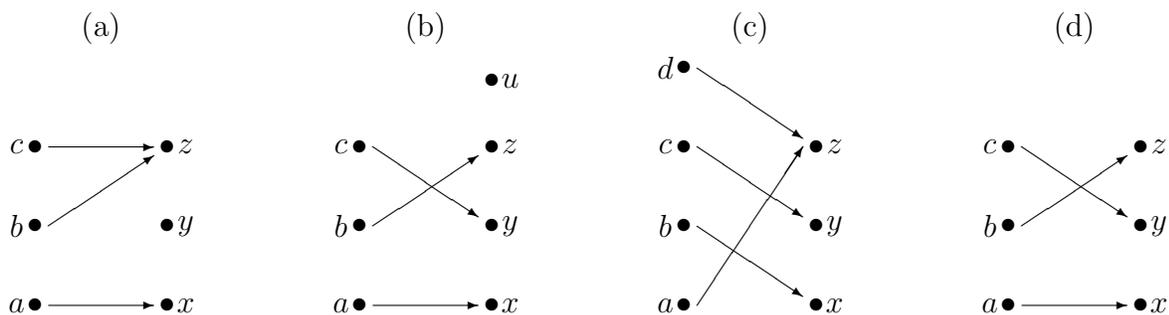


Abbildung 1.2: (a) Diese Abbildung ist weder injektiv noch surjektiv; die Elemente a und b werden auf dasselbe Element abgebildet und das Element y hat kein Urbild. (b) Diese Abbildung ist injektiv aber nicht surjektiv; das Element u hat kein Urbild. (c) Diese Abbildung ist surjektiv aber nicht injektiv, da a und d auf dasselbe Element abgebildet werden. (d) Diese Abbildung ist bijektiv.

Zu einer bijektiven Abbildung $f : U \rightarrow V$ existiert die Umkehrabbildung [*inverse mapping*] $f^{-1} : V \rightarrow U$, sodass

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y. \quad (1.57)$$

(Achtung: f^{-1} ist natürlich nicht dasselbe wie $1/f$, also die Funktion, die jedem x den Kehrwert $1/f(x)$ zuordnet.)

Ist eine Abbildung injektiv (aber nicht surjektiv), kann man die Umkehrabbildung auf der Bildmenge von f definieren. Ist eine Abbildung nicht injektiv, muss man zur Definition der Umkehrabbildung die Urbildmenge derart einschränken, dass es zu jedem Bildelement $y \in V$ nur genau ein Urbildelement $x \in U$ mit $f(x) = y$ gibt. Ein Beispiel ist die Wurzelabbildung (innerhalb der Menge der reellen Zahlen), die Umkehrabbildung zur Quadratfunktion:

$$f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = +\sqrt{x}.$$

Der Definitionsbereich von f^{-1} muss auf das Bild von f eingeschränkt werden (die nicht negativen reellen Zahlen), und man muss zu jedem Element $x \in \mathbb{R}^+$ ein Urbild auswählen (z.B. das mit positivem Vorzeichen).

Etwas vereinfacht ausgedrückt erhält man die Umkehrabbildung zu einer Funktion $f(x)$, indem man die Gleichung

$$y = f(x)$$

nach x auflöst zu

$$x = f^{-1}(y).$$

Beispiele:

$$y = \frac{1+x}{1-x} \implies y(1-x) = 1+x \quad \text{oder} \quad x = \frac{y-1}{y+1}.$$

Also ist:

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{und} \quad f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1}.$$

1.6.2 Graphische Darstellung

Der *Graph* [*graph*] $\mathcal{G}(f)$ einer Abbildung $f : U \rightarrow V$ besteht aus der Menge aller Punktepaare $(x, y) \in U \times V$ mit der Eigenschaft, dass y ein Bildpunkt von f ist:

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) | x \in U\}.$$

Meist trägt man die Punkte in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit den Achsen für $x \in U$ (horizontal) und $y \in V$ (vertikal) auf.

Die graphische Darstellung der Umkehrfunktion erhalten wir, indem wir den Graph an der $y = x$ -Achse (der Diagonalen) spiegeln, bzw. die Rollen von x - und y -Achse vertauschen. Nach der Definition der Umkehrfunktion gilt nämlich

$$\mathcal{G}(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)) | y \in V\}.$$

Dies ist aber eine Punktmenge in $V \times U$, die man einfach aus der Punktmenge des Graphen zu f in $U \times V$ durch Vertauschen der beiden Argumente erhält. Es werden also lediglich die Rollen der beiden Achsen vertauscht.

1.6.3 Abbildungen als spezielle Relationen

Das Konzept des Graphen einer Funktion verdeutlicht, dass es sich bei Funktionen um spezielle Relationen handelt. Während allgemein eine Relation (zwischen einer Menge U und einer Menge V) eine Teilmenge von $U \times V$ ist, handelt es sich bei Funktionen um Relationen mit bestimmten einschränkenden Bedingungen:

Eine Relation $R \subset U \times V$ bezeichnet man als Abbildung $f : U \rightarrow V$, wenn R *linksvollständig* [*left complete*] und *rechtseindeutig* [*right unique*] ist. Eine Relation heißt dabei *linksvollständig*, wenn es zu *jedem* Element $x \in U$ mindestens ein $y \in V$ gibt, sodass $(x, y) \in R$. Jedes Element x aus U tritt also mindestens einmal bei der

Relation auf. Eine Relation heißt *rechtseindeutig*, wenn für alle $x \in U$ und alle $y \in V$ und $z \in V$ gilt:

$$(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \Rightarrow y = z. \quad (1.58)$$

Mit anderen Worten, das Element in V , welches dem Element $x \in U$ zugeordnet wird (bzw. mit x in Relation steht) ist eindeutig.

Ein surjektive Abbildung ist zusätzlich rechtsvollständig, eine injektive Abbildung ist linkseindeutig.

1.6.4 Hintereinanderschaltung von Abbildungen

Liegt der Definitionsbereich V' einer Abbildung $g : V' \rightarrow W$ innerhalb der Bildmenge V einer Abbildung $f : U \rightarrow V$, gilt also $V' \subseteq V$, können wir die beiden Abbildungen auch hintereinanderschalten. Dadurch erhalten wir eine Abbildung $g \circ f : U \rightarrow W$, die ein Element $x \in U$ auf das Element $g(f(x))$ abbildet. Man beachte, dass eine solche Hintereinanderschaltung $g \circ f$ nach Konvention von rechts nach links gelesen wird: zunächst wird die Abbildung f angewendet, anschließend die Abbildung g .

Beispielsweise kann man die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 \quad (1.59)$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(-x) \quad (1.60)$$

hintereinanderschalten und erhält:

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(-x^2). \quad (1.61)$$

1.6.5 Folgen und nochmals Potenzmengen

Wir betrachten zwei besondere Abbildungen. Die erste Abbildung erlaubt die Definition von Folgen, die zweite ist eine Ergänzung zur Potenzmenge.

Definition: Eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} in eine Menge M bezeichnet man als Folge [sequence] von Elementen aus M .

Meist wählt man in diesem Fall die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0. Eine Folge ist somit eine Liste von Elementen aus M , die durch die natürlichen Zahlen durchnummeriert wird:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \dots = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}. \quad (1.62)$$

Der Begriff der Folge lässt sich auch verallgemeinern, indem man die Menge der natürlichen Zahlen durch eine beliebige Indexmenge I ersetzt. Man schreibt in diesem Fall $\{x_i\}_{i \in I}$.³

Abschließend soll noch die Notation 2^M für die Potenzmenge einer Menge M begründet werden:

Satz: Eine Teilmenge $A \subseteq M$ lässt sich eindeutig durch eine Abbildung $\chi_A : M \rightarrow \{0, 1\}$ beschreiben.

Eine Teilmenge A einer Menge M ist dadurch definiert, dass wir angeben, welche Elemente aus M in A liegen und welche nicht. Definieren wir nun unsere Abbildung $\chi_A : M \rightarrow \{0, 1\}$ durch die Vorschrift: $\chi_A(x) = 0$, falls $x \notin A$ und $\chi_A(x) = 1$ falls $x \in A$, so erkennt man, dass diese Abbildung χ_A die Teilmenge A eindeutig beschreibt. Umgekehrt definiert nach dieser Vorschrift auch jede beliebige Abbildung von M in $\{0, 1\}$ eindeutig eine Teilmenge von M . Die Abbildung χ_A bezeichnet man als die *charakteristische Abbildung* [*characteristic mapping*] zu der Teilmenge A .

Da es offensichtlich eine eineindeutige Beziehung zwischen der Menge der Abbildungen $\chi_A : M \rightarrow \{0, 1\}$ und der Menge der Teilmengen von M (also der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$) gibt, können wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ auch mit der Menge solcher Abbildungen identifizieren. Da die Bildmenge zwei Elemente hat, erklärt dies die manchmal verwendete Notation 2^M für die Potenzmenge von M .

Sei allgemeiner V eine (endliche) Menge mit $v = |V|$ Elementen, dann gibt es $v^{|M|}$ Abbildungen von M in die Menge V .

1.7 Die Mächtigkeit von Mengen

Bei endlichen Mengen [*finite sets*] ist es leicht, ein Maß für ihre Größe anzugeben: die Anzahl der Elemente in dieser Menge. Die *Mächtigkeit* [*cardinality*] einer endlichen Menge M , oft durch $|M|$ gekennzeichnet, ist somit gleich der Anzahl der Elemente in dieser Menge: $|M| = n$ (falls M genau n Elemente hat).

Manchmal muss man jedoch gar nicht wissen, wie viele Elemente eine Menge hat, sondern möchte lediglich zwei Mengen vergleichen. Möchte man beispielsweise wissen, ob es mehr Stühle in einem Zimmer gibt als Personen, muss man beide Mengen nicht abzählen. Man bittet lediglich jede Person, sich auf einen Stuhl zu setzen

³Eine Anmerkung zur Notation: In vielen Mathematikbüchern findet man auch die Schreibweise $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, also runde Klammern. Man möchte damit andeuten, dass bei einer Folge die Elemente geordnet sind. Ich verwende die geschweiften Klammern, da es weniger um die Reihenfolge des Aufschreibens geht als dass deutlich ist, welches Element aus M das Bild von $i = 1$ ist, welches das Bild von $i = 2$, etc. Letztendlich spielt die Notation hier aber keine Rolle.

(und natürlich dürfen keine zwei Personen auf demselben Stuhl sitzen). Wenn es zum Schluss weder Personen ohne einen Stuhl noch leere Stühle gibt, hatten die beiden Mengen offensichtlich gleich viele Elemente. Die mathematische Formulierung dieser Beobachtung ist: Wenn es eine bijektive Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen gibt, haben die beiden Mengen dieselbe Anzahl an Elementen.

Bei unendlichen Mengen kann man die Anzahl ihrer Elemente nicht mehr durch eine natürliche Zahl ausdrücken. Daher ist es bei unendlichen Mengen schwieriger, ein Maß für die Anzahl der Elemente in dieser Menge zu finden. Enthalten die natürlichen Zahlen mehr Elemente als die Menge der geraden natürlichen Zahlen oder die Menge der Primzahlen? Es lassen sich jedoch auch unendliche Mengen vergleichen. Auf Georg Cantor geht die folgende Definition zurück:

Definition: Zwei Mengen A und B heißen gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt.

Die folgenden Abschnitte zeigen einige Konsequenzen dieser Definition.

1.7.1 Abzählbar unendliche Mengen

Die einfachste unendliche Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

Definition: Eine Menge A heißt abzählbar unendlich [countably infinite], wenn es eine bijektive Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} in die Menge A gibt.

Mit dieser Definition hat die Menge der nicht negativen geraden Zahlen (manchmal schreibt man dafür $2\mathbb{N}$)⁴ dieselbe Mächtigkeit, wie die Menge der natürlichen Zahlen und ist somit abzählbar unendlich. Als bijektive Abbildung können wir $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ mit $f(n) = 2n$ wählen. Auch die Menge der Primzahlen ist abzählbar unendlich. Diese Aussage gilt für jede beliebige, nicht endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen. Bei einer abzählbar unendlichen Menge können wir die Elemente durchnummerieren, d.h., wir können A in der Form

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}. \quad (1.63)$$

schreiben.

⁴Diese Notation ist eigentlich gebräuchlicher für die ganzen Zahlen. Allgemein ist $k\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen, die Vielfache von k sind.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	\dots
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	(a_1, b_4)	(a_1, b_5)	\dots
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	(a_2, b_4)	\dots	
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	\dots		
a_4	(a_4, b_1)	(a_4, b_2)	\dots			
a_5	(a_5, b_1)	\dots				
\vdots	\vdots					

Abbildung 1.3: Zum Beweis, dass das kartesische Produkt zweier abzählbar unendlicher Mengen wieder abzählbar unendlich ist.

Satz: Seien A und B abzählbar unendliche Mengen, dann ist auch $A \cup B$ abzählbar unendlich.

Zum Beweis betrachten wir die durchnummerierten Elemente der Mengen A und B :

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\} \quad (1.64)$$

und wählen für $A \cup B$ die Elemente abwechselnd:

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots\} \quad (1.65)$$

Dieses Argument zeigt, dass z.B. die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} ebenfalls abzählbar unendlich ist.

Satz: Seien A und B abzählbar unendliche Mengen, dann ist auch $A \times B$ abzählbar unendlich.

Zum Beweis schreiben wir $A \times B$ in Form einer Tabelle (vgl. Abb. 1.3). Nun beginnen wir oben links und nummerieren die Elemente immer entlang der Diagonalen von links-unten nach rechts-oben:

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3), \dots\} \quad (1.66)$$

Das Element (a_n, b_m) steht in der $n+m-1$. Diagonalen und innerhalb einer Diagonalen werden die Elemente in der Reihenfolge des zweiten Eintrags b_m aufgelistet. Auf diese

Weise erhält man eine bijektive Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der Paare des kartesischen Produkts.

Da sich jede rationale Zahl als Quotient einer ganzen Zahl dividiert durch eine natürliche Zahl (ungleich 0) schreiben lässt, ist auch die Menge der rationalen Zahlen abzählbar unendlich. Manche Zahlenpaare gehören zu gleichen rationalen Zahlen (wir können eine Äquivalenzrelation definieren und zwei Zahlenpaare (m_1, n_1) und (m_2, n_2) mit $n_i \neq 0$ als äquivalent definieren, wenn $m_1/n_1 = m_2/n_2$). Diese würde man in der Liste nur einmal auftreten lassen. Da jede unendliche Teilmenge einer abzählbar unendlichen Menge wieder abzählbar unendlich ist, sind auch die rationalen Zahlen abzählbar unendlich.

Das Ergebnis ist zunächst überraschend, denn die rationalen Zahlen liegen *dicht* auf der Zahlengeraden, d.h., zwischen je zwei rationalen Zahlen liegen (unendlich viele) weitere rationale Zahlen. Außerdem lassen sich die rationalen Zahlen nicht entsprechend ihrer Größe anordnen (es gibt keine kleinste positive rationale Zahl). Für die Existenz einer bijektiven Abbildung ist das aber auch nicht notwendig.

1.7.2 Reelle Zahlen – überabzählbar unendlich

Georg Cantor konnte auch beweisen, dass die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar unendlich ist. Der Beweis ist nicht nur ein schönes Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch, sondern sein „Diagonalisierungsargument“ diente gleichzeitig als Vorlage für sehr viele weitere Beweise in der Mathematik.

Wir werden die Menge der reellen Zahlen axiomatisch erst in Kapitel 4 einführen. Hier betrachten wir nur die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (wenn wir für diese schon gezeigt haben, dass sie nicht mehr abzählbar sind, gilt das natürlich auch für die Menge aller reellen Zahlen) und identifizieren diese einfach mit der Menge aller möglichen Dezimalentwicklungen, also mit Folgen von Ziffern 0,1, ...,9. Jede (eventuell unendliche oder auch nicht periodisch werdende) Folge der Form

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots \quad (1.67)$$

mit $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ beschreibt somit eine reelle Zahl. Ausschließen müssen wir allerdings Folgen, die ab einer bestimmten Stelle nur noch aus der Ziffer 9 bestehen (es gilt $0,99999\dots = 1,0$). Dies ist ein technisches Detail, das den eigentlichen Beweis zwar etwas schwieriger macht, am Ergebnis aber nichts ändert. Daher lassen wir es im Folgenden unberücksichtigt.

Satz: Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen besitzt eine größere Mächtigkeit als die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen.

Wie schon erwähnt beschränken wir uns auf das Intervall $[0, 1]$ und führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, es gäbe eine bijektive Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Das würde bedeuten, wir könnten die reellen Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge anordnen:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots \\
 (2) & 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots \\
 (3) & 0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots \\
 (4) & 0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots \\
 (5) & 0, e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 \dots \\
 (6) & 0, f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 \dots \\
 & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{array} \tag{1.68}$$

Wir können nun eine Zahl

$$0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots \tag{1.69}$$

konstruieren, die mit Sicherheit nicht in dieser Liste auftaucht. Diese Zahl hat an der ersten Stelle eine Ziffer, die von a_1 verschieden ist (beispielsweise $x_1 = a_1 + 1 \pmod{10}$, also für $a_1 = 9$ wählen wir für die neue Zahl $x_1 = 0$). x_2 soll von b_2 verschieden sein, entsprechend x_3 von c_3 und so weiter. Wir wählen also die Elemente entlang der Diagonalen und ändern sie ab. Diese so konstruierte Zahl kann nirgendwo in der Liste auftauchen, da sie sich an mindestens einer Stelle von jeder Zahl in der Liste unterscheidet. Es handelt sich aber um eine wohl definierte reelle Zahl. Also haben wir eine reelle Zahl gefunden, die nicht in der bisherigen Aufzählung war.

Wie man sich leicht überlegen kann, gilt dies für jede beliebige Liste reeller Zahlen. Es nutzt also nichts, die neue Zahl irgendwo in die vorhandene Liste einzufügen. Nach dem Cantor'schen Diagonalisierungsargument können wir dann eine neue reelle Zahl konstruieren, die nicht in der Liste ist.

Die Annahme, es gäbe eine vollständige Liste der reellen Zahlen, führt also auf einen Widerspruch. Damit muss die ursprüngliche Annahme (dass die reellen Zahlen sich in einer solchen Liste anordnen lassen) falsch sein. Es gibt also keine bijektive Abbildung zwischen der Menge der reellen Zahlen und der Menge der natürlichen Zahlen. Da die Menge der reellen Zahlen die natürlichen Zahlen als Teilmenge enthält, muss sie von einer *größeren Mächtigkeit* sein als die Menge der natürlichen Zahlen. Man bezeichnet die Mächtigkeit von \mathbb{R} (sowie alle höheren Mächtigkeiten, siehe nächsten Abschnitt) als *überabzählbar (unendlich) [uncountably infinite]*.

Man kann leicht zeigen, dass die Menge der reellen Zahlen bijektiv zur Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist, sodass die Potenzmenge von \mathbb{N} überabzählbar ist.

Dazu stellt man die reellen Zahlen (wiederum zwischen 0 und 1) als binäre Zahlenfolgen dar:

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots \quad a_i \in \{0, 1\}. \quad (1.70)$$

Jede reelle Zahl ist in dieser Form darstellbar. Die Folge $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ beschreibt aber eine Abbildung von \mathbb{N} in die Menge $\{0, 1\}$ und legt somit eindeutig eine Teilmenge der natürlichen Zahlen fest. Umgekehrt entspricht jeder Teilmenge der natürlichen Zahlen in diesem Sinne eine reelle Zahl. Also sind die reellen Zahlen gleichmächtig wie die Potenzmenge von \mathbb{N} .

1.7.3 *Die Kontinuumshypothese und ein unendlicher Turm von Mächtigkeiten

Georg Cantor stellte die Vermutung auf, dass es zwischen der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen (die er mit \aleph_0 – gelesen „aleph null“ – bezeichnete) und der Mächtigkeit der reellen Zahlen (also der Potenzmenge der natürlichen Zahlen) keine weitere Mächtigkeit gibt. Das bedeutet, die reellen Zahlen enthalten keine Teilmenge, die mächtiger ist als die Menge der natürlichen Zahlen, aber nicht so mächtig ist wie die Menge der reellen Zahlen selbst. Diese Vermutung bezeichnet man als *Kontinuumshypothese* oder *Kontinuumsvermutung* [*continuum hypothesis*].

Mittlerweile konnte bewiesen werden, dass die Kontinuumshypothese innerhalb des Axiomensystems von Zermelo-Fraenkel nicht entscheidbar ist, also zu den „berückichtigten“ Aussagen gehört, von denen Kurt Gödel (1906–1978) 1931 gezeigt hat, dass es sie in jedem widerspruchsfreien Axiomensystem, das die natürlichen Zahlen beschreiben kann, geben muss [7]. Gödel selbst hatte 1938 bewiesen, dass die Kontinuumshypothese im Zermelo-Frenkel-Axiomensystem nicht widerlegbar ist [8], und Paul Cohen (1934–2007) konnte 1960 beweisen, dass die Kontinuumshypothese im Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem auch nicht beweisbar ist [3].

Setzen wir die Kontinuumshypothese voraus, so ist die Mächtigkeit der reellen Zahlen \aleph_1 und es gilt

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}. \quad (1.71)$$

Mit einem ähnlichen Argument wie das Diagonalisierungsargument konnte Cantor auch beweisen, dass die Mächtigkeit der Potenzmenge einer beliebigen Menge M immer größer ist, als die Mächtigkeit der Menge M selbst. Das bedeutet, die Potenzmenge der reellen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ hat eine größere Mächtigkeit als die reellen Zahlen selbst, und die Potenzmenge dieser Menge hat ebenfalls wieder eine größere Mächtigkeit. Das führt auf einen unendlichen Turm von Mächtigkeiten und nach der verallgemeinerten Kontinuumshypothese sollte immer gelten:

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}. \quad (1.72)$$

Kapitel 2

Elementare Algebra

Die Algebra, und speziell die lineare Algebra, sind eigentlich Gegenstand einer anderen Vorlesung. Wir werden jedoch gelegentlich algebraische Begriffe und Strukturen verwenden, dazu zählen die Strukturen der Gruppe, des Körpers und insbesondere die des Vektorraums. Daher dient dieses Kapitel als elementare Einführung in diese Konzepte. Meist werden die Sätze nicht bewiesen, sondern auf die Vorlesung zur linearen Algebra verwiesen.

2.1 Gruppen

Definition: Eine Gruppe [group] ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Assoziativität [associativity]: Für je drei Elemente $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt:

$$g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1. \quad (2.1)$$

2. Existenz eines neutralen Elements [neutral element]: Es gibt ein Element $e \in G$, sodass für alle Elemente $g \in G$ gilt:

$$g \circ e = e \circ g = g. \quad (2.2)$$

Manchmal bezeichnet man das neutrale Element auch als „Identität“ [identity element] oder auch als „Eins-Element“.

3. Existenz eines inversen Elements [inverse element]: Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein Element g^{-1} , sodass

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e. \quad (2.3)$$

Anmerkungen:

1. In manchen Lehrbüchern findet man noch zusätzlich das Axiom, dass für je zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ die Verknüpfung $g_2 \circ g_1$ ebenfalls wieder in G liegen soll. Unsere Definition der Verknüpfung als Abbildung $\circ : G \times G \rightarrow G$ enthält diese Forderung.
2. Axiom 2 und 3 sind schöne Beispiele für die Bedeutung der Reihenfolge von Quantoren (vgl. Seite 18). In formaler Schreibweise lauten sie:

$$2. \quad \exists e \in G \quad \forall g \in G : g \circ e = e \circ g = g \quad (2.4)$$

$$3. \quad \forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e. \quad (2.5)$$

3. Gilt neben den genannten Axiomen noch für zwei beliebige Elemente $g_1, g_2 \in G$ die *Kommutativität* [*commutativity*],

$$g_2 \circ g_1 = g_1 \circ g_2, \quad (2.6)$$

so spricht man von einer *kommutativen Gruppe* oder auch *abelschen Gruppe* [*abelian group*]. Bei kommutativen Gruppen schreibt man für die Verknüpfung oft $+$ und das neutrale Element wird mit 0 bezeichnet.

4. Für Gruppen lassen sich sehr viele Beziehungen beweisen. Als Beispiel sei nur die Eindeutigkeit des neutralen Elements e genannt. Angenommen, ein zweites Element e' erfülle ebenfalls Axiom 2, dann folgt:

$$e' \circ e = e' \quad \text{und} \quad e' \circ e = e, \quad (2.7)$$

daraus folgt aber $e = e'$. In ähnlicher Weise lässt sich auch beweisen, dass das inverse Element zu einem Element g eindeutig ist.

5. Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} bildet eine Gruppe unter der Addition, wenn wir das zu $n \in \mathbb{Z}$ inverse Element mit $(-n)$ bezeichnen. Die Subtraktion ist also keine gesonderte Verknüpfung sondern bezeichnet die Addition mit dem inversen Element.

Die natürlichen Zahlen (selbst unter Einbeziehung der 0) bilden keine Gruppe unter der gewöhnlichen Addition, da die inversen Elemente nicht in \mathbb{N} enthalten sind. Man kann die ganzen Zahlen als die Erweiterung der natürlichen Zahlen um die zur Addition inversen Elemente auffassen.

Die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen jeweils ohne das Element 0 bilden eine Gruppe unter der Multiplikation, wobei das inverse Element zu einer Zahl x mit $x^{-1} = \frac{1}{x}$ bezeichnet wird. Wiederum ist die Division keine eigenständige Verknüpfung sondern bezeichnet die Multiplikation mit einem inversen Element.

6. Eine weitere wichtige Gruppe ist die Gruppe der *Permutationen* [*permutations*] auf einer (meist endlichen) Menge. Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge in sich selbst. Denkt man sich die Elemente in einer Reihe geordnet, so verändert eine Permutation nur die Reihenfolge der Elemente. Das Einselement ist die Permutation, die alle Elemente an ihrer Stelle belässt. Das inverse Element zu einer Permutation macht die Permutation rückgängig.

Eine Teilmenge $H \subset G$ heißt *Untergruppe* [*subgroup*] von G , wenn zu jedem $g \in H$ auch $g^{-1} \in H$ und für alle $g_1, g_2 \in H$ auch $g_2 \circ g_1 \in H$ gilt.

Eine Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ von einer Gruppe G_1 in eine Gruppe G_2 heißt *Gruppenhomomorphismus* [*group homomorphism*], wenn $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ und für alle $g, g' \in G_1$ gilt: $f(g') \circ f(g) = f(g' \circ g)$. Man kann damit sofort zeigen, dass $f(e_1) = e_2$ (wobei e_1 und e_2 die jeweiligen Einselemente in G_1 und G_2 sind). Handelt es sich bei f um eine bijektive Abbildung, bezeichnet man f als *Gruppenisomorphismus* [*group isomorphism*] und die Gruppen G_1 und G_2 heißen *isomorph* [*isomorphic*].

Ganz allgemein spricht man von einem Homomorphismus, wenn eine Abbildung die wesentlichen Strukturen auf einer Menge invariant lässt. Man bezeichnet zwei Mengen mit einer gleichen Struktur als isomorph, wenn es eine bijektive strukturerhaltende Abbildung zwischen ihnen gibt. Natürlich muss man immer angeben, um welche Strukturen es sich jeweils handelt.

2.2 Körper

Die rationalen Zahlen, reellen Zahlen und komplexen Zahlen sind Beispiele für einen *Körper* [*field*]. (Manchmal spricht man auch konkreter von einem *Zahlenkörper* [*number field*].) Grob gesagt kann man in einem Körper Elemente addieren und multiplizieren und man kann insbesondere Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ nach x auflösen (sofern $a \neq 0$).

Definition: Ein Körper ist eine Menge \mathbb{K} zusammen mit zwei Verknüpfungen $+$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ (Addition) und \cdot : $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{K}^*$ (Multiplikation; wobei $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, also die Menge \mathbb{K} ohne das neutrale Element zur Addition), sodass \mathbb{K} eine abelsche Gruppe bezüglich der Verknüpfung $+$ und \mathbb{K}^* eine abelsche Gruppe bezüglich der Verknüpfung \cdot sind. Außerdem sollen folgende Beziehungen gelten:

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \quad \text{für alle } x \text{ in } \mathbb{K} \quad (2.8)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{für alle } x, y, z \text{ in } \mathbb{K}. \quad (2.9)$$

Das Eins-Element zur Multiplikation wird mit 1 bezeichnet. Es soll $0 \neq 1$ gelten.

Das zweite Gesetz (Gl. 2.9) heißt *Distributivgesetz*. Es verbindet die Addition und die Multiplikation.

Beispiele:

1. Wie schon erwähnt, sind die rationalen Zahlen \mathbb{Q} , die reellen Zahlen \mathbb{R} und die komplexen Zahlen \mathbb{C} Körper. Die ganzen Zahlen sind kein Körper, da es zur Multiplikation im Allgemeinen keine inversen Elemente gibt. Die rationalen Zahlen kann man formal als die Erweiterung der ganzen Zahlen um die inversen Elemente zur Multiplikation definieren. „Erweiterung“ bedeutet hierbei nicht nur die Hinzunahme der inversen Elemente sondern auch die Hinzunahme aller Elemente, die man durch Verknüpfungen mit inversen Elementen erhält.
2. Ist p eine Primzahl, so bilden die Zahlen $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ einen Körper, wenn man die Addition und die Multiplikation jeweils modulo p betrachtet. Man beachte, dass das inverse Element zu einer Zahl in \mathbb{Z}_p tatsächlich wieder in dieser Menge liegt und ein ganz anderes Element bezeichnet, als beispielsweise das inverse Element zu dieser Zahl in \mathbb{Q} . Sei beispielsweise $p = 5$, so gilt $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1$ modulo 5, und somit ist 2 das inverse Element zu 3 und umgekehrt. Und da $4 \cdot 4 = 16 \equiv 1$ modulo 5, ist 4 sein eigenes inverses Element.
3. Speziell für $p = 2$ bildet die Menge $F_2 = \{0, 1\}$ einen Körper bezüglich der Addition und Multiplikation modulo 2, d.h. es gilt:

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0 \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1. \quad (2.10)$$

Viele Sätze zu mathematischen Strukturen, die mit einem Körper zusammenhängen, gelten nicht, wenn der beteiligte Körper F_2 ist, sodass man diesen Fall oft explizit ausschließt. Der Grund ist folgender: Aus der Gleichung $x = -x$ folgt $2x = 0$. In allen Körpern außer F_2 kann man daraus $x = 0$ folgern. In F_2 gilt aber $2 \equiv 0 \pmod{2}$ und somit gilt in F_2 die Gleichung $x = -x$ für alle x (insbesondere auch für $x = 1$).

4. Die Menge aller Zahlen der Form $a + \sqrt{2}b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ bildet einen Körper bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation. Beispielsweise ist

$$(a + \sqrt{2}b)^{-1} = \frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \sqrt{2} \frac{-b}{a^2 - 2b^2}, \quad (2.11)$$

was wieder die angegebene Form hat. Außerdem sieht man, dass lediglich 0 kein inverses Element besitzt, denn es gibt keine rationalen Zahlen a und b , sodass $a^2 = 2b^2$ (sonst wäre $\sqrt{2}$ rational). Statt $\sqrt{2}$ kann man beispielsweise auch jede andere Quadratwurzel einer Nicht-Quadratzahl nehmen.

5. Wir werden in Kapitel 4.1 die reellen Zahlen noch genauer behandeln. Sie sind unter den vielen Körpern dadurch ausgezeichnet, dass sie die natürlichen Zahlen

enthalten (was die Beispiele 2 und 3 ausschließt), vollständig sind (alle Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen sind wieder reelle Zahlen; das schließt die rationalen Zahlen sowie Beispiel 4 aus) und eine natürliche Ordnungsrelation besitzen (das schließt die komplexen Zahlen aus).

2.3 Vektorräume

Definition: Ein Vektorraum [vector space] über einem Körper \mathbb{K} ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen, $+$: $V \times V \rightarrow V$ und \cdot : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. V ist bezüglich $+$ eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element bezeichnen wir mit 0 , das zu einem Element $\mathbf{x} \in V$ inverse Element mit $-\mathbf{x}$.
2. Es gelten die folgenden vier Beziehungen:

$$\text{für alle } a, b \in \mathbb{K} \text{ und } \mathbf{x} \in V \quad a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x} \quad (2.12)$$

$$\text{für alle } a \in \mathbb{K} \text{ und } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{y} \quad (2.13)$$

$$\text{für alle } a, b \in \mathbb{K} \text{ und } \mathbf{x} \in V \quad (a + b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x} \quad (2.14)$$

$$\text{für alle } \mathbf{x} \in V \quad 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (2.15)$$

Die Elemente eines Vektorraums bezeichnet man als Vektoren.

Anmerkungen:

1. Die zweite Beziehung (Gl. 2.13) bezeichnet man wieder als *Distributivgesetz* [distributive law]. Diesmal verbindet dieses Gesetz jedoch die Addition innerhalb von V mit der Multiplikation mit Körperelementen.
2. Der Punkt \cdot bei der Multiplikation von Elementen des Körpers mit Elementen des Vektorraums wird meist weggelassen und man schreibt statt $a \cdot \mathbf{x}$ einfach $a\mathbf{x}$. Manchmal, insbesondere bei Vektoren im \mathbb{R}^3 , betone ich die Vektoreigenschaft durch den „Vektorpfeil“ \vec{x} , meist werde ich diesen Vektorpfeil aber nicht verwenden; der Zusammenhang sollte deutlich machen, wann es sich bei einem Objekt um einen Vektor handelt. In diesem Kapitel kennzeichne ich Vektoren meist durch die dickere boldface-Schreibweise.
3. Jeder Körper ist gleichzeitig auch ein Vektorraum über sich selbst, wobei die Abbildung $+$ die Addition innerhalb des Körpers ist.

4. Die bekanntesten Beispiele für Vektorräume sind n -Tupel von Körperelementen: $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$, wobei die Addition von Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einem Element des Körpers komponentenweise definiert sind:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (2.16)$$

$$a \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \quad (a \in \mathbb{K}). \quad (2.17)$$

Definitionen: Ein Satz von Vektoren $\{\mathbf{x}_i\}$, ($\mathbf{x}_i \in V$, $\mathbf{x}_i \neq 0$ – insbesondere bezeichnet der Index hier nicht die Komponenten des Vektors sondern verschiedene Vektoren) heißt linear unabhängig [*linearly independent*], wenn aus der Bedingung

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_n\mathbf{x}_n \equiv \sum_i a_i\mathbf{x}_i = 0 \quad (2.18)$$

folgt, dass $a_i = 0$ für alle i . Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig [*linearly dependent*] und es gibt (mindestens) einen Vektor, der sich als Linearkombination [*linear combination*] der anderen Vektoren darstellen lässt. Die maximale Anzahl von linear unabhängigen, nicht verschwindenden Vektoren, die sich in einem Vektorraum finden lässt, bezeichnet man als die Dimension [*dimension*] des Vektorraums. Eine Basis [*basis*] ist ein solcher maximaler Satz von linear unabhängigen Vektoren; die Elemente der Basis bezeichnet man als Basisvektoren [*basis vectors*].

Jeder Vektor lässt sich eindeutig als Linearkombination solcher Basisvektoren darstellen.

2.3.1 Skalarprodukt und Norm

Aus den bisherigen Axiomen ergibt sich noch keine Möglichkeit, Winkel zwischen Vektoren zu bestimmen oder Längen von Vektoren. Dazu definiert man gewöhnlich ein sogenanntes Skalarprodukt [*scalar product*]. Im Folgenden betrachten wir nur Vektorräume über den reellen oder komplexen Zahlen.

Ein Skalarprodukt g auf einem Vektorraum V mit Körper \mathbb{R} ist ein positives [*positive*], *nicht entartetes* [*non-degenerate*], *symmetrisches* [*symmetric*], *bilineares* [*bilinear*] *Produkt:*

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto g(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.19)$$

Dabei bedeutet:

$$\text{positiv} : g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad (2.20)$$

$$\text{nicht entartet} : g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

$$\text{symmetrisch} : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (2.22)$$

$$\text{bilinear} : g(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (2.23)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V.$$

Wegen der Symmetrie folgt aus der Linearität im zweiten Argument auch die Linearität im ersten Argument (daher „bilinear“):

$$g(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta g(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V. \quad (2.24)$$

Manchmal bezeichnet man das Skalarprodukt auch als *inneres Produkt* [*inner product*].

Anmerkung: Ohne die Eigenschaft der Positivität spricht man auch von einer *symmetrischen Bilinearform*. Allgemein bezeichnet man eine symmetrische Bilinearform als *nicht entartet*, wenn gilt:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Die oben angegebene Definition impliziert, dass ein Skalarprodukt nie entartet ist.

In der linearen Algebra untersucht man allgemeine Skalarprodukte. Im Folgenden verwenden wir für den Vektorraum der n -Tupel von Körperelementen meist das *kartesische Skalarprodukt* [*cartesian scalar product*]:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_i x_i y_i. \quad (2.26)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dieses Produkt alle angegebenen Eigenschaften erfüllt. Das kartesische Skalarprodukt wird meist durch den Punkt \cdot gekennzeichnet. In diesem Fall wird der Punkt immer explizit geschrieben.

Handelt es sich bei dem Körper um den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen, definiert man $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i x_i^* y_i$, wobei x_i^* das komplex konjugierte Element zu x_i ist. Man spricht dann von einem *hermiteschen* [*hermitian*] oder *unitären* [*unitary*] Skalarprodukt. (Manchmal spricht man auch von einem sesquilinearen inneren Produkt.) Hierbei ändern sich lediglich die letzten beiden Bedingungen: Statt „symmetrisch“ fordert man nun *hermitesch* [*hermitian*], d.h.: $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x})^*$, und das Skalarprodukt ist linear im zweiten Argument aber anti-linear im ersten (d.h., es gilt $g(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha^* g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta^* g(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$).¹ Man beachte, dass auch bei einem komplexen Vektorraum wegen der Hermitizitätsbedingung $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ für alle $\mathbf{x} \in V$. Daher ist die Forderung der Positivität immer noch sinnvoll.

¹In der Informatik und der Mathematik fordert man oft die Linearität im ersten Argument und die Anti-Linearität im zweiten Argument.

Für einen gegebenen Vektor $\mathbf{x} \in V$ definiert

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \quad (2.27)$$

eine *Norm* [*norm*] (anschaulich eine Länge des Vektors \mathbf{x}) und

$$\cos \alpha = \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \quad (2.28)$$

einen Winkel α zwischen zwei (nicht verschwindenden) Vektoren. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass diese Definition sinnvoll ist, weil der Ausdruck auf der rechten Seite niemals größer als 1 wird. Insbesondere bezeichnen wir zwei nicht verschwindende Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} als *orthogonal* [*orthogonal*], wenn $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Wir bezeichnen zwei orthogonale Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} als *orthonormal* [*orthonormal*], wenn neben $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ noch $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$ gilt. Sind die Basisvektoren in einem Vektorraum paarweise orthonormal, spricht man von einer *Orthonormalbasis*.

Allgemein ist eine *Norm* eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, die den folgenden Bedingungen genügt:

- (1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ und $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$
- (2) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$
- (3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Nicht jede Norm folgt aus einem Skalarprodukt. Beispielsweise definiert die Vorschrift

$$\|\mathbf{x}\| = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \quad (2.29)$$

eine Norm (die so genannte ℓ_p -Norm), doch nur für $p = 2$ ergibt sich diese Norm aus einem Skalarprodukt. Einen Vektorraum mit einer Norm bezeichnet man auch als *normierten Vektorraum*. Einen normierten Vektorraum, der bezüglich der Norm „vollständig“ ist (diesen Begriff führen wir in Abschnitt 4.1.1 ein), bezeichnet man als *Banach-Raum* [*Banach space*].

2.4 Zwei Ungleichungen

Es gibt in Vektorräumen mit einem Skalarprodukt oder einer Norm mehrere Ungleichungen, von denen einige sehr oft in Beweisen verwendet werden. Wir betrachten zwei besonders wichtige Ungleichungen.

2.4.1 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung besagt, dass für zwei beliebige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ gilt

$$|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \sqrt{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})g(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \quad \text{oder} \quad |g(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \quad (2.30)$$

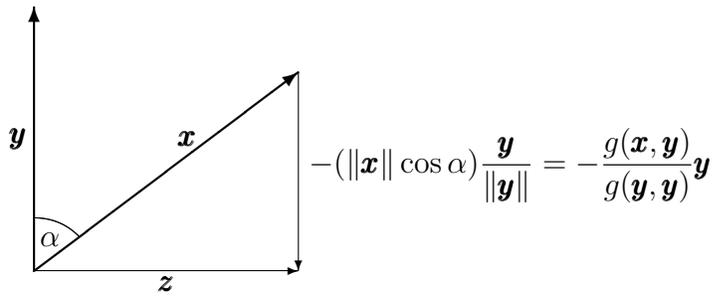


Abbildung 2.1: Beziehungen zwischen den Vektoren im Beweis der Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Beweis: Wir nehmen an, dass $g(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \neq 0$, da die Ungleichung ansonsten trivialerweise gültig ist. Dann bilden wir den Vektor (vgl. Abb. 2.1)

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{g(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \mathbf{y}, \quad (2.31)$$

für den offensichtlich gilt:

$$g(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = g\left(\mathbf{x} - \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{g(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \mathbf{y}, \mathbf{y}\right) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{g(\mathbf{y}, \mathbf{y})} g(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0. \quad (2.32)$$

\mathbf{z} ist also orthogonal zu \mathbf{y} . Damit folgt

$$\mathbf{x} = \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{g(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \mathbf{y} + \mathbf{z} \quad (2.33)$$

und

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{|g(\mathbf{y}, \mathbf{y})|^2} \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2 = \frac{|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \|\mathbf{z}\|^2 \geq \frac{|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}. \quad (2.34)$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\|\mathbf{y}\|^2$, erhalten wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Offensichtlich gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\mathbf{z} = 0$, d.h., wenn \mathbf{x} und \mathbf{y} linear abhängig (also Vielfache von einander) sind.

2.4.2 Dreiecksungleichung

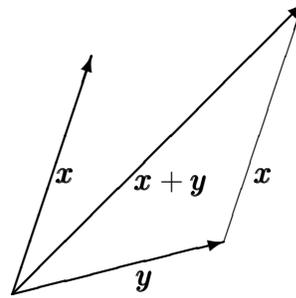
Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung können wir auch die sogenannte *Dreiecksungleichung* für die aus dem Skalarprodukt definierte Norm ableiten:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \quad (2.35)$$

Beweis (hier für einen reellen Vektorraum):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= g(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Abbildung 2.2: In einem Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten immer größer als die Länge der dritten Seite.



2.4.3 Zusammenfassung der Vektorraumstrukturen

Abschließend sollen nochmals kurz die Beziehungen zwischen den definierten Vektorraumstrukturen und die damit verbundenen Konzepte zusammengefasst werden.

Den Begriff der Topologie und die damit zusammenhängenden Begriffe des Grenzwerts und der Vollständigkeit lernen wir im nächsten Kapitel kennen. Wie schon erwähnt, bezeichnet man einen vollständigen normierten Vektorraum als *Banach-Raum*. Einen bezüglich der durch das Skalarprodukt definierten Norm vollständigen Vektorraum nennt man *Hilbert-Raum*.

Struktur	Bezeichnung	mögliche Konzepte
Vektorraum		Linearkombination von Vektoren, lineare Unabhängigkeit, Dimension, Basis
Vektorraum + Norm	normierter Vektorraum (falls vollständig: Banach-Raum)	Länge eines Vektors, Topologie (Grenzwerte von Folgen, Vollständigkeit)
Vektorraum + Skalarprodukt	(falls vollständig: Hilbert-Raum)	Norm, Orthogonalität, Winkel

Tabelle 2.1: Strukturen und Konzepte in einem Vektorraum.

2.5 Vektorprodukt, Spatprodukt und Determinante

Neben dem Skalarprodukt (das sich in obiger Form allgemein für Vektorräume beliebiger Dimension formulieren lässt) definieren wir noch das *Vektorprodukt* [*vector*

product] zweier Vektoren im \mathbb{R}^3 .² Zu zwei Vektoren \vec{x} und \vec{y} (da es sich um Vektoren im \mathbb{R}^3 handelt, verwende ich hier die Notation mit Vektorpfeilen) definieren wir:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

An dieser Stelle bietet es sich an, zwei Symbole einzuführen, die das Rechnen mit Vektoren (und später auch Ableitungen von Vektoren) sehr vereinfachen: Das sogenannte Kronecker-Delta und das Levi-Civita-Symbol.

Das *Kronecker-Delta* [*Kronecker-(Delta-) symbol*] ist definiert als:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.37)$$

Hier wird keine Einschränkung an den Indexbereich für i und j vorgenommen. Beide Indizes können sich auf beliebige Dimensionen beziehen. Für das kartesische Skalarprodukt von zwei Vektoren kann man damit auch schreiben:

$$x \cdot y = \sum_i x_i y_i = \sum_{ij} \delta_{ij} x_i y_j . \quad (2.38)$$

Vielfach lässt man in der Physik das Summenzeichen auch weg und schreibt einfach

$$x \cdot y = x_i y_i = \delta_{ij} x_i y_j . \quad (2.39)$$

Die Konvention lautet: Wenn zwei Indizes auf einer Seite einer Gleichung doppelt auftreten, ist über sie zu summieren. Dies bezeichnet man auch als *Einstein'sche Summenkonvention*. (Eine etwas präzisere Definition dieser Summenkonvention wird in Abschnitt 10.1 angegeben.)

Das zweite Symbol ist das Levi-Civita-Symbol oder auch ϵ -Symbol:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine zyklische Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine anti-zyklische Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.40)$$

Die zyklischen Permutationen von $(1, 2, 3)$ sind: $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$. Die anti-zyklischen Permutationen sind $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$. Wann immer zwei Indizes gleich sind, ist der Wert des ϵ -Symbols 0. Das Levi-Civita-Symbol ist zunächst nur

²Auch das Vektorprodukt lässt sich auf Vektorräume beliebiger Dimension verallgemeinern, was hier aber nicht geschehen soll, da es einen gewissen formalen Aufwand erfordert.

für Indizes definiert, deren Werte 1,2 oder 3 sein können. (Verallgemeinerungen dieses Symbols auf mehrdimensionale Vektorräume haben dann auch entsprechend mehr Indizes.)

Mit dieser Notation folgt für das Vektorprodukt von zwei Vektoren \vec{x} und \vec{y} :

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j y_k. \quad (2.41)$$

Als Beispiel betrachten wir nur die 2. Komponente ($i = 2$) auf der linken Seite. Auch wenn über alle Werte von j und k auf der rechten Seite summiert wird, geben $j, k = 2$ keinen Beitrag, außerdem dürfen j und k nicht gleich sein, womit nur noch $j = 1, k = 3$ und $j = 3, k = 1$ übrig bleiben. Damit folgt

$$(\vec{x} \times \vec{y})_2 = \epsilon_{213} x_1 y_3 + \epsilon_{231} x_3 y_1 = -x_1 y_3 + x_3 y_1. \quad (2.42)$$

Im \mathbb{R}^3 kann man für drei Vektoren noch das sogenannte *Spatprodukt* [*triple product*] definieren:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k \quad (2.43)$$

$$= x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1. \quad (2.44)$$

Anschaulich beschreibt das Spatprodukt das Volumen eines Parallelepipeds, das von den drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannt wird. Das Spatprodukt ist *zyklisch* [*cyclic*]:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y} \cdot (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}). \quad (2.45)$$

Insbesondere ist das Volumen 0, wenn die drei Vektoren linear abhängig sind, also gar kein Volumen aufspannen. Das Spatprodukt bietet somit einen Test, ob drei Vektoren linear unabhängig sind.

Schreibt man die drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ als Spaltenvektoren nebeneinander, erhält man eine Matrix V . Das Spatprodukt dieser Vektoren bezeichnet man als die *Determinante* [*determinant*] dieser Matrix:

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad \det V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}). \quad (2.46)$$

Die Determinante von V verschwindet also, wenn die drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linear abhängig sind.

2.6 Lineare Abbildungen, Eigenwerte und Hauptachsen

Die folgenden Definitionen und Theoreme sind Gegenstand der linearen Algebra. Da sie aber auch an manchen Stellen in der Analysis von Bedeutung sind, gebe ich sie hier in Form einer Aneinanderreihung unbewiesener Aussagen an. V und W seien immer Vektorräume der Dimension m bzw. n .

Eine *lineare Abbildung* [*linear mapping*] $A : V \rightarrow W$ erfüllt die Bedingung $A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Sind auf V und W jeweils Basisvektoren gegeben, kann man A als eine $n \times m$ Matrix mit Elementen A_{ij} schreiben. Es gilt dann

$$y_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j, \quad (2.47)$$

wobei x_j die Komponenten eines Vektors $\mathbf{x} \in V$ und y_j die Komponenten von $\mathbf{y} \in W$ in den jeweiligen Basen sind. Man beachte jedoch, dass die Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix von der gewählten Basis abhängt, wohingegen die lineare Abbildung selbst basisunabhängig ist. (Das Gleiche gilt übrigens auch für Vektoren: Ihre Darstellung durch drei Komponenten ist basisabhängig; als Vektoren in einem Vektorraum sind sie jedoch basisunabhängig definiert.)

Zu zwei linearen Abbildungen $A : V \rightarrow W$ und $B : W \rightarrow U$ (U ebenfalls Vektorraum) ist auch die Hintereinanderschaltung $BA : V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung. Ausgedrückt in Matrixelementen (Komponenten) gilt:

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ik} A_{kj}. \quad (2.48)$$

Der *Kern* [*kernel*] einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow W$ besteht aus allen Vektoren in V , die auf den Nullvektor in W abgebildet werden:

$$\text{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in V \mid A(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.49)$$

Besteht $\text{Ker}(A)$ nur aus dem Nullvektor in V , ist A injektiv. Allgemein ist der Kern selbst immer ein Untervektorraum von V .

Das *Bild* [*image*] einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow W$ ist die Menge der Elemente $\mathbf{y} \in W$, für die es ein Urbild gibt:

$$\text{Bild}(A) = \{\mathbf{y} \in W \mid \exists \mathbf{x} \in V : \mathbf{y} = A(\mathbf{x})\}. \quad (2.50)$$

Ist $\text{Bild}(A) = W$, ist A surjektiv. Auch $\text{Bild}(A)$ ist immer ein (Unter-)Vektorraum von W .

Sei nun $A : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung von einem Vektorraum in sich selbst und λ ein Element des Körpers (für uns also eine reelle oder komplexe Zahl). Ein Vektor $\mathbf{v} \neq 0$ heißt *Eigenvektor* [*eigenvector*] zum *Eigenwert* [*eigenvalue*] λ , wenn $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Mit jedem Eigenvektor \mathbf{v} ist auch ein beliebiges Vielfaches $\alpha\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zu demselben Eigenwert. Eigenvektoren bilden somit einen linearen Unterraum; daher spricht man auch von einem Eigenraum [*eigenspace*] bzw. einer Hauptachse [*principal axis*]. Gibt es mehrere linear unabhängige Eigenvektoren zum selben Eigenwert λ , bezeichnet man λ als *entartet* [*degenerated*] und den aufgespannten Vektorraum als den Eigenraum zu λ . Die Dimension d dieses Unterraums bezeichnet man als den Entartungsgrad von λ und bezeichnet λ als *d-fach entartet* [*d-fold degenerate*].

Sei nun zusätzlich g ein Skalarprodukt auf V . Man bezeichnet A als *selbstadjungiert* [*self-adjoint*], wenn $g(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = g(A\mathbf{x}, \mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Für das „Standard-skalarprodukt“ Gl. 2.26 bedeutet dies, dass A *symmetrisch* [*symmetric*] ist: $A_{ij} = A_{ji}$. Man schreibt auch $A^T = A$ und nennt A^T die *transponierte* [*transposed*] oder allgemeiner auch *adjungierte* [*adjoint*] Matrix zu A , das ist beim kartesischen Skalarprodukt die Matrix, bei der Zeilen und Spalten vertauscht sind. Es gilt folgender wichtiger Satz:

*Sei A eine selbstadjungierte lineare Abbildung auf einem Vektorraum V der Dimension m , dann gibt es m orthogonale Vektoren (bzw. orthogonale Unterräume), die Eigenvektoren von A sind. Sämtliche Eigenwerte von A sind reell (nicht notwendigerweise verschieden). Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer orthogonal. Die durch die Eigenvektoren ausgezeichneten Unterräume bezeichnet man als Hauptachsen [*principal axes*] von A .*

Dieser Satz spielt in der Physik eine wichtige Rolle und wird immer wieder auftreten. Ein Beispiel für symmetrische Matrizen sind die *Trägheitstensoren* von starren Körpern. Die Hauptachsen bezeichnet man auch als Hauptträgheitsachsen und die zugehörigen Eigenwerte als Hauptträgheitsmomente.

Lineare Abbildungen definieren auch lineare Gleichungssysteme. Der Einfachheit halber betrachten wir nur Abbildungen von einem Vektorraum in sich selbst. Sei $A : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Eine Gleichung der Form

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{2.51}$$

bezeichnet man als *lineares Gleichungssystem*. Ist A bijektiv (invertierbar), so lautet die Lösung $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$. Die inverse Matrix A^{-1} erfüllt die Gleichungen

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1} \quad \text{bzw.} \quad \sum_k A_{ik}(A^{-1})_{kj} = \delta_{ij}. \tag{2.52}$$

$\mathbf{1}$ bezeichnet man als die *Identitätsmatrix* [*identity matrix*]. Fasst man A als Spalte

von m Zeilenvektoren auf,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mm} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

dann ist A genau dann invertierbar (und damit eine eindeutige Lösung \mathbf{x} für das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ gegeben), wenn die m Zeilenvektoren linear unabhängig sind.³ In drei Dimensionen haben wir schon gesehen, dass dies gleichbedeutend ist mit der Bedingung, dass das Spatprodukt und damit die Determinante nicht verschwindet. Dies gilt allgemein: Eine Matrix ist invertierbar, wenn die Determinante der Matrix ungleich 0 ist.

2.7 *Funktionsräume als Vektorräume

Da man Funktionen addieren und mit den Elementen eines Körpers (beispielsweise den reellen Zahlen) multiplizieren kann und die Vektorraumaxiome erfüllt sind, bilden auch Funktionen einen Vektorraum:⁴

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x). \quad (2.54)$$

Dies bezeichnet man als die *punktweise* [*pointwise*] Addition bzw. Körpermultiplikation von Funktionen. Das Einselement ist natürlich die Funktion, die überall den Wert Null annimmt. Das inverse Element zu einer Funktion f ist einfach das Negative $-f$. Später werden wir sehen, dass auch stetige Funktionen oder mehrfach differenzierbare Funktionen unter obiger Linearkombination wieder stetig bzw. mehrfach differenzierbar bleiben, daher bilden auch sie Vektorräume. Die Dimension solcher Funktionsräume ist meist unendlich.

Auch die Menge der Funktionen, die bei $x = 0$ verschwinden (also $f(0) = 0$), bildet einen Vektorraum, nicht allerdings die Funktionen, die an einer bestimmten Stelle einen von Null verschiedenen (aber festen) Wert annehmen.

Diese Betrachtungsweise spielt später in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Operationen wie „die Ableitung bilden“ oder „integrieren“ erweisen sich als lineare Operationen auf den entsprechenden Funktionsräumen.

³Umgekehrt kann man A auch als Zeile von m Spaltenvektoren auffassen; auch dann ist A genau dann invertierbar, wenn diese Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Das aufgespannte Volumen ist in beiden Fällen dasselbe.

⁴Für Funktionen verwendet man im Allgemeinen keine besondere Vektorkennzeichnung, z.B. durch boldface-Fonts oder einen Vektorpfeil.

Kapitel 3

Grenzwerte und Topologien

Eines der Ziele der kommenden beiden Kapitel ist die axiomatische Behandlung der reellen und komplexen Zahlen. Auf dem Wege dorthin werden allerdings viele Begriffe eingeführt, die sich später auch in anderen Zusammenhängen als wichtig erweisen werden. Dazu zählt der für die Analysis zentrale Begriff der Konvergenz von Folgen.

Ich setze die Kenntnis der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen voraus (kurz werde ich in Abschnitt 3.1 darauf eingehen) und werde auch häufig den Umgang mit den reellen Zahlen als bekannt annehmen. In vielen Fällen, insbesondere wenn von „ $\epsilon > 0$ “ die Rede ist, kann man aber die reellen Zahlen auch durch die rationalen Zahlen ersetzen. Der konstruktive Schritt von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen (d.h., die Konstruktion der Menge der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen) wird sich als recht aufwendig und alles andere als selbstverständlich erweisen. Letztendlich sollen die „Lücken“, die zwischen den rationalen Zahlen noch bestehen, durch die reellen Zahlen geschlossen werden.

Ich werde in diesem Kapitel zunächst für sogenannte metrische Räume die Konzepte des Grenzwerts und der Cauchy-Konvergenz einführen. Damit können wir später die reellen Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen mit Hilfe solcher Cauchy-konvergenter Folgen definieren. Dieser Weg hat den Vorteil, dass ich viele Strukturen einführen kann, die unabhängig von den reellen Zahlen sehr nützlich sind, beispielsweise neben dem Grenzwert und den metrischen Räumen auch den normierten Vektorraum sowie den wichtigen Begriff des topologischen Raums.

Ich werde offene Mengen und topologische Räume zunächst konkret am Beispiel der reellen Zahlen bzw. der reellen Vektorräume \mathbb{R}^n einführen (über sogenannte offene Bälle) und die abstrakte Definition einer Topologie (als Axiome für eine Menge von offenen Mengen) erst am Ende erwähnen. Der Grund ist, dass viele „selbstverständliche“ Sätze (beispielsweise die Eindeutigkeit von Grenzwerten) für allgemeine Topologien nicht gelten, sondern Einschränkungen erfordern, die bei den hier betrachteten normierten Vektorräumen immer erfüllt sind, in ihrer abstrakten Form aber die Definition

zusätzlicher Strukturen voraussetzen.

Letztendlich wird es darum gehen, das Konzept der offenen und abgeschlossenen Intervalle zu verallgemeinern. Daher sollen diese Begriffe nochmals kurz definiert werden. Zu zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$ unterscheidet man vier Arten von Intervallen:

abgeschlossene Intervalle	$[x, y] = \{z \in \mathbb{R} x \leq z \leq y\}$
rechtsoffene Intervalle	$[x, y) = \{z \in \mathbb{R} x \leq z < y\}$
linksoffene Intervalle	$(x, y] = \{z \in \mathbb{R} x < z \leq y\}$
offene Intervalle	$(x, y) = \{z \in \mathbb{R} x < z < y\}$.

Rechtsoffene und linksoffene Intervalle sind eine Spezialität der reellen Zahlen (sie hängen mit der natürlichen Ordnungsrelation zusammen, die sich auf den reellen Zahlen definieren lässt), die anderen beiden Begriffe lassen sich verallgemeinern.

3.1 \mathbb{N}, \mathbb{Z} und \mathbb{Q}

Die Kenntnis der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen sowie die Rechenregeln für diese Zahlen sollten bekannt sein. Trotzdem vorab ein paar Bemerkungen dazu.

3.1.1 Erweiterungen von Zahlenmengen durch Hinzunahme der inversen Elemente

Axiomatisch lassen sich die natürlichen Zahlen beispielsweise durch die sogenannten *Peano-Axiome* definieren, was hier jedoch nicht ausführlich geschehen soll. Die Idee ist, dass man ausgehend von einer ersten Zahl (die man entweder als 0 oder als 1 wählen kann) durch wiederholte Addition der Zahl 1 (genauer durch die Definition einer „Folgezahl“) die weiteren natürlichen Zahlen erhält. Dabei soll man jedoch niemals zu einer Zahl gelangen, die schon einmal drangekommen ist (das wäre beispielsweise bei den in Abschnitt 2.2 erwähnten Mengen \mathbb{Z}_p der Fall). Die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Addition und Multiplikation abgeschlossen, diese beiden Verknüpfungen sind auch assoziativ (und kommutativ), und sie besitzen auch ein neutrales Element bezüglich der Addition (das ist 0) und bezüglich der Multiplikation (die 1). Allerdings gibt es weder zur Addition noch zur Multiplikation allgemeine inverse Elemente.

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Zahl größer als 1. Falls es keine natürlichen Zahlen $m, n \neq 1$ gibt, sodass $p = mn$, bezeichnet man p als *Primzahl*. Der *Fundamentalsatz der Arithmetik* besagt, dass sich jede natürliche Zahl ≥ 2 *eindeutig* als Produkt von Primzahlen darstellen lässt. Die kleinste Primzahl ist 2. Üblicherweise definiert man 1 nicht als Primzahl, sonst wäre beispielsweise die angesprochene Zerlegung einer Zahl in ein Produkt von Primzahlen nicht eindeutig.

Die ganzen Zahlen \mathbb{Z} erhält man aus den natürlichen Zahlen (einschließlich 0) durch die Erweiterung um die negativen Zahlen, d.h., zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ definiert man ihr inverses Element $(-n)$ bezüglich der Addition. Die ganzen Zahlen bilden eine abelsche Gruppe unter der Addition.

Zu den rationalen Zahlen \mathbb{Q} gelangt man, indem man die ganzen Zahlen (außer 0, also dem neutralen Element zur Addition) um die inversen Elemente bezüglich der Multiplikation erweitert und dann endliche Summen und Produkte dieser Zahlen hinzunimmt. Die rationalen Zahlen bilden einen Zahlenkörper.

Formal kann man die rationalen Zahlen auch als Paare (m, n) von ganzen Zahlen definieren, wobei zwei Paare der Form (m, n) und (km, kn) (mit $k \neq 0$) identifiziert werden können.¹ Die Multiplikation definiert man komponentenweise: $(m, n) \cdot (k, l) = (mk, nl)$. Die Addition wird definiert als $(m, n) + (k, l) = (ml + kn, ln)$.

Jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ lässt sich in der Form $\frac{m}{n}$ (mit $n \neq 0$) darstellen, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$. Dabei bedeutet $\frac{m}{n} := m \cdot n^{-1}$, wobei n^{-1} das bezüglich der Multiplikation inverse Element zu n ist. Die genannte Äquivalenz impliziert $\frac{m \cdot k}{n \cdot k} = \frac{m}{n}$, daher kann man gemeinsame Teiler im Zähler und Nenner immer kürzen. Außerdem kann man für eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ immer fordern, dass $n > 0$ (sollte n negativ sein, kann man Zähler und Nenner mit (-1) multiplizieren, was nach dem oben Gesagten die rationale Zahl nicht ändert).

Für zwei rationale Zahlen $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ und $q_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit $n_1, n_2 > 0$ definieren wir die Ordnungsrelation

$$\frac{m_1}{n_1} \leq \frac{m_2}{n_2} \quad \text{falls} \quad m_1 n_2 \leq m_2 n_1. \quad (3.1)$$

Der *Betrag* [*absolute value*] einer rationalen Zahl $q = \frac{m}{n}$ ist $|q| = \frac{|m|}{|n|}$.

3.1.2 Erweiterung durch Lösungsmengen von Gleichungen

Ausgehend von den ganzen Zahlen gelangt man auch zu den rationalen Zahlen, indem man sämtliche Lösungen von Gleichungen der Art

$$ax + b = 0 \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad (a \neq 0) \quad (3.2)$$

hinzunimmt. Man erweitert die Menge der ganzen Zahlen (die in diesen Gleichungen auftreten) um die Lösungsmengen dieser Gleichungen.

¹„identifizieren“ bedeutet hier Folgendes: Wir definieren zunächst eine Äquivalenzrelation auf der Menge von Paaren ganzer Zahlen: (m, n) und (m', n') (mit $n, n' \neq 0$) heißen äquivalent, wenn $mn' = m'n$, bzw. wenn es eine ganze Zahl $k \neq 0$ gibt, sodass $(m', n') = (km, kn)$ oder $(m, n) = (km', kn')$ gilt. Die rationalen Zahlen bilden dann die Menge der Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation. In dieser Menge der Äquivalenzklassen sind (m, n) und (km, kn) „identifiziert“, d.h., sie gehören zur selben Äquivalenzklasse.

Ähnliche Erweiterungen erhält man, indem man die Lösungen von Gleichungen der Art

$$ax^2 - b = 0 \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

betrachtet. Dies beinhaltet alle rationalen Zahlen sowie alle Quadratwurzeln von rationalen Zahlen. Allgemeiner kann man auch beliebige Polynome mit rationalen Zahlen (oder ganzen Zahlen, das spielt hier keine Rolle, da man immer mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner multiplizieren kann) untersuchen:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \quad a_k \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Die Menge aller Lösungen solcher Gleichungen bezeichnet man als *algebraische Zahlen* [*algebraic numbers*]. Auch die Menge der algebraischen Zahlen ist immer noch abzählbar unendlich. Das Komplement der algebraischen Zahlen in den reellen Zahlen sind die *transzendenten Zahlen* [*transcendental numbers*].

3.2 Metrische Räume und Grenzwerte von Folgen

Ausgehend von Mengen, bei denen wir zu zwei Punkten einen „Abstand“ angeben können, definieren wir den Begriff der (offenen) ϵ -Umgebung und anschließend allgemeiner das Konzept offener und abgeschlossener Mengen (und damit einer Topologie) für metrische Räume. Gegen Ende dieses Kapitels (Abschnitt 3.7) führe ich den Begriff der Topologie sowie offener und abgeschlossener Mengen ganz allgemein und unabhängig von einer Metrik axiomatisch ein.

3.2.1 Metrischer Raum

Definition: Eine Metrik [*metric*] (oder auch Abstandsfunktion [*distance function*]) auf einer Menge M ist eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad \forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie}) \quad (3.5)$$

$$(2) \quad \forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0 \quad \text{und} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\text{Positivität}) \quad (3.6)$$

$$(3) \quad \forall x, y, z \in M : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}). \quad (3.7)$$

(M, d) bezeichnet man in diesem Fall als metrischen Raum [*metric space*].

$d(x, y)$ nennt man den *Abstand* zwischen den Punkten x und y . Die ersten Forderungen sind damit offensichtlich: (1) der Abstand von x nach y ist gleich dem Abstand von y nach x , (2) Abstände sind nie negativ, und wenn der Abstand 0 ist, dann nur von einem Punkt zu sich selbst. Die Dreiecksungleichung [*triangle inequality*]

bedeutet, dass der Abstand von x nach z nie größer sein kann, als der Abstand von x zu einem anderen Punkt y plus dem Abstand von y nach z . Unter einem Abstand versteht man anschaulich somit meist einen „Minimalabstand“. Man beachte jedoch, dass nicht nur der geometrische Abstand von Punkten diese Bedingungen erfüllt. Beispielsweise könnte man auf der Menge aller U-Bahn-Stationen in Paris eine Metrik einführen und den Abstand zwischen zwei U-Bahn-Stationen als die minimale Anzahl von Stopps (Stationen) definieren, die von der einen zur anderen Station führen. Oder auch die „triviale“ Metrik auf einer beliebigen Menge M – $d(x, y) = 0$ für $x = y$ und $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ – erfüllt obige Axiome.

Auf einem normierten Vektorraum können wir immer eine Abstandsfunktion für zwei Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{y} über die Vorschrift $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ definieren. Man kann leicht zeigen, dass die so definierte Abstandsfunktion den obigen Axiomen genügt, sofern die Norm $\|\cdot\|$ die in Abschnitt 2.3 definierten Axiome erfüllt.

Auf der Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist $d(p, q) = |p - q|$ eine Abstandsfunktion. Dieselbe Funktion definiert natürlich auch auf \mathbb{N} und \mathbb{Z} einen Abstand, ebenso wie auf der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Allgemeiner können wir auf \mathbb{R}^n den euklidischen Abstand

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (3.8)$$

definieren, wobei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ jeweils Punkte im \mathbb{R}^n sind.

3.2.2 Häufungspunkte und Grenzwerte von Folgen

In Kapitel 1.6.5 haben wir den Begriff der Folge definiert (als Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} in eine Menge M). Falls es sich bei M um einen metrischen Raum handelt (also eine Abstandsfunktion auf M gegeben ist), können wir folgende Konzepte definieren:

Definition: Ein Punkt $x \in M$ heißt Häufungspunkt der Folge $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ [accumulation point], wenn für jedes $\epsilon > 0$ für unendlich viele Punkte der Folge gilt: $d(x, a_i) < \epsilon$. Ein Häufungspunkt $x \in M$ heißt Grenzwert [limit] einer Folge $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ nur für endlich viele Punkte der Folge $d(x, a_i) \geq \epsilon$ gilt.

Da der Begriff des Grenzwerts von großer Bedeutung ist, gebe ich noch eine zweite Definition an, die in der Praxis oft leichter zu überprüfen aber äquivalent zu der obigen Definition ist:

Definition: Für einen metrischen Raum (M, d) und eine Folge $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($a_i \in M$) heißt ein Punkt x Grenzwert der Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x, a_i) < \epsilon$ für alle $i > N$. Man sagt in diesem Fall auch, dass die Folge $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ konvergent [convergent] ist bzw. dass diese Folge gegen den Punkt x konvergiert und

schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \quad \text{oder auch} \quad a_n \rightarrow x. \quad (3.9)$$

Anmerkungen:

1. Im Folgenden werde ich bei der Bezeichnung von Folgen $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ den Bezug auf die Indexmenge (die, sofern nicht explizit erwähnt, immer \mathbb{N} sein wird) weglassen und schreibe einfach $\{a_i\}$.
2. Ich habe nicht spezifiziert, aus welcher Zahlenmenge ϵ sein soll. Meist wählt man natürlich die reellen Zahlen, doch im Augenblick, wo wir die reellen Zahlen noch nicht definiert haben, können wir auch $\epsilon \in \mathbb{Q}$ wählen. Die Definitionen bleiben trotzdem richtig.
3. Die zweite Definition gleicht der antiken Form einer Beweisführung, bei der ein Proponent eine Behauptung aufstellt und sein Gegner diese Behauptung in allen Punkten anzweifelt. Der Proponent hat nun die Aufgabe, jeden Schritt seiner Behauptung durch Aussagen zu beweisen, die ihm der Gegner als richtig zugesteht.

Angewandt auf das Konzept des Grenzwerts bedeutet dies: Der Gegner gibt eine kleine Zahl $\epsilon > 0$ vor und nun muss der Proponent eine Zahl N angeben, sodass er beweisen kann, dass für alle $i > N$ die Elemente a_i der Folge um weniger als ϵ von dem angeblichen Grenzwert der Folge entfernt sind. Sucht der Gegner nun ein neues ϵ (kleiner als das vorherige aber natürlich echt positiv), muss der Proponent eventuell ein neues N suchen. Wenn ihm das immer gelingt (bzw. er sein Gegenüber davon überzeugen kann, dass ihm das immer gelingen wird), ist der Beweis erbracht.

4. Eine Folge kann mehrere Häufungspunkte haben aber immer nur einen Grenzwert. Falls jedoch eine Folge Häufungspunkte hat, besitzt sie *Teilfolgen* (eine Teilfolge [subsequence] $\{b_n\}$ einer Folge $\{a_n\}$ ist einfach eine Folge, die man durch Einschränkung der natürlichen Zahlen – als Definitionsbereich der Folge – auf eine Teilmenge erhält), für welche die Häufungspunkte der Folge Grenzwerte sind. Beispielsweise hat die Folge

$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (3.10)$$

zwei Häufungspunkte (1 und -1). Die Teilfolgen, bei denen wir nur gerade n oder ungerade n betrachten, haben jeweils 1 bzw. -1 als Grenzwert.

Eine Folge kann sogar unendlich viele Häufungspunkte haben: Die Folge der rationalen Zahlen, die wir für den Beweis der Abzählbarkeit verwendet haben, hat jede rationale Zahl als Häufungspunkt. Fasst man die rationalen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen auf, so hat diese Folge sogar jede reelle Zahl als Häufungspunkt und somit überabzählbar unendlich viele Häufungspunkte.

5. Eine *Nullfolge* ist eine Folge reeller (rationaler, komplexer) Zahlen (oder auch von Elementen eines normierten Vektorraums), die den Grenzwert 0 hat.
6. Manchmal schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oder $a_n \rightarrow \infty$ und meint damit, dass die Folge gegen unendlich strebt. Dabei handelt es sich zunächst aber nicht um einen Grenzwert oder einen Häufungspunkt. Man kann aber sagen, eine Folge strebt gegen unendlich, wenn es zu jeder (noch so großen) Zahl $x \in \mathbb{R}$ immer ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n > x$ für alle $n > N$. Entsprechendes gilt auch für $\lim_{n \rightarrow \infty} = -\infty$. In solchen Fällen sagt man auch, dass die Folge gegen plus oder minus unendlich *divergiert*.

Die obige Definition eines Grenzwerts setzt voraus, dass man diesen Grenzwert kennt bzw. dass der Grenzwert in der Menge M liegt. Das muss aber nicht notwendigerweise der Fall sein. Die folgende Definition beschreibt für einen metrischen Raum, wann eine Folge *konvergent* [*convergent*] ist, ohne dass der Grenzwert der Folge bekannt sein muss:

Definition: Eine Folge $\{a_i\}$ heißt Cauchy-konvergent oder auch Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(a_i, a_j) < \epsilon$ für alle $i, j > N$.

Man kann leicht zeigen, dass eine konvergente Folge auch Cauchy-konvergent ist. Umgekehrt muss eine Cauchy-konvergente Folge nicht immer einen Grenzwert haben, wenn dieser nämlich kein Element von M ist. Genau dies kann bei Folgen aus rationalen Zahlen der Fall sein.

Wir betrachten als Beispiel zur Cauchy-Konvergenz zunächst die sogenannte harmonische Folge $\{1/n\}$ (mit $n = 1, 2, 3, \dots$). Offensichtlich konvergiert diese Folge gegen 0. Jede ϵ -Umgebung von 0 (also alle Zahlen vom Betrag kleiner als ϵ) enthält nicht nur unendlich viele Terme der Folge, sondern es liegen auch immer nur endlich viele Terme außerhalb (nämlich alle Terme $1/n$ mit $n \leq 1/\epsilon$, das sind nur endlich viele). Darüber hinaus ist auch der Abstand zwischen zwei Termen $1/n$ und $1/n'$ immer kleiner als ϵ , sofern $1/n$ und $1/n'$ kleiner als ϵ sind. Bei der alternierenden harmonischen Folge $\{(-1)^n 1/n\}$, die ebenfalls gegen 0 konvergiert, müsste man schon $n > 1/(2\epsilon)$ wählen, damit die Cauchy-Bedingung erfüllt ist.

Die Tatsache, dass es zu jeder reellen Zahl $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl n gibt, sodass $1/n < \epsilon$, bezeichnet man als *Archimedisches Axiom*.

Als Beispiel einer Folge von rationalen Zahlen, deren Grenzwert keine rationale Zahl ist, betrachten wir die Folge

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \dots \quad (3.11)$$

Das Bildungsgesetz ergibt sich aus einem sogenannten *Kettenbruch* [*continued fraction*]:

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \dots 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}} \quad (3.12)$$

und lautet:

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} \quad \text{mit} \quad a_1 = 1. \quad (3.13)$$

Falls diese Folge konvergiert (was leicht gezeigt werden kann), muss sie gegen einen Wert a konvergieren, der die Gleichung

$$a = 1 + \frac{1}{1 + a} \quad (3.14)$$

erfüllt und für den somit gilt $a^2 = 2$. Da die obigen Kettenbrüche nie negativ werden, kommt als Grenzwert nur die positive Lösung in Frage: $a = +\sqrt{2}$. Die obige Folge besteht somit ausschließlich aus rationalen Zahlen (für jedes endliche n), hat aber eine nicht rationale Zahl als Grenzwert.

3.2.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Bevor wir näher auf das Rechnen mit Grenzwerten eingehen, soll kurz das Konzept von offenen und abgeschlossenen Mengen in metrischen Räumen eingeführt werden. Ziel ist es, offene und abgeschlossene Intervalle, die wir für die Menge der reellen Zahlen schon definiert haben, zu verallgemeinern. Gegen Ende dieses Kapitels (Abschnitt 3.7) werden diese Begriffe ganz abstrakt und axiomatisch eingeführt, wobei die Ergebnisse aus diesem Abschnitt als Vorlage dienen werden.

Definition: Gegeben ein metrischer Raum (M, d) und ein Punkt $x \in M$. Die Menge aller Punkte $y \in M$ mit der Eigenschaft $d(x, y) < r$ bezeichnet man als offenen Ball [open ball] mit Radius r um den Punkt x :

$$B_r(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}. \quad (3.15)$$

Bezeichnet man den Radius mit $\epsilon > 0$ (meist eine sehr kleine aber echt positive reelle oder rationale Zahl), so spricht man auch von einer offenen ϵ -Umgebung [ϵ -neighborhood] von x .

Definition: Eine Teilmenge U eines metrischen Raums (M, d) heißt offen [open], wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ eine ϵ -Umgebung $B_\epsilon(x)$ gibt, sodass $B_\epsilon(x) \subset U$. Die leere Menge \emptyset und die Menge M selbst gelten immer als offene Mengen.

Wir beweisen nun drei Sätze zu offenen Mengen, die wir später (Abschnitt 3.7) als Ausgangspunkt für eine axiomatische Definition offener Mengen verwenden. In allen drei Fällen ist zu beweisen, dass ein beliebiger Punkt in der Menge (die offen sein soll) eine ϵ -Umgebung besitzt, die ganz in dieser Menge liegt.

Satz 1: Ein offener Ball $B_r(x)$ ist eine offene Menge.

Beweis: Es sei $y \in B_r(x)$ ein beliebiger Punkt in dem offenen Ball. Dann gilt $d(x, y) < r$ und somit $\epsilon' = r - d(x, y) > 0$. Wir wählen nun $\epsilon = \epsilon'/2$. Dann gilt $B_\epsilon(y) \subset B_r(x)$ aufgrund der Dreiecksungleichung.

Satz 2: Die Schnittmenge von zwei offenen Mengen U_1 und U_2 (immer aufgefasst als Teilmengen von M) ist wieder eine offene Menge.

Beweis: Falls $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ sind wir fertig. Sei nun $x \in U_1 \cap U_2$. Dann gibt es eine ϵ_1 -Umgebung von x , die in U_1 liegt und eine ϵ_2 -Umgebung, die in U_2 liegt. Die kleinere dieser beiden Umgebungen ist aber in der größeren enthalten und liegt somit in der Schnittmenge von U_1 und U_2 .

Satz 3: Eine beliebige Vereinigung offener Mengen aus M ist wieder eine offene Menge.

Beweis: Sei $x \in \bigcup_\alpha U_\alpha$ wobei $\{U_\alpha\}$ eine beliebige Ansammlung offener Mengen sein soll. Damit muss es aber (mindestens) ein α geben, sodass $x \in U_\alpha$. Da U_α offen ist, gibt es eine offene ϵ -Umgebung von x , die ganz in U_α liegt. Damit liegt sie aber auch in der Vereinigungsmenge.

Wir nennen die Menge aller offenen Teilmengen einer Menge M eine *Topologie* [topology] auf M und bezeichnen sie mit $T(M)$:

$$T(M) = \{U \subseteq M \mid U \text{ offen}\}. \quad (3.16)$$

M mit seiner Topologie $T(M)$ nennt man einen *topologischen Raum* [topological space].

Anmerkung: Durch Iteration kann aus Satz 2 bewiesen werden, dass jede Schnittmenge aus endlich vielen offenen Mengen wieder eine offene Menge ist. Dies gilt aber nicht mehr für unendliche Schnittmengen: Der zu wählende Radius um einen Punkt x in der Schnittmenge könnte bei jedem Schritt kleiner werden und im Grenzfall unendlicher Schnittmengen gleich null sein. Dann ist dies aber keine offene ϵ -Umgebung mehr. Ein Beispiel sind die offenen Intervalle $(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$; ihre Schnittmenge (für alle n) ist das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$. Um die Randpunkte -1 und 1 gibt es keine offenen ϵ -Umgebungen.

Eine Menge $V \subseteq M$ heißt *abgeschlossen* [*closed*], wenn sie das Komplement einer offenen Menge in M ist:

$$V \text{ abgeschlossen} \iff \exists U \in T(M) : V = M \setminus U. \quad (3.17)$$

Die folgenden Identitäten für zwei beliebige Teilmengen A und B aus M drücken eine „Dualität“ zwischen Vereinigungsmenge und Schnittmenge unter der Bildung von Komplementen aus (man bezeichnet diese Identitäten auch nach dem Mathematiker Augustus De Morgan (1806–1871) als *De Morgan'sche Gesetze*):

$$M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B) \quad \text{und} \quad M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B). \quad (3.18)$$

Diese Dualität erlaubt sofort Beweise für die folgenden Sätze für abgeschlossene Mengen:

1. Die leere Menge \emptyset und die Menge M sind abgeschlossen.
2. Eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.
3. Eine beliebige Schnittmenge abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.

Offensichtlich sind die leere Menge und die Menge M selbst sowohl offen als auch abgeschlossen. In den Vektorräumen \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n (mit den üblichen Normen) sind dies auch die beiden einzigen Mengen, für die das gilt. Das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist natürlich wieder eine offene Menge. Allerdings muss eine beliebige Teilmenge $A \subset M$ weder offen noch abgeschlossen sein, in diesem Sinne sind die beiden Begriffe also nicht komplementär. Insbesondere können wir aus der Tatsache, dass eine Menge nicht offen ist, nicht schließen, dass sie dann abgeschlossen sein muss (oder umgekehrt). Ein Beispiel für solche Mengen sind die links offenen (rechts abgeschlossenen) Intervalle bzw. die rechts offenen (links abgeschlossenen) Intervalle.

Wir können nun folgenden wichtigen Satz beweisen: Eine abgeschlossene Menge V enthält sämtliche Häufungspunkte (und damit auch alle Grenzwerte) von Folgen $\{a_i\}$ mit $a_i \in V$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis (durch Widerspruch): Sei ein Häufungspunkt x einer Folge $\{a_i\}$ nicht in V . Dann liegt er im Komplement von V (also in einer offenen Menge). Dann muss es um x eine ϵ -Umgebung geben, die ganz innerhalb dieses Komplements liegt. Andererseits sollte diese ϵ -Umgebung nach der Definition von Häufungspunkt aber unendlich viele Terme der Folge enthalten, im Widerspruch zu unserer Annahme, dass alle Terme in V liegen.

Es gilt auch das Umgekehrte: Eine Menge, die sämtliche Häufungspunkte (und Grenzwerte) all ihrer Folgen enthält, ist abgeschlossen.

3.3 Rechenregeln für Grenzwerte

3.3.1 Kombination konvergenter Folgen

Wir geben drei manchmal hilfreiche allgemeine Rechenregeln für Grenzwerte an, ohne diese explizit zu beweisen. Letztendlich zeigt man zunächst, dass die angegebenen Folgen überhaupt einen Grenzwert haben, und dann, dass der angegebene Grenzwert der einzige ist, der mit der Definition des Grenzwerts verträglich ist (also in jeder ϵ -Umgebung unendlich viele Elemente der Folge enthält).

1. Gegeben seien zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ eines normierten Vektorraums (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann hat die Folge $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ den Grenzwert $\alpha a + \beta b$ (für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$).
2. Zu zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ reeller (oder komplexer) Zahlen mit den Grenzwerten a bzw. b hat die Folge $\{a_n \cdot b_n\}$ den Grenzwert $a \cdot b$.
3. Zu zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ reeller (oder komplexer) Zahlen mit den Grenzwerten a bzw. $b \neq 0$ hat die Folge $\{a_n/b_n\}$ (für alle $n > N$, sodass $b_n \neq 0$) den Grenzwert a/b .

Diese Sätze übertragen sich in gewisser Hinsicht auch auf Cauchy-konvergente Folgen, obwohl dort der Grenzwert nicht unbedingt bekannt ist (bzw. in der betrachteten Menge liegt). Haben aber zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{a'_n\}$ denselben Grenzwert (bzw. ist ihre Differenz eine Nullfolge) und ist $\{b_n\}$ konvergent, dann haben auch $\{a_n + b_n\}$ und $\{a'_n + b_n\}$ denselben Grenzwert, ebenso $\{a_n \cdot b_n\}$ und $\{a'_n \cdot b_n\}$ sowie $\{a_n/b_n\}$ und $\{a'_n/b_n\}$.

Unter einer *Intervallschachtelung* versteht man eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [x_n, y_n]$ ($y_n > x_n \in \mathbb{R}$), sodass $I_{n+1} \subset I_n$ für alle n und $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$.

Intervallschachtelungssatz: Zu jeder Intervallschachtelung $I_n = [x_n, y_n]$ gibt es genau ein $z \in \mathbb{R}$, sodass z im Durchschnitt aller Intervalle liegt, also $z \in \bigcap_n I_n$. Es gilt: $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

(Anmerkung: Da $\{y_n - x_n\}$ eine Nullfolge ist, haben $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ denselben Grenzwert.)

3.3.2 Beschränkte Folgen

Eine Folge $\{a_i\}$ aus reellen Zahlen heißt *beschränkt* [bounded], wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_i| \leq k$ für alle i . Man nennt k auch eine Schranke für die Folge.

Allgemeiner können wir Folgen in endlich dimensionalen normierten Räumen betrachten und definieren: Eine Folge $\{a_i\}$ aus Elementen eines endlich dimensional normierten Raums heißt beschränkt, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\|a_i\| \leq k$ für alle i .

Satz von Bolzano und Weierstraß: Jede beschränkte Folge reeller oder komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Äquivalent kann man auch sagen: *Jede beschränkte Folge reeller oder komplexer Zahlen besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.*

Für den Beweis betrachten wir nur die Menge der reellen Zahlen, der allgemeine Beweis für komplexe Zahlen bzw. endlich dimensionale Vektorräume erfolgt mit entsprechenden Verallgemeinerungen ähnlich. Eine beschränkte Folge aus reellen Zahlen liegt immer innerhalb eines Intervalls $[-k, k]$, wobei k eine Schranke für diese Folge ist (d.h., für alle a_i gilt $|a_i| < k$; näheres zu „Schranken“ folgt in Abschnitt 4.3).

Die Idee für den Beweis verwendet das Taubenschlagprinzip sowie die Induktion: Man unterteile das Intervall in disjunkte Teilintervalle (beispielsweise $[-k, 0)$ und $[0, k]$). Nach dem Taubenschlagprinzip müssen in mindestens einem dieser Intervalle unendlich viele Elemente liegen. Dieses Teilintervall unterteile man weiter. Man erkennt nun, dass, egal wie klein man die Intervalle auch wählt, es immer ein Intervall geben muss, in dem unendlich viele Elemente der Folge liegen müssen. Diese Folge von Teilintervallen, deren Ausdehnung sich (beispielsweise) immer halbiert, definiert einen Häufungspunkt (nach dem Intervallschachtelungsprinzip).

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Monotonie: Eine Folge $\{a_i\}$ heißt *monoton steigend* [*monotonically increasing*], wenn gilt: $a_{n+1} \geq a_n$. Ganz entsprechend definiert man „monoton fallend“. Weiterhin heißt eine Folge *streng monoton steigend*, wenn $a_{n+1} > a_n$ gilt.

Eine nach oben (unten) beschränkte monoton steigende (fallende) Folge hat einen Grenzwert.

3.4 Reihen

Unter einer *Reihe* [*series*] versteht man eine unendliche Summe der Art:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad (3.19)$$

wobei a_k zunächst beliebige (auch komplexe) Zahlen sein können. Das Konzept lässt sich auch auf Vektorräume erweitern. (Manchmal werden wir die Reihen bei $k = 1$ beginnen lassen, daher ist es wichtig, den Anfangswert für k deutlich zu kennzeichnen.)

3.4.1 Konvergenz und Divergenz von Reihen

Zunächst erhebt sich natürlich die Frage, ob diese Summe überhaupt existiert bzw. endlich ist. Dazu betrachtet man die Folge der *Partialsommen* [*partial sums*]:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k. \quad (3.20)$$

Wir sagen, die Reihe aus Gl. 3.19 *konvergiert* [*converges*] gegen den Grenzwert (oder die Summe) S , wenn S der Grenzwert der Folge $\{S_n\}$ ist.

Wir bezeichnen eine Reihe als *absolut konvergent* [*absolute convergent*], wenn die Folge der Partialsommen der Absolutbeträge konvergiert, wenn also

$$S_n^{\text{abs}} = \sum_{k=1}^n |a_k| \quad (3.21)$$

eine konvergente Folge $\{S_n^{\text{abs}}\}$ definiert. Falls S_n beliebig groß oder klein wird (es also keine Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|S_n| < x$ für alle n), sagen wir, dass die Reihe *divergiert* [*diverges*]. Das Gegenteil einer konvergenten Reihe ist nicht unbedingt eine divergente Reihe. Beispielsweise hat die Reihe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \quad (3.22)$$

die Partialsommen $S_n = 1$, sofern n ungerade, andernfalls $S_n = 0$. Diese Folge konvergiert nicht sondern hat zwei Häufungspunkte; sie divergiert aber auch nicht.

Wenn eine Reihe absolut konvergent ist, ist sie auch immer konvergent. Das Umgekehrte gilt nicht unbedingt. Ein Beispiel ist die *alternierende harmonische Reihe* [*alternating harmonic series*] (vgl. Gl. 5.106):²

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2. \quad (3.23)$$

Die zugehörige absolute Reihe, die sogenannte *harmonische Reihe* [*harmonic series*], divergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \quad (3.24)$$

Zum Beweis fassen wir zunehmend viele Terme der Reihe zusammen, beginnend mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

²Im Folgenden wird manchmal der Wert einer Reihe angegeben, ohne dass ersichtlich ist, wie man auf diesen Wert kommt. Häufig handelt es sich dabei um sogenannte Taylor-Entwicklungen für bekannte Funktionen; dies wird in späteren Kapiteln behandelt.

Das heißt, die Summe der Terme zwischen $1/(2^{n-1} + 1)$ und $1/2^n$ ist immer größer als $1/2$. Damit ist die Reihe aber größer als eine unendliche Summe von $1/2$ und ist somit selbst unendlich.

Etwas Ähnliches gilt für die alternierende Reihe der ungeraden Zahlen: Die Summe der Absolutwerte divergiert,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \infty, \quad (3.25)$$

wohingegen die alternierende Summe endlich ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}. \quad (3.26)$$

Man kann zeigen, dass die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (3.27)$$

für $s > 1$ (sogar für $\operatorname{Re}(s) > 1$, falls man komplexe Zahlen für s zulässt) konvergiert. Diese Funktion bezeichnet man als *Riemann'sche Zeta-Funktion*.

Die *geometrische Reihe* [geometric series]

$$S(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (3.28)$$

konvergiert absolut für alle $|q| < 1$ und sie divergiert für $q = 1$ und $|q| > 1$. Zum Beweis der Konvergenz für $|q| < 1$ überzeugen wir uns, dass

$$(1-q)(1+q+q^2+\dots+q^n) = 1-q^{n+1}. \quad (3.29)$$

Multiplizieren wir die Klammern aus, heben sich außer dem ersten Term ($1 \cdot 1$) und dem letzten Term ($(-q) \cdot q^n$) alle anderen Terme paarweise weg, sodass

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \quad (3.30)$$

Dieses Ergebnis gilt sogar für beliebige q (sogar für $q = 1$, wenn man auf der rechten Seite den Grenzfall $q \rightarrow 1$ betrachtet). Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ wird aus der rechten Seite $1/(1-q)$, sofern $|q| < 1$ und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1} = 0$.

Bei einer absolut konvergenten Reihe kann man die Reihenfolge der Terme in der Summe beliebig umstellen, das Ergebnis ändert sich dadurch nicht. Ist eine Reihe jedoch nicht absolut konvergent (Konvergenz alleine reicht nicht!), darf man die Terme nicht umstellen. Nach dem *Riemann'schen Umordnungssatz* [Riemann series theorem] kann man bei nicht absolut konvergenten Reihen immer Permutationen der Terme in der Reihe finden, sodass man als Summe (im Sinne des Grenzwerts der Partialsummen) jeden beliebigen vorgegebenen Wert erhält.

3.4.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Es gibt viele Kriterien, mit denen man entscheiden kann, ob eine Reihe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (3.31)$$

bzw. die zugehörige Folge von Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.32)$$

konvergiert oder nicht. Einige dieser Kriterien werden im Folgenden aufgelistet – nicht immer mit einem Beweis. In vielen Fällen ist $a_k \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , manchmal erkennt man an den Beweisen aber, dass die Kriterien auch allgemeinere Gültigkeit haben (beispielsweise auch für normierte Vektorräume).

Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz

Wie schon erwähnt, folgt aus der absoluten Konvergenz einer Reihe auch, dass die Reihe selbst konvergent ist:

$$S^{\text{abs}} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty \quad \implies \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty. \quad (3.33)$$

Beweis: Aus der Dreiecksungleichung (Abschnitt 2.4.2)

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (3.34)$$

kann man iterativ

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \quad (3.35)$$

beweisen. Erfüllt die rechte Seite das Kriterium für Cauchy-Konvergenz, erfüllt offensichtlich auch die linke Seite dieses Kriterium.

Beschränkte Partialsummen

Die Partialsummen der Absolutterme einer Reihe bilden eine monoton steigende Folge. Wenn man beweisen kann, dass die Partialsummen eine obere Schranke haben (es also ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $S_n^{\text{abs}} < x$ für alle n), haben sie einen Grenzwert. In diesem Fall konvergiert die Reihe.

Majorantenkriterium

Kann man die Terme einer Reihe durch die Terme einer anderen Reihe, von der die Konvergenz schon bewiesen wurde, abschätzen, folgt auch für die neue Reihe die Konvergenz. Genauer: Sei $|a_k| < c_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Beweis: Die Kriterien für die Cauchy-Konvergenz der Reihe zu $\{c_k\}$ lassen sich auf die Reihe zu $\{|a_k|\}$ übertragen.

Quotientenkriterium

Falls es eine Zahl $0 \leq b < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (und $a_k \neq 0$ für $k > N$), sodass

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq b \quad \text{für alle } k > N, \quad (3.36)$$

ist die Reihe absolut konvergent. Gilt umgekehrt

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1 \quad \text{für alle } k > N, \quad (3.37)$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis: Falls die obere Bedingung erfüllt ist, gilt

$$|a_{n+k}| \leq b^k |a_n| \quad (3.38)$$

und damit kann man die Reihe durch eine geometrische Reihe abschätzen. Die Nicht-Konvergenz der Reihe, falls das untere Kriterium erfüllt ist, ist offensichtlich.

Anmerkung: Man fragt sich vielleicht, weshalb die Bedingung so kompliziert mit einem $b < 1$ formuliert wurde und ob man nicht viel einfacher $|a_{k+1}|/|a_k| < 1$ verlangen kann. Diese Bedingung ist jedoch wesentlich schwächer und reicht nicht für die Konvergenz, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt (dort ist $|a_{k+1}|/|a_k| = k/(k+1) < 1$). Die feste (von k unabhängige) Vorgabe von $b < 1$ verhindert, dass $\lim |a_{k+1}|/|a_k| \rightarrow 1$. In diesem Fall kann die Reihe zwar konvergent sein (Beispiel: $a_k = 1/k^2$), muss aber nicht (Beispiel: die harmonische Reihe $a_k = 1/k$).

Wurzelkriterium

Gibt es eine Zahl $0 \leq b < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq b \quad \text{für alle } k > N, \quad (3.39)$$

ist die Reihe absolut konvergent. Auch in diesem Fall erfolgt der Beweis durch eine Abschätzung durch die geometrische Reihe, da bei Erfüllung des Kriteriums $|a_k| \leq b^k$ gilt.

Wiederum ist die Reihe nicht absolut konvergent, falls $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$.

Leibniz-Kriterium

Allgemein kann man leicht zeigen, dass eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nur dann konvergieren kann, wenn die Folge $\{a_k\}$ eine Nullfolge ist. Wie wir am Beispiel der harmonischen Reihe gesehen haben, handelt es sich hierbei nur um ein *notwendiges* [*necessary*] Kriterium, kein *hinreichendes* [*sufficient*]. Leibniz bewies jedoch die Konvergenz für alternierende Reihen: Sei $a_k > 0$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent. Außerdem gilt $S \leq a_0$.

3.4.3 Rechnen mit Reihen

Im Folgenden setzen wir immer voraus, dass die Reihen absolut konvergent sind (in manchen Fällen reicht auch einfache Konvergenz, was wir jedoch nicht immer betonen werden).

Gegeben seien zwei absolut konvergente Reihen $S_a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $S_b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, dann existiert auch die Reihe mit den Koeffizienten $\{\alpha a_k + \beta b_k\}$ und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \alpha S_a + \beta S_b. \quad (3.40)$$

Dies beweist, dass die Koeffizientenfolgen zu absolut konvergenten Reihen einen Vektorraum bilden.

Für das Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = S_a S_b \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}. \quad (3.41)$$

3.5 Einige spezielle Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Funktionen, die meist über Grenzwerte oder Reihen definiert werden. Wir beginnen allerdings zunächst mit Polynomen, also endlichen Potenzreihen.

3.5.1 Polynome

Im Folgenden seien alle Zahlen a_i, b_i oder Variable z aus dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen, den wir allgemein mit \mathbb{K} bezeichnen, sofern sich die Aussagen auf beide Körper beziehen.

Eine Abbildung $p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (3.42)$$

bezeichnet man als *Polynom* [*polynomial*] vom *Grad* [*degree*] n über dem Körper \mathbb{K} . Man nennt das Polynom *normiert* [*normalized*], wenn $a_n = 1$.

Es folgt eine Ansammlung von Sätzen, die nicht im einzelnen bewiesen werden (siehe die mathematische Literatur, z.B. auch [11], ab S. 38).

- Stimmen zwei Polynome

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{und} \quad q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k \quad (3.43)$$

mit $n > m$ an mehr als n Stellen überein, gilt also $p(z_i) = q(z_i)$ für paarweise verschiedene Variable $\{z_i\}$ ($i = 1, \dots, N$ mit $N > n$), so sind die Polynome identisch, d.h. $m = n$ und $a_i = b_i$. Insbesondere sind zwei Polynome identisch, wenn sie in einer offenen Umgebung eines Punktes $z \in \mathbb{K}$ übereinstimmen.

- Verschwindet ein Polynom $p(z)$ vom Grade n an einer Stelle $z = \lambda$ (gilt also $p(\lambda) = 0$), so lässt es sich in der Form

$$p(z) = (z - \lambda)q(z) \quad (3.44)$$

schreiben, wobei $q(z)$ ein Polynom vom Grade $n - 1$ ist. Man bezeichnet λ als *Nullstelle* [*zero*] von p .

- Ein Polynom vom Grade n hat höchstens n verschiedene Nullstellen.
- Jedes Polynom vom Grade n über \mathbb{K} lässt sich eindeutig in folgender Form schreiben:

$$p(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i) q(z), \quad (3.45)$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{K}$ Nullstellen von $p(z)$ sind (nicht notwendigerweise alle verschieden – es kann sich auch um Nullstellen höherer Ordnung handeln), und $q(z)$ ist ein Polynom vom Grade $n - m$, das keine Nullstellen in \mathbb{K} hat. (Man nennt eine Nullstelle λ von $p(z)$ eine höhere oder entartete Nullstelle, wenn sich $p(z)$ in der Form $p(z) = (z - \lambda)^m q(z)$ schreiben lässt, wobei $m > 1$ und $q(\lambda) \neq 0$.)

Diese Zerlegung ist nur eindeutig, wenn wir den Körper \mathbb{K} festlegen. Beispielsweise lässt sich das Polynom $p(z) = 1 + z^2$ in \mathbb{R} nicht weiter zerlegen (es hat in \mathbb{R} keine Nullstellen), wohl aber in \mathbb{C} (dort gilt $p(z) = (z + i)(z - i)$).

- Der *Fundamentalsatz der Algebra* besagt, dass jedes Polynom vom Grade $n \geq 1$ in \mathbb{C} mindestens eine Nullstelle hat. Durch Iteration folgt daraus, dass jedes Polynom vom Grade n in \mathbb{C} genau n Nullstellen hat. Jedes Polynom in \mathbb{C} lässt sich also in der Form

$$p(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) \quad (3.46)$$

schreiben, wobei λ_i ($i = 1, \dots, n$) die (möglicherweise höheren) Nullstellen von $p(z)$ in \mathbb{C} sind.

Aus diesem Grund bezeichnet man die komplexen Zahlen auch als *algebraisch abgeschlossen* [*algebraically closed*]: Sämtliche Nullstellen von Polynomen über diesem Körper liegen auch wieder in diesem Körper.

Beweisskizze zum Fundamentalsatz der Algebra

Es gibt viele Beweise für diesen Satz. Einige verwenden Funktionentheorie (z.B. [12], S. 48), andere reine Analysis (z.B. [15, 10]). Hier soll die Beweisidee skizziert werden. Einige der Teilschritte werden erst später behandelt (z.B. der Satz von Weierstraß über stetige Funktionen auf einem kompakten Gebiet oder die Tatsache, dass die Gleichung $z^k = a$ ($a \in \mathbb{R}$) immer eine (komplexe) Lösung hat).

Wir betrachten ein Polynom

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0 \quad (3.47)$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$. Außerdem soll $a_0 \neq 0$ sein, ansonsten ist offensichtlich $z = 0$ eine Lösung und wir sind fertig.

1. Wir benötigen mehrere Teilsätze: (1) $|p(z)|$ ist stetig (mehr dazu im nächsten Kapitel), (2) stetige Funktionen nehmen auf einem kompakten Gebiet ihren Minimalwert (und Maximalwert) immer an (dies ist der Satz von Weierstraß, siehe Abschnitt 5.1.4), (3) die Gleichung $z^k = a$ hat immer eine komplexe Lösung für a reell (siehe Abschnitt 4.2 zu komplexen Zahlen).
2. Zunächst zeigt man, dass $|p(z)|$ für $|z| \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist. Daraus folgt, dass der Bereich für z , in dem $|p(z)| \leq |p(0)|$ ist, kompakt ist (also von einer endlichen Kreisscheibe überdeckt werden kann und abgeschlossen ist). Nach dem Satz von Weierstraß nimmt die Funktion $|p(z)|$ irgendwo in diesem Gebiet ihr Minimum an. Dieser Punkt sei z_0 . Es wird behauptet, dass $|p(z_0)| = 0$ und damit auch $p(z_0) = 0$.
3. Nun zeigt man, dass es für jede Zahl z , für die $p(z) \neq 0$ ist, eine Zahl w gibt, sodass $|p(z+w)| < |p(z)|$. Man kann also durch eine geeignete Verschiebung in der komplexen Ebene den Absolutbetrag einer Funktion immer verkleinern, sofern dieser Absolutbetrag nicht 0 ist. Diese Aussage gilt nicht für reelle Zahlen. Hier wird ausgenutzt, dass $z^k = a$ immer eine (komplexe) Lösung hat. Also muss das Minimum von $|p(z)|$ wirklich 0 sein und es gibt die Nullstelle.

Zu dem Beweis dieser Behauptung schreibt man $p(z+w)$ für festes z als Polynom in w , wobei der konstante Term nun $p(z)$ ist, was nach Voraussetzung nicht

0 sein soll. Es sei k die niedrigste Potenz von w , zu welcher der Koeffizient (nennen wir ihn b_k) nicht verschwindet. Für sehr kleine w kann man alle höheren Potenzen vernachlässigen (auch dies ist zunächst zu zeigen) und man betrachtet die Funktion $p(z) + b_k w^k$. Man zeigt nun, dass man w (als komplexe Zahl) so wählen kann, dass diese Funktion einen kleineren Absolutbetrag hat als $p(z)$.

Einige der Teilschritte in diesem Beweis werden in den Übungen behandelt.

3.5.2 Die Exponentialfunktion

Eine der wichtigsten Funktionen in der Mathematik und Physik ist die Exponentialfunktion [*exponential function*]. Man kann sie durch einen Grenzwert definieren:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (3.48)$$

Für $x = 1$ bezeichnet man diesen Grenzwert als *Euler'sche Zahl* [*Euler number*] e (benannt nach Leonhard Euler (1707–1783), der das Symbol e für diese Zahl einführte), auch wenn manche Mathematikhistoriker die Meinung vertreten, man solle eher von der Napier'schen Zahl (nach John Napier (1550–1617), der diese Zahl implizit für die Berechnung einer Logarithmentafel verwendete) sprechen.

Eine andere Definition der Exponentialfunktion beruht auf folgender Reihe:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.49)$$

Einige der Beweise für die folgenden Sätze werden auf die Übungen verschoben. Man beachte, dass diese Definitionen der Exponentialfunktion auch für komplexe Zahlen sinnvoll sind.

Zunächst einmal ist natürlich zu beweisen, dass der Grenzwert in der ersten Definition existiert (dies geschieht im nächsten Abschnitt für $x = 1$). Dass die Reihe in der zweiten Definition tatsächlich für beliebige Wert von x absolut konvergent ist, folgt unmittelbar aus dem Quotientenkriterium: Mit $a_k = \frac{x^k}{k!}$ gilt

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|^{k+1} k!}{(k+1)! |x|^k} = \frac{|x|}{k+1}. \quad (3.50)$$

Für jeden vorgegebenen Wert von $|x|$ findet man ein N , sodass $N + 1 > |x|$. Damit können wir $b = \frac{|x|}{N+1}$ setzen und das Quotientenkriterium ist für alle $k > N$ erfüllt.

Schließlich ist zu zeigen, dass die beiden Definitionen dieselbe Funktion definieren. Aus der Reihenentwicklung kann man die folgende Funktionalgleichung beweisen:

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y). \quad (3.51)$$

Bis auf einen Faktor im Argument (und unter der Annahme, dass die Funktion zumindest an einem Punkt stetig sein soll) gilt diese Aussage auch umgekehrt: Erfüllt eine an mindestens einer Stelle stetige Funktion $f(x)$ die Bedingung

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad (3.52)$$

für alle x, y in \mathbb{R} oder \mathbb{C} , dann gilt

$$f(x) = \exp(\alpha x) \quad (3.53)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .

Man wird sich vielleicht fragen, weshalb die Funktionalgleichung (3.52) nicht reicht, um die Exponentialfunktionen abzuleiten, sondern weshalb man noch an mindestens einem Punkt die Stetigkeit verlangen muss. In [1] findet man ein Beispiel, dass die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, die gewöhnlich nur die Geraden $f(x) = kx$ (mit einer beliebigen Konstanten k) als Lösungen hat, bei Aufgabe der Bedingung der Stetigkeit an mindestens einem Punkt noch weitere Lösungen zulässt, deren Graph dann aber in der Ebene dicht ist (d.h., in jeder beliebig kleinen Umgebung von jedem Punkt in der Ebene liegen unendlich viele Punkte des Graphen). „Beliebig pathologisch!“

3.5.3 Beweis der Konvergenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Es soll bewiesen werden, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3.54)$$

existiert. Der folgende Beweis stammt aus [10]. Wir verwenden im Wesentlichen den Intervallschachtelungssatz (siehe S. 75), d.h., wir betrachten eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ wobei $\{a_n\}$ eine monoton steigende Folge und $\{b_n\}$ eine monoton fallende Folge ist, sodass $\{b_n - a_n\}$ eine Nullfolge ist.

Es seien die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (3.55)$$

gegeben. Wir beweisen zunächst, dass $\{a_n\}$ monoton steigend ist. Aus der Ungleichung von Bernoulli (vgl. S. 26),

$$(1+x)^n > 1+nx \quad \text{für } x > -1, x \neq 0, n \geq 2, \quad (3.56)$$

folgt:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}, \quad (3.57)$$

bzw.

$$\frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^n}{n^n \cdot n^n}. \quad (3.58)$$

Wir multiplizieren mit $n^n/(n-1)^n$ und erhalten:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (3.59)$$

Das bedeutet $a_{n-1} < a_n$ (für $n \geq 2$) und damit ist bewiesen, dass die Folge $\{a_n\}$ monoton steigend ist.

Ganz ähnlich beweisen wir, dass $\{b_n\}$ monoton fallend ist. Wiederum gilt nach Bernoulli (für $n \geq 2$):

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \quad (3.60)$$

oder:

$$1 + \frac{1}{n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \quad (3.61)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}. \quad (3.62)$$

Wir bringen den zweiten Term rechts wieder auf die andere Seite:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n, \quad (3.63)$$

d.h. $b_n < b_{n-1}$. Also ist die Folge $\{b_n\}$ monoton fallend.

Offensichtlich ist $b_n - a_n$ immer positiv:

$$b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{a_n}{n}. \quad (3.64)$$

Da schließlich $a_n < b_n < b_1$, lässt sich die rechte Seite durch b_1/n abschätzen, d.h.

$$b_n - a_n < \frac{b_1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.65)$$

Also existiert der Grenzwert (Gl. 3.54). Für $n = 100$ bzw. $n = 1000$ erhalten wir die Abschätzungen

$$2,7048 < e < 2,7329 \quad \text{bzw.} \quad 2,7169 < e < 2,71964. \quad (3.66)$$

Die Folge konvergiert also sehr schlecht und eignet sich kaum für die numerische Bestimmung der Euler-Zahl.

3.5.4 Der natürliche Logarithmus

Nun betrachten wir die Umkehrfunktion $\ln(x)$, den sogenannten natürlichen Logarithmus [*natural logarithm*] von x . Diese Funktion ist (zunächst) nur auf den positiven reellen Zahlen definiert, da die Bildmenge der Exponentialfunktion (aufgefasst als Funktion über \mathbb{R}) die positiven reellen Zahlen sind. Für beliebige Werte von x gilt somit

$$\ln(\exp(x)) = x, \quad (3.67)$$

und für positive reelle Zahlen x gilt

$$\exp(\ln(x)) = x. \quad (3.68)$$

Aus der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion leitet sich dann die Funktionalgleichung für den Logarithmus ab:

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y). \quad (3.69)$$

Über die Beziehung

$$a^x = \exp(x \ln(a)) \quad (3.70)$$

kann man, ausgehend von der natürlichen Exponentialfunktion (zur Euler-Zahl e) und dem natürlichen Logarithmus, verallgemeinerte Exponentialfunktionen definieren.

3.5.5 Sinus- und Kosinus-Funktion

Die Sinus- und die Kosinus-Funktion dürften aus der Schule bekannt sein. Dort definiert man sie entweder über die Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken (siehe Vorkurs Mathe [5]), oder aber über die Projektionen von Radien im Einheitskreis auf die vertikale bzw. horizontale Achse (vgl. Abb. 3.1).

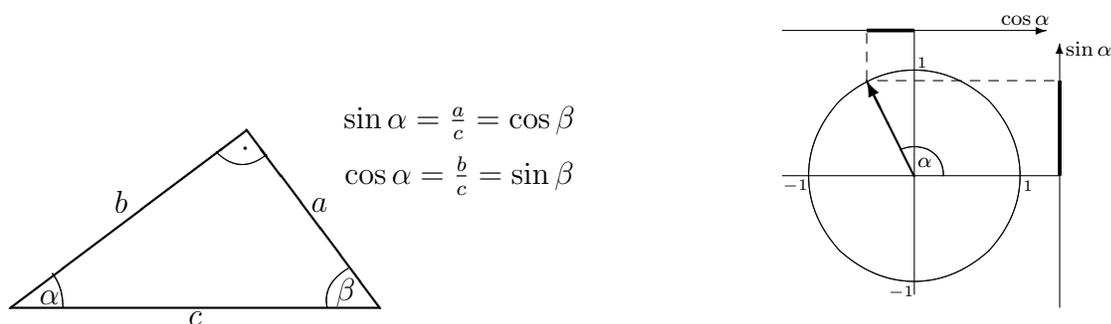


Abbildung 3.1: Winkelfunktionen: (a) Der Sinus und Kosinus eines Winkels (gemessen im Bogenmaß) in einem rechtwinkligen Dreieck. (b) Der Sinus und Kosinus als Projektion eines Einheitsvektors auf die horizontale und vertikale Achse.

Wir geben hier die Reihenentwicklung der Sinus- und Kosinus-Funktion an, da wir später den Zusammenhang zur Exponentialfunktion herstellen wollen. Allerdings erfolgt der einfachste Beweis für die Reihendarstellungen über die Taylor-Entwicklung, die wir erst in Kapitel 5.5 kennenlernen werden.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (3.71)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \quad (3.72)$$

Beide Funktionen sind für beliebige reelle Zahlen x absolut konvergent.

3.5.6 Hyperbolische Funktionen

Zwei Kombinationen von Exponentialfunktionen spielen oft eine wichtige Rolle: die sogenannte *hyperbolische Kosinus-Funktion* [*hyperbolic cosine*] und die *hyperbolische Sinus-Funktion* [*hyperbolic sine*]:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)). \quad (3.73)$$

Die Bedeutung dieser Funktionen ergibt sich unter anderem aus ihren Symmetrieeigenschaften:

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad \cosh(-x) = \cosh(x). \quad (3.74)$$

Die Reihenentwicklungen (die sich leicht aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ableiten lassen) zeigen eine Verwandtschaft zu den trigonometrischen Funktionen:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (3.75)$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}. \quad (3.76)$$

3.6 Konvergenz von Funktionen

Wir haben im letzten Abschnitt die Exponentialfunktion sowie die Sinus- und Kosinus-Funktionen durch den Grenzwert von Folgen definiert (bei Reihen durch den Grenzwert der Partialsummen). Das bedeutet, wir haben eine Folge von Funktionen $\{S_n(x)\}$, von der wir behaupten, dass sie gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert.

Diese Folgen hängen nun noch von einem Parameter x ab. Natürlich wird für die Konvergenz verlangt, dass die Folgen für jeden Wert x (im erlaubten Definitionsbereich) konvergieren. Dies bezeichnet man als *punktweise Konvergenz* [*pointwise*]

convergence]. Ein etwas strengeres Konvergenzkriterium ist die *gleichmäßige Konvergenz* von Funktionen, bei der wir fordern, dass die konkreten Konvergenzkriterien für alle x gleich gewählt werden können. Da es sich hier um ein sehr schönes Beispiel für die Anwendung der Existenz- und Allquantoren handelt, geben wir die Definitionen für punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen (definiert über einer Menge U) zunächst in dieser Form an:

$$\text{(punktweise)} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in U \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : |S_k(x) - f(x)| < \epsilon \quad (3.77)$$

$$\text{(gleichmäßig)} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in U \quad \forall k > N : |S_k(x) - f(x)| < \epsilon \quad (3.78)$$

Der Unterschied zwischen den beiden Konvergenzbedingungen liegt also lediglich in der Reihenfolge des zweiten und dritten Quantors: Für die punktweise Konvergenz fordern wir, dass es „für jedes x in U ein N gibt, sodass für alle $k > N$ “ das Konvergenzkriterium erfüllt ist. Bei der gleichmäßigen Konvergenz fordern wir, dass „es ein N gibt, sodass für alle x in U und für alle $k > N$ “ das Konvergenzkriterium erfüllt ist.

Bei der punktweisen Konvergenz kann die Zahl N , ab der die Bedingung $|S_k(x) - f(x)| < \epsilon$ erfüllt sein soll, für jeden Wert von x eine andere sein, d.h., sie kann von x abhängen. Bei der gleichmäßigen Konvergenz kann man eine solche Zahl N unabhängig von dem Punkt x angeben, an dem die Konvergenz gelten soll.

Wir betrachten als einfaches Beispiel die Folge $S_n(x) = 1/(nx)$. Für jedes $x \neq 0$ konvergiert diese Folge im Grenzfalle $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Wählen wir zunächst als Definitionsbereich U alle Zahlen $x > 1$, so konvergiert diese Folge gleichmäßig. Zu jedem $\epsilon > 0$ geben wir $N > 1/\epsilon$ an und können leicht nachweisen, dass nun $S_k(x) < \epsilon$ für alle $k > N$ und alle $x > 1$ gilt.

Wählen wir jedoch als Definitionsbereich die positiven reellen Zahlen \mathbb{R}^+ , lassen also alle Werte $x > 0$ zu, so konvergiert die Folge nicht mehr gleichmäßig, wohl aber punktweise. Wenn wir (zu einem vorgegebenen $\epsilon > 0$) ein x vorgeben, können wir immer ein N finden (nämlich $N > 1/(\epsilon x)$), sodass $S_k(x) < \epsilon$ für alle $k > N$. Wir sehen jedoch, dass N von x abhängt. Wir können nicht für alle $x > 0$ ein festes N angeben.

3.7 Topologische Räume

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir einige der Ergebnisse in einen allgemeineren Rahmen einbetten. Dies wird uns auf das Konzept des topologischen Raumes und einer verallgemeinerten Definition von offenen und abgeschlossenen Mengen führen.

3.7.1 Axiomatische Definition einer Topologie

Wir verwenden nun die Sätze aus Abschnitt 3.2.3, um offene Mengen (bzw. ein Topologie) axiomatisch zu charakterisieren.

Definition: Sei M eine Menge. Eine Menge $T(M) = \{U_\alpha \mid U_\alpha \subseteq M\} \subseteq 2^M$ von Teilmengen von M bezeichnet man als eine Topologie [topology] auf M , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die leere Menge \emptyset und die Menge M selbst sind Elemente von $T(M)$.
2. Der Durchschnitt von endlich vielen Elementen aus $T(M)$ ist ebenfalls wieder ein Element von $T(M)$:

$$\forall U, V \in T \Rightarrow U \cap V \in T(M). \quad (3.79)$$

(Anmerkung: Wenn die Aussage für zwei beliebige Elemente richtig ist, gilt sie auch für eine beliebige endliche Anzahl von Elementen.)

3. Jede Vereinigung beliebig vieler Elemente aus $T(M)$ ist wieder ein Element aus $T(M)$:

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in T(M), \quad (3.80)$$

wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

Die Elemente von $T(M)$ nennen wir *offene Mengen* [open sets]. Die Menge M mit der Topologie $T(M)$, kurz (M, T) , bezeichnen wir als einen *topologischen Raum* [topological space]. Sei $x \in M$ ein Element der Menge M und $U \in T(M)$ mit $x \in U$, dann bezeichnet man U auch als *offene Umgebung* [open neighbourhood] von x .

Wie schon früher bezeichnen wir eine Teilmenge von M als *abgeschlossen*, wenn sie das Komplement einer offenen Menge von M ist, also

$$V \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \exists U \in T(M) : V = M \setminus U. \quad (3.81)$$

Wir hätten den Begriff der Topologie auch über abgeschlossene Mengen definieren können (und dann die offenen Mengen als die Komplemente von abgeschlossenen Mengen definiert). Das Axiomensystem dazu ist:

1. Die leere Menge \emptyset und die Menge M selbst sind abgeschlossen.
2. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
3. Der Durchschnitt beliebiger abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Es gibt zwei sehr einfache Topologien auf jeder Menge M . Die *triviale Topologie* [trivial topology] einer Menge M besteht nur aus der leeren Menge und M selbst: $T(M) = \{\emptyset, M\}$. Die *diskrete Topologie* [discrete topology] einer Menge M besteht aus allen Teilmengen, ist also die Potenzmenge von M : $T(M) = P(M)$.

Meist verwendet man sogenannte *Hausdorff-Topologien*. Eine Hausdorff-Topologie ist eine Topologie, bei der es zu je zwei verschiedenen Elementen $x_1, x_2 \in M$ immer zwei offene Umgebungen U_1 und U_2 gibt, sodass $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Diese Bedingung garantiert, dass wir zu je zwei verschiedenen Punkten in M immer disjunkte offene Umgebungen finden, die diese Punkte enthalten (man sagt auch, die Topologie *separiert* verschiedene Punkte). Diese Forderung bezeichnet man auch als *Trennungsaxiom* \mathbf{T}_2 .

Um auf der anderen Seite beispielsweise die diskrete Topologie ausschließen zu können, verlangen wir noch, dass jede offene Umgebung eine abgeschlossene Umgebung enthält, die wiederum eine offene Umgebung als echte Untermenge enthalten soll. Diese Bedingungen sind bei den schon definierten ϵ -Umgebungen immer erfüllt.

Innerhalb der reellen Zahlen (oder allgemeiner innerhalb von normierten Vektorräumen) mit der üblichen Abstandstopologie ist eine Menge, die nur ein Element enthält, immer abgeschlossen. Außerdem sind die beiden einzigen Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, die leere Menge und die Gesamtmenge selbst. Dass dies nicht generell für topologische Räume gilt, zeigt das Beispiel einer diskreten Topologie: Hier ist jede Teilmenge einer Menge M gleichzeitig offen und abgeschlossen.

Eine Menge $E \subset M$ ist abgeschlossen, wenn sämtliche Häufungspunkte von E auch Elemente von E sind. Ein Punkt x heißt *innerer Punkt*, wenn er eine (offene) Umgebung U hat, sodass $U \subset E$. Alle anderen Punkte von E heißen *Randpunkte*.

Die Begriffe „abgeschlossen“, „innerer Punkt“ und „Randpunkt“ entsprechen also ungefähr unseren Vorstellungen: Ein Randpunkt ist ein Punkt, der unmittelbar ans Äußere angrenzt, also nichts mehr zwischen sich und dem Außen hat, während ein innerer Punkt noch eine (möglicherweise kleine) Umgebung hat, die ganz im Inneren liegt.

Eine Menge $E \subset M$ ist offen, wenn jeder Punkt $x \in E$ eine Umgebung U hat, sodass $U \subset E$, d.h., wenn E nur innere Punkte besitzt.

Definition: Eine Menge E liegt *dicht* [dense] in M , wenn jeder Punkt von M ein Häufungspunkt von E ist, d.h., in jeder Umgebung eines Punktes von M liegen unendlich viele Punkte von E .

Genau dies ist beispielsweise für die rationalen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen der Fall: Jedes noch so kleine (offene) Intervall um eine beliebige reelle Zahl enthält unendlich viele rationale Zahlen.

Wie schon erwähnt, ist eine Teilmenge $E \subset M$ eines topologischen Raumes nicht immer entweder offen oder abgeschlossen. Diese beiden Begriffe sind also nicht komplementär in diesem Sinne. Hinsichtlich der üblichen Topologie auf \mathbb{R} ist beispielsweise die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ weder offen (kein Punkt besitzt eine offene Umgebung, die ganz in \mathbb{Q} liegt) noch abgeschlossen (es gibt Häufungspunkte

von \mathbb{Q} , die nicht in \mathbb{Q} liegen).

3.7.2 Kompakte Räume

Die Verallgemeinerung von abgeschlossenen Intervallen (oder endlichen Bereichen) in den reellen Zahlen sind sogenannte *kompakte topologische Räume* [*compact topological spaces*]. Wir beginnen mit der allgemeinen Definition für beliebige topologische Räume, schränken uns dann aber auf den \mathbb{R}^n ein. Das ist die Situation, mit der wir als Physiker noch am ehesten konfrontiert werden. (Dieser Abschnitt enthält keine Beweise.)

Sei (M, T) ein topologischer Raum (also M eine Menge und T eine Menge von Teilmengen, die auf M eine Topologie definieren), dann nennen wir eine (nicht notwendigerweise echte) Teilmenge $E \subseteq M$ *kompakt*, wenn jede Überdeckung von E mit offenen Teilmengen aus T ,

$$E \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \in T, \quad (3.82)$$

eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Das bedeutet, es gibt eine endliche Teilmenge $\{i_1, \dots, i_n\}$ der Indexmenge I , sodass $E \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Man beachte, dass diese Teilmengen U_i nicht disjunkt sein müssen (sie können sich teilweise überlappen). Wichtig ist, dass dies für *jede* Überdeckung gelten muss, es reicht nicht, dass es solche Überdeckungen gibt.

Der *Satz von Heine-Borel* besagt, dass jede Teilmenge des euklidischen Raums \mathbb{R}^n genau dann kompakt ist, wenn diese Teilmenge abgeschlossen und beschränkt ist. „Abgeschlossen“ hat hierbei die in Abschnitt 3.2.3 definierte Bedeutung, nämlich dass jeder Häufungspunkt der Menge auch wieder in der Menge liegt. Eine Teilmenge von \mathbb{R}^n (allgemeiner eines beliebigen metrischen Raums) heißt *beschränkt*, wenn sie sich durch eine Kugel mit endlichem Radius überdecken lässt.

Für kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^n gilt eine Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano und Weierstraß: Jede Folge in einer kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n besitzt mindestens einen Häufungspunkt in dieser Teilmenge. Dieser Häufungspunkt kann natürlich auch auf dem Rand der Teilmenge liegen, daher ist wichtig, dass wir kompakte Teilmengen betrachten.

Kapitel 4

Reelle und komplexe Zahlen

In diesem Kapitel verwende ich die Konzepte des letzten Kapitels, insbesondere den Begriff der Cauchy-Konvergenz, um den Schritt von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen zu gehen. Anschließend erweitere ich die reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen. Am Ende dieses Kapitels werde ich andeuten, wie man die reellen Zahlen auch über bestimmte Teilmengen von rationalen Zahlen definieren kann.

4.1 Konstruktive Definition von \mathbb{R}

Das Ziel dieses Abschnitts ist, die reellen Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen zu definieren. Dazu müssen wir zunächst klären, was überhaupt eine Vervollständigung ist.

4.1.1 Vervollständigung eines metrischen Raums

Gegeben seien zwei Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ in einer Menge M (mit einer Metrik d) und beide Folgen seien in M Cauchy-konvergent. Falls die Grenzwerte der Folgen nicht in M liegen, können wir zunächst nicht entscheiden, ob die beiden Folgen denselben Grenzwert haben.

Definition: Zwei Cauchy-konvergente Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ in M heißen *äquivalent*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(a_i, b_i) < \epsilon$ für alle $i > N$. Bei Folgen aus Elementen eines normierten Vektorraums können wir auch einfacher sagen, dass zwei Folgen äquivalent sind, wenn ihre Differenzfolge $\{(a_i - b_i)\}$ eine Nullfolge ist.

Wir können leicht zeigen, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt. Trivialerweise ist eine Folge $\{a_i\}$ zu sich selbst äquivalent. Falls $\{a_i\}$ äquivalent zu $\{b_i\}$ ist, gilt natürlich auch das Umgekehrte. Und falls $\{a_i\}$ äquivalent zu $\{b_i\}$ ist und die Folge $\{b_i\}$ äquivalent zu $\{c_i\}$, ist auch $\{a_i\}$ äquivalent zu $\{c_i\}$. Dazu

suchen wir einfach die Zahl N , sodass sowohl $d(a_i, b_i) < \epsilon/2$ als auch $d(b_i, c_i) < \epsilon/2$ für $i > N$ ist. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung, dass $d(a_i, c_i) < \epsilon$ für alle $i > N$.

Wie wir gezeigt haben, bedeutet eine Äquivalenzrelation aber auch, dass wir die Menge der Äquivalenzklassen betrachten können, in diesem Fall also die Menge aller Folgenklassen, wobei Folgen innerhalb einer Äquivalenzklasse denselben Grenzwert haben. Diese Menge aller Äquivalenzklassen von Folgen bezeichnen wir als die *Vervollständigung* [completion] von M . Und einen metrischen Raum, der sämtliche Grenzwerte Cauchy-konvergenter Folgen enthält, nennen wir *vollständig* [complete].

Der Begriff der Vervollständigung ist sicherlich zunächst fremdartig. Wir reden plötzlich von Mengen von Äquivalenzklassen von Folgen, also von Dingen, die mit M selbst scheinbar nicht mehr viel zu tun haben. Die Idee ist, dass man die Grenzwerte der Folgen in einer solchen Äquivalenzklasse als „Label“ dieser Äquivalenzklasse verwendet und somit die Vervollständigung einer Menge M in der Menge aller möglichen Grenzwerte von Folgen in M besteht.

Natürlich enthält in diesem Sinne diese Vervollständigung die Menge M als Teilmenge, denn jede Folge (a, a, a, \dots) mit einem konstanten Element $a \in M$ hat natürlich als Grenzwert das Element a und definiert somit die Äquivalenzklasse zu a . Doch die Vervollständigung enthält auch die Äquivalenzklassen von Folgen, die zwar Cauchy-konvergent sind, möglicherweise aber keinen Grenzwert in M haben.

4.1.2 Die reellen Zahlen

Wir betrachten nun konkret die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} mit der Abstandsfunktion $d(a, b) = |a - b|$ für $a, b \in \mathbb{Q}$ und definieren:

Definition: Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist die Vervollständigung der Menge \mathbb{Q} . \mathbb{R} ist also gleich der Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchy-konvergenten Folgen in \mathbb{Q} .

Nun haben wir zwar definiert, was die reellen Zahlen sind, doch es verbleibt zu zeigen, dass die so definierte Menge tatsächlich alle Eigenschaften hat, die wir von den reellen Zahlen erwarten. Dazu müssen wir eine Addition, eine Multiplikation sowie eine Ordnungsrelation definieren und anschließend zeigen, dass die bekannten Rechenregeln tatsächlich erfüllt sind. Wir belassen es hier bei ein paar Anmerkungen; einige der Beweise werden auf die Übungen verlegt.

1. Wir können zwei Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ (mit $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$) addieren, indem wir die Folge der Summen bilden: $\{(a_i + b_i)\}$, entsprechend definieren wir das Produkt als die Folge $\{(a_i b_i)\}$. Zunächst ist zu beweisen, dass die Summen und Produkte von Cauchy-konvergenten Folgen wieder Cauchy-konvergent sind. Dann ist zu zeigen, dass diese Summen und Produkte zu eindeutigen Äquivalenzklassen

gehören, also nicht nur Operationen auf einzelnen Folgen sind, sondern wohl definierte Operationen auf den Äquivalenzklassen darstellen. Dies haben wir, zumindest im Prinzip, in Abschnitt 3.3 gezeigt. Schließlich sollen die so definierte Addition und Multiplikation die üblichen Rechenregeln erfüllen (Assoziativität, Kommutativität, Distributivgesetz, Existenz von Inversen, etc.).

2. Wir definieren zu zwei Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ (mit $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$) eine Ordnungsrelation, indem wir sagen, $\{a_i\} > \{b_i\}$, wenn es ein $\epsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $i > N$ gilt $a_i > b_i + \epsilon$. Auch hier ist zu zeigen, dass es sich um eine sinnvolle Definition auf den Äquivalenzklassen handelt und zusammen mit der Addition und Multiplikation die üblichen Rechenregeln gelten. Außerdem muss die Vollständigkeit der Ordnungsrelation gezeigt werden, d.h. für je zwei Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ gilt entweder $\{a_i\} < \{b_i\}$ oder $\{a_i\} > \{b_i\}$ oder $\{a_i\} \equiv \{b_i\}$ (also $\{b_i - a_i\}$ ist eine Nullfolge).
3. Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen, da es für jede beliebige rationale Zahl (triviale) Folgen $\{a_i\}$ in \mathbb{Q} gibt, die diese rationale Zahl als Grenzwert haben.
4. Wir haben bei dem Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen angenommen, dass sich jede reelle Zahl als (eventuell unendliche) Dezimalfolge schreiben lässt. Auch dies wäre nun zu zeigen.

Die eine Richtung ist leicht: Jede unendliche Dezimalfolge von Zahlen definiert eine Cauchy-konvergente Folge von rationalen Zahlen: Zu einer unendlichen Dezimalfolge x definierten wir die Folge rationaler Zahlen $\{a_i\}$, indem a_i einfach die ersten i Nachkommastellen der Dezimalfolge umfassen soll (das ist immer eine rationale Zahl). Diese Folge ist Cauchy-konvergent und konvergiert gegen die unendliche Dezimalfolge.

Die umgekehrte Richtung ist etwas schwieriger: Jeder mögliche Grenzwert einer Cauchy-konvergenten Folge rationaler Zahlen lässt sich als unendliche Dezimalfolge schreiben. (Zum Beweis siehe z.B. [11].)

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass sämtliche Eigenschaften, die wir von den reellen Zahlen kennen, auch tatsächlich für die oben definierte Menge gelten.

Man kann beweisen, dass die Menge der reellen Zahlen der einzige vollständige Körper ist, der die rationalen Zahlen enthält und auf dem eine natürliche Ordnungsrelation definiert ist. „Natürlich“ bedeutet dabei, dass diese Ordnungsrelation mit den Rechenregeln verträglich ist, insbesondere gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z, \quad (4.1)$$

und falls $z > 0$ gilt auch

$$x < y \Leftrightarrow xz < yz. \quad (4.2)$$

Eine Ordnungsrelation mit diesen Eigenschaften gibt es auf der Menge der komplexen Zahlen nicht. Daher kann man die reellen Zahlen auch axiomatisch definieren als einen Zahlkörper mit den folgenden Eigenschaften:

1. Der Zahlkörper \mathbb{R} enthält die rationalen Zahlen \mathbb{Q} als Teilmenge.
2. Der Zahlkörper \mathbb{R} ist vollständig (kovergente Cauchy-Folgen haben ihre Grenzwerte in den reellen Zahlen).
3. Es gibt eine Ordnungsrelation, welche die beiden Bedingungen 4.1 und 4.2 erfüllt.

Dass die reellen Zahlen, so wie sie hier definiert wurden (als Vervollständigung um die Grenzwerte Cauchy-konvergenter Folgen), diese Bedingungen erfüllen, ist vergleichsweise leicht zu zeigen. Dass dies der einzige Zahlkörper mit den genannten Eigenschaften ist, ist schon schwerer zu beweisen.

4.1.3 Die n -te Wurzel

Für den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra wurde verwendet, dass die n -te Wurzel aus einer Zahl existiert. Wir wollen nun beweisen, dass es für eine positive reelle Zahl x genau eine positive reelle Zahl y gibt, sodass $y^n = x$. Man schreibt dann $y = \sqrt[n]{x}$ oder $y = x^{\frac{1}{n}}$.

Man kann den Beweis sehr abstrakt führen und die Existenz dieser Zahl y in \mathbb{R}^+ beweisen (vgl. Abschnitt 4.3.3). Ich werde hier einen konstruktiveren Weg einschlagen und einen Algorithmus angeben, wie man die n -te Wurzel berechnen kann.

Die Eindeutigkeit folgt aus den Eigenschaften der Ordnungsrelation. Wenn es zwei verschiedene positive reelle Zahlen y_1 und y_2 gäbe, sodass $y_1^n = y_2^n = x$, dann müsste entweder $y_1 < y_2$ oder $y_2 < y_1$ gelten (da $y_1 \neq y_2$ angenommen wurde und die Ordnungsrelation auf den reellen Zahlen vollständig sein soll). Dann folgt aus Gl. 4.2 aber auch $y_1^n < y_2^n$ oder $y_2^n < y_1^n$. Wir erhalten also einen Widerspruch.

Wir betrachten nun folgende Rekursionsformel:

$$y_{k+1} = \frac{1}{n} \left((n-1)y_k + \frac{x}{y_k^{n-1}} \right) \quad (4.3)$$

mit Startwert $y_0 = 1$. Sie liefert eine Folge von reellen Zahlen $\{y_k\}$, die gegen die n -te Wurzel von x konvergiert. Die Konvergenz ist sogar sehr schnell, allerdings wäre sie an dieser Stelle erst zu beweisen. Unter der Annahme der Konvergenz folgt sofort, dass y mit $y^n = x$ der Grenzwert der Folge ist, denn aus der Gleichung

$$y = \frac{1}{n} \left((n-1)y + \frac{x}{y^{n-1}} \right) \quad (4.4)$$

folgt $y^n = x$. Da die Menge der reellen Zahlen vollständig ist, liegt der Grenzwert dieser Folge in den reellen Zahlen und somit existiert die n -te Wurzel in \mathbb{R}^+ .

4.2 Die komplexen Zahlen

Historisch war der Weg zu den komplexen Zahlen [*complex numbers*] eine „schwere Geburt“ (wie übrigens auch der Weg zu den negativen Zahlen). Die Frage, wie man mit Wurzeln aus negativen Zahlen umgehen soll, wurde im 16. Jahrhundert dringlich, als sich die Mathematiker mit den Lösungen von kubischen und quartischen Gleichungen beschäftigten (das sind Gleichungen der Form $ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d = 0$, wobei n maximal 3 bzw. 4 sein soll). Zwar können auch bei quadratischen Gleichungen schon Wurzeln aus negativen Zahlen auftreten, doch hier kann man sich noch herauswinden und sagen, diese Lösungen „gebe es eigentlich nicht“. Doch bei kubischen Gleichungen war die Sache schwieriger: Es gibt kubische Gleichungen mit reellen Lösungen, die aber nach der allgemeinen Lösungsformel durch Wurzeln aus negativen Zahlen ausgedrückt werden. Die Lösung gibt es also offensichtlich als reelle Zahl, aber ihre Darstellung in der allgemeinen Lösungsformel enthält Wurzeln aus negativen Zahlen. Während beispielsweise Gerolamo Cardano (1501–1576) noch sehr ungerne mit diesen Wurzeln aus negativen Zahlen rechnete (es allerdings im Gegensatz zu vielen seiner Zeitgenossen notgedrungen tat und dadurch zu einem Begründer dieses mathematischen Zweiges wurde), betrachtete zwei Jahrhunderte später Leonhard Euler (1707–1783) die imaginären Zahlen (dieser Begriff wurde vermutlich von Descartes eingeführt, das Symbol $i = \sqrt{-1}$ stammt von Euler; der Begriff der komplexen Zahl wurde später von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) geprägt) als wesentlich und trug entscheidend zu ihrer Untersuchung bei.

4.2.1 Definition der komplexen Zahlen

Es gibt viele Wege, die komplexen Zahlen einzuführen. Ein mathematisch sehr eleganter Weg definiert die komplexen Zahlen als die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ mit folgender Addition und Multiplikation:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (4.5)$$

$$\text{und} \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (4.6)$$

Nun ist zu zeigen, dass alle Körperaxiome für diese beiden Operationen erfüllt sind.

Ein ähnlicher Weg definiert formal eine neue Zahl $i = \sqrt{-1}$, oder, besser ausgedrückt, eine Lösung der algebraischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$, die man mit i bezeichnet. Nun erweitert man die reellen Zahlen um diese neue Zahl, wobei beliebige Summen und Produkte (mit der Bedingung $i^2 = -1$) ebenfalls in der neuen Menge erhalten sein

sollen. Auf diese Weise gelangt man zu folgender Darstellung: Jede komplexe Zahl lässt sich in der Form $z = x + iy$ schreiben. Die Rechenregeln lauten für $z_i = x_i + iy_i$:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (4.7)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) + i^2y_1y_2 \quad (4.8)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (4.9)$$

Man erkennt sofort, dass die beiden Definitionen äquivalent sind. Wir werden im Folgenden die letztere Notation wählen, da sie in der Physik die geläufigere ist.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch eine dritte Möglichkeit, die komplexen Zahlen einzuführen, die manchmal in der Physik eine Rolle spielt. Wir betrachten alle 2×2 Matrizen der Form

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Die üblichen Regeln zur Addition und Multiplikation von Matrizen liefern:

$$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (x_1y_2 + x_2y_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Offenbar erfüllen diese Matrizen dieselben Regeln, wie die oben angegebenen Zahlenpaare bzw. Zahlen der Form $x + iy$.

Für $z = x + iy$ bezeichnet man x als den *Realteil* [*real part*] von z und schreibt $\operatorname{Re}(z) = x$ und y als den *Imaginärteil* [*imaginary part*] von z , also $\operatorname{Im}(z) = y$.

4.2.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Wir werden nicht alle Rechenregeln im Detail herleiten, aber auf einige nicht ganz so selbstverständliche Regeln möchte ich kurz eingehen.

Es ist beispielsweise nicht offensichtlich, dass die Multiplikation assoziativ ist. Es gilt

$$z_1 z_2 z_3 = x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 + i(x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3). \quad (4.15)$$

Dass die Klammersetzung keine Rolle spielt, kann man sich nun leicht überlegen. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist natürlich die reelle Zahl $1 = 1 + i0$.

Bevor wir die Division betrachten, führe ich noch ein neues Konzept ein: Auf der Menge der komplexen Zahlen kann man eine *Involution* [*involution*] (eine Abbildung, deren Quadrat – also die zweimalige Hintereinanderausführung – die Identität ergibt) definieren, die man als *komplexe Konjugation* [*complex conjugation*] bezeichnet. Die zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ *komplex konjugierte Zahl* ist $z^* = x - iy$ (manchmal schreibt man statt z^* auch \bar{z}). Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer komplex konjugierten Zahl ist eine reelle Zahl:

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (4.16)$$

Die Wurzel daraus bezeichnet man als den *Betrag* [*absolute value*] der komplexen Zahl:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.17)$$

Nach dem Satz des Pythagoras ist der Betrag einer komplexen Zahl offensichtlich der Abstand des Punktes (x, y) in der Ebene vom Nullpunkt. Damit erhalten wir für den Vektorraum \mathbb{C}^n für einen Vektor $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ die Standardnorm:

$$\|z\| = \sqrt{z_1 \cdot z_1^* + z_2 \cdot z_2^* + \dots + z_n \cdot z_n^*}. \quad (4.18)$$

Eine wichtige Beziehung, die man leicht nachrechnen kann, ist:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \quad (4.19)$$

Das bedeutet (unter anderem): Das Produkt von zwei komplexen Zahlen verschwindet dann und nur dann, wenn eine der beiden komplexen Zahlen 0 ist.

Wir berechnen nun das zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ inverse Element bezüglich der Multiplikation:

$$z^{-1} = \frac{1}{(x + iy)} = \frac{(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{(x^2 + y^2)}(x - iy) = \frac{z^*}{|z|^2}. \quad (4.20)$$

Man erkennt, dass z^{-1} für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ existiert und lediglich die Zahl 0 kein inverses Element besitzt.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass man mit den komplexen Zahlen ebenso rechnen kann, wie mit den reellen Zahlen, und dass sämtliche Rechenregeln weiterhin gelten. Die komplexen Zahlen haben sogar den Vorteil, dass sie *algebraisch abgeschlossen* [*algebraically closed*] sind. Dies besagt der Fundamentalsatz der Algebra: Die Lösungen einer beliebigen Polynomgleichung

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = 0 \quad (a_k \in \mathbb{C}) \quad (4.21)$$

liegen wieder in der Menge der komplexen Zahlen. Jedes solche Polynom n . Grades hat auch genau n algebraische Lösungen, d.h., es lässt sich in der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k) \quad (4.22)$$

schreiben, wobei $z_k \in \mathbb{C}$ die *Wurzeln* [roots] dieses Polynoms $p(z)$ sind (die Nullstellen der Polynomgleichung $p(z) = 0$). Dieselbe komplexe Zahl kann natürlich auch mehrfach als Wurzel auftreten.

4.2.3 Die Euler'sche Formel

Die Euler'sche Formel stellt eine Beziehung zwischen der Exponentialfunktion einer komplexen Zahl und ihrer Standarddarstellung in der Form $x + iy$ her. Sie lautet:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (4.23)$$

Der Beweis kann auf mehrere Weisen erfolgen.

1. Kennt man die Potenzreihenentwicklungen der Exponentialfunktion sowie vom Sinus und Kosinus, kann man die Gleichheit der beiden Seiten direkt nachprüfen:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n x^{2n} \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Hierbei (wie auch bei ähnlichen Beweisen für die Exponentialfunktion bestimmter Matrizen) nutzt man aus, dass für die imaginäre Einheit folgende Regeln gelten:

$$i^n = \begin{cases} (-1)^n & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \\ (-1)^n i & \text{für } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (4.24)$$

2. Nutzt man die Standardregel $e^0 = 1$, dann sollte e^{ix} für $x = 0$ den Wert 1 haben. Die Ableitungsregeln ergeben

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = i e^{ix}, \quad (4.25)$$

also $f'(x) = i f(x)$ für $f(x) = e^{ix}$. Das gleiche Ergebnis erhält man auch für $f(x) = \cos x + i \sin x$. Und da die Funktionen bei $x = 0$ übereinstimmen, ist das Ergebnis eindeutig.

Diese Herleitung ist zwar sehr elegant, erfordert aber die Kenntnis der Ableitungsregeln sowie Eindeutigkeitssätze zu Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

3. Nach den üblichen Potenzregeln $a^x a^y = a^{x+y}$ sollte $z = e^{ix}$ den Betrag 1 haben und bei $x = 0$ den Wert 1 annehmen. Damit kann man zeigen, dass $e^{ix} = \cos f(x) + i \sin f(x)$ sein muss, wobei $f(x)$ eine reelle Funktion von x ist und $f(0) = 0$ ist. Aus den Additionstheoremen des Sinus und Kosinus kann man dann $f(x) = ax$ ableiten, wobei a eine noch offene Konstante ist. Diese Konstante kann man erst festlegen, wenn man Eigenschaften der Eulerzahl e verwendet oder weiß, dass für sehr kleine Werte von x die Exponentialfunktion die Entwicklung $e^x = 1 + x + \dots$ hat.

Damit ist die Exponentialfunktion von einer beliebigen komplexen Zahl:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (4.26)$$

4.2.4 Die Polardarstellung komplexer Zahlen

Die Euler-Formel gibt uns zwei Möglichkeiten an die Hand, eine komplexe Zahl algebraisch darzustellen: Einmal in der Standarddarstellung (oder auch Koordinatendarstellung) als Summe aus einem Real- und einem Imaginärteil, $z = x + iy$, und einmal durch einen Winkel und den Betrag der komplexen Zahl (siehe Abb. 4.1):

$$z = x + iy = r \exp(i\varphi) = r \cos \varphi + i r \sin \varphi. \quad (4.27)$$

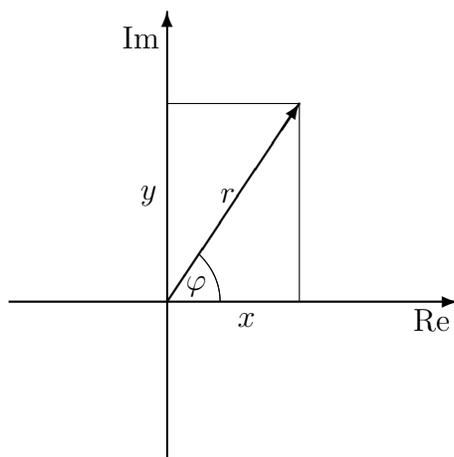


Abbildung 4.1: Darstellung einer komplexen Zahl durch ihren Real- und Imaginärteil $z = x + iy$ oder in der Polardarstellung durch den Betrag und den Winkel zur x -Achse: $z = r \exp(i\varphi)$.

Offensichtlich gilt:

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi \quad (4.28)$$

und umgekehrt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.29)$$

Man bezeichnet r als den Betrag von z und φ als das Argument von z und schreibt $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$.

Die Polardarstellung ist oft von Vorteil, wenn man das Produkt von Vektoren darstellen möchte:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (4.30)$$

Der Absolutbetrag des Produkts ist gleich dem Produkt der Absolutbeträge und die Winkel addieren sich einfach. Insbesondere erhält man für die n -te Potenz einer komplexen Zahl:

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \quad (4.31)$$

Für spezielle Winkel erhält man folgende Identitäten:

$$\exp(2\pi in) = 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.32)$$

$$\exp(\pi i) = -1 \quad \text{und} \quad \exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i. \quad (4.33)$$

Mit diesen Identitäten findet man sofort:

$$i^i = \left(\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right)\right)^i = \exp\left(\frac{\pi}{2}i \cdot i\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx 0,20788 \quad (4.34)$$

oder allgemeiner für $z = r e^{i\varphi}$:

$$z^i = (r \exp(i\varphi))^i = r^i \exp(i\varphi i) = \exp(-\varphi) \exp(i \ln r). \quad (4.35)$$

Allerdings gibt es hier eine Mehrdeutigkeit, da z.B.

$$i = \exp\left(\frac{\pi}{2}i + 2\pi in\right) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.36)$$

und somit

$$i^i = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi n\right). \quad (4.37)$$

Das Potenzieren mit nicht ganzen Zahlen führt also zu Mehrdeutigkeiten, die (unter anderem) Thema der Funktionentheorie sind.

Die Lücken im Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

Wir hatten bei dem Fundamentalsatz der Algebra behauptet, dass jede komplexe Funktion $f(z)$ mindestens eine Nullstelle hat. Für den Beweis wurde verwendet, dass $|f(z)|$ in einem kompakten Gebiet ein Minimum hat, und dass dieses Minimum nur $|f(z)| = 0$ sein kann.

Es gab in dem Beweis noch einige Lücken, die wir jetzt teilweise schließen können. Zunächst folgt natürlich aus $|f(z)| = 0$ auch $f(z) = 0$, d.h., der Absolutwert einer komplexen Zahl definiert eine Norm und verschwindet nur, wenn die Zahl selbst verschwindet.

Außerdem hatten wir verwendet, dass $z^k = a$ immer eine Lösung hat (wir hatten a reell gefordert, allerdings nicht unbedingt $a \geq 0$, das spielt aber für das Folgende keine Rolle). Mithilfe der Euler'schen Formel können wir diese Lösung explizit angeben. Wir schreiben $a = re^{i\varphi}$ und dann lautet eine Lösung

$$z = \sqrt[k]{r} \exp\left(i\frac{\varphi}{k}\right). \quad (4.38)$$

An dieser Stelle ist wichtig, dass zu jeder positiven reellen Zahl r eine k .te Wurzel in den positiven reellen Zahlen existiert, was in Abschnitt 4.1.3 gezeigt wurde.

Allerdings findet man nicht nur eine Zahl z mit der Eigenschaft, dass $z^k = a$. Wegen der im letzten Abschnitt erwähnten Freiheit in der Wahl des Arguments (des Winkels φ) ist jede Zahl

$$z = \sqrt[k]{r} \exp\left(i\frac{(\varphi + 2\pi n)}{k}\right) \quad (4.39)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung $z^k = a$. Man überzeugt sich leicht, dass es k verschiedene Lösungen dieser Form gibt. Sie bilden ein regelmäßiges k -Polygon auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[k]{r}$.

4.3 Schranken und Schnitte

In Mengen, auf denen eine vollständige Ordnungsrelation definiert ist (beispielsweise in der Menge der rationalen oder reellen Zahlen) lassen sich kompakte Räume auch durch Schranken definieren. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, ob es kleinste bzw. größte Schranken gibt. Mit diesen Begriffen lassen sich dann die reellen Zahlen auch über sogenannte Dedekind'sche Schnitte definieren.

4.3.1 Schranken

Definitionen: Sei M eine Menge mit einer vollständigen Ordnungsrelation und $A \subset M$ eine Teilmenge von M .

- (1) Wir sagen, $x \in M$ ist eine *obere Schranke* [*upper bound*] für A , sofern für alle Elemente $a \in A$ gilt: $a < x$.
- (2) Entsprechend heißt $x \in M$ *untere Schranke* [*lower bound*] von A , sofern $x < a$ für alle $a \in A$.
- (3) Wir nennen x eine *kleinste obere Schranke* [*smallest upper bound*] oder auch *Supremum* für A , wenn es kein anderes Element $y \in M$ gibt, sodass $y < x$ und y ebenfalls

obere Schranke von A ist. Falls es eine kleinste obere Schranke für eine Menge $A \subset M$ gibt, ist das Supremum somit eindeutig.

(4) Entsprechend nennen wir x eine *größte untere Schranke* [*largest lower bound*] oder *Infimum* für eine Menge $A \subset M$, wenn es kein $y > x$ gibt, sodass auch y eine untere Schranke für A ist.

(5) Der Vollständigkeit halber definieren wir zwei weitere Begriffe, die wir jedoch nicht weiter verwenden werden: Ein Element $x^* \in M$ heißt *limes superior* zu einer Folge $\{a_i\}$, wenn x^* ein Häufungspunkt von $\{a_i\}$ ist und nur endlich viele Element von $\{a_i\}$ die Eigenschaft haben, dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt: $a_i > x^* + \epsilon$. Mit anderen Worten, ein limes superior ist der größte Häufungspunkt (sofern er existiert) einer Folge. Entsprechend ist ein *limes inferior* der kleinste Häufungspunkt einer Folge. Ist eine Folge konvergent (d.h., besitzt sie einen Grenzwert), dann ist der Grenzwert sowohl Limes superior als auch Limes inferior dieser Folge.

Beispiele:

1. Wir betrachten die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} mit der oben definierten Ordnungsrelation. In \mathbb{Q} definieren wir eine Teilmenge als die Menge aller Zahlen, die kleiner sind als 1 und größer als 0. Diese Menge bezeichnen wir mit $A_1 = \{a \in \mathbb{Q} | 0 < a < 1\}$. Offenbar ist jede rationale Zahl größer oder gleich 1 eine obere Schranke von A , und 1 ist die kleinste obere Schranke von A . Umgekehrt ist jede negative rationale Zahl sowie auch die Zahl 0 eine untere Schranke von A , und 0 ist die größte untere Schranke von A .

In diesem Beispiel sind die kleinste untere Schranke sowie die größte obere Schranke von A ebenfalls rationale Zahlen (1 und 0).

2. Wir betrachten nun alle rationalen Zahlen, deren Quadrat kleiner ist als 2, also $A_2 = \{a \in \mathbb{Q} | a^2 < 2\}$.

Alle rationalen Zahlen größer als 2 sind eine obere Schranke für A_2 , aber auch alle rationalen Zahlen größer als 1,5 oder alle rationalen Zahlen größer als 1,42. Es erhebt sich die Frage, ob es auch eine kleinste obere Schranke für A_2 in \mathbb{Q} gibt. Wie wir gleich beweisen werden, ist das nicht der Fall. Es gibt zwar eine kleinste obere Schranke für A_2 als Teilmenge der reellen Zahlen, nämlich die reelle Zahl $\sqrt{2}$, doch wie wir schon bewiesen haben (S. 24), ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

Es gibt also Teilmengen von \mathbb{Q} , die obere Schranken in \mathbb{Q} haben, die aber innerhalb von \mathbb{Q} keine kleinste obere Schranke haben.

Es soll bewiesen werden, dass die Menge $A_2 = \{a \in \mathbb{Q} | a^2 < 2\}$ keine kleinste obere Schranke in der Menge der rationalen Zahlen besitzt. Gleichzeitig wird auch

bewiesen, dass es keine größte rationale Zahl in A_2 gibt. Der folgende Beweis stammt aus [15].

Wir nehmen an, es gäbe eine kleinste obere Schranke für A_2 in der Menge der rationalen Zahlen, die wir mit p bezeichnen. Dann konstruieren wir eine neue rationale Zahl q mit den Eigenschaften, kleiner als p zu sein und trotzdem ebenfalls eine obere Schranke von A_2 zu sein. Umgekehrt, falls p ein Element von A_2 ist, werden wir zeigen, dass es ein weiteres Element q von A_2 gibt, das größer ist als p . Insofern kann A_2 kein größtes Element (in der Menge der rationalen Zahlen) enthalten.

Es sei p eine rationale Zahl. Wir konstruieren eine neue rationale Zahl:

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2}. \quad (4.40)$$

Falls $p^2 > 2$ (also p eine obere Schranke von A_2 ist) ist offensichtlich $q < p$; umgekehrt, falls $p^2 < 2$ (also $p \in A_2$), ist offensichtlich $q > p$. Da

$$q = \frac{2p + 2}{p + 2}, \quad (4.41)$$

folgt

$$q^2 - 2 = \frac{(4p^2 + 8p + 4) - 2(p^2 + 4p + 4)}{(p + 2)^2} = \frac{2p^2 - 4}{(p + 2)^2} = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}. \quad (4.42)$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $p^2 > 2$: In diesem Fall ist offensichtlich auch $q^2 > 2$ und somit sind p und q obere Schranken von A_2 . Wie wir oben schon gesehen haben, ist aber $q < p$ und somit ist q eine kleinere obere Schranke von A_2 . Da sich diese Argumentation für jede beliebige rationale Zahl p durchführen lässt (und in diesem Fall auch q rational ist), gibt es keine kleinste obere Schranke für A_2 in der Menge der rationalen Zahlen.
2. $p^2 < 2$: In diesem Fall ist auch $q^2 < 2$ und somit $q \in A_2$. Da $q > p$ bedeutet dies, dass es in A_2 kein größtes Element gibt.

Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist somit *dicht* (d.h., zwischen je zwei rationalen Zahlen gibt es weitere rationale Zahlen, oder, im Einklang mit unserer früheren Definition, zu jeder rationalen Zahl gibt es in jeder ϵ -Umgebung unendlich viele weitere rationale Zahlen), aber bezüglich oberer und unterer Schranken sind die rationalen Zahlen nicht vollständig.

Man sagt, eine Menge M besitzt die *Supremumseigenschaft*, wenn für jede nach oben beschränkte nicht-leere Teilmenge $\alpha \subset M$ ihre kleinste obere Schranke ein Element aus M ist. Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} besitzen die Supremumseigenschaft nicht. Durch die Hinzunahme aller Grenzwerte von Folgen sind die reellen Zahlen in dem genannten Sinne vollständig: Sie besitzen die Supremumseigenschaft.

4.3.2 Dedekind'sche Schnitte

Zum Abschluss dieses Kapitels soll kurz angedeutet werden, wie man die reellen Zahlen über bestimmte Teilmengen der rationalen Zahlen definieren kann. Das Verfahren geht auf den Mathematiker Richard Dedekind (1831–1916) zurück und beruht auf einer Konstruktion, die man als *Dedekind'scher Schnitt* [*Dedekind's cut*] bezeichnet. Die hier angegebene Form wird beispielsweise in [15] behandelt.

Wir definieren bestimmte Teilmengen $\alpha \subset \mathbb{Q}$ durch folgende Eigenschaften:

1. α ist nicht gleich der leeren Menge \emptyset und jedes α besitzt in \mathbb{Q} eine obere Schranke.
2. Für jedes α gilt: Sei $p \in \alpha$ und $q < p$, dann ist auch $q \in \alpha$.
3. Zu jedem $p \in \alpha$ gibt es ein $r \in \alpha$, sodass $p < r$.

Die erste Bedingung bedeutet, dass jede der Teilmengen α nach oben beschränkt ist. Die zweite Bedingung bedeutet, dass eine Teilmenge α mit jedem Element $p \in \alpha$ auch alle kleineren Elemente enthält, also nach unten unbeschränkt ist und auch keine Lücken (in \mathbb{Q}) hat. Die dritte Bedingung bedeutet, dass α nach oben offen ist bzw. kein größtes Element enthält.

Es ist offensichtlich, dass jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ über die Definition $\alpha_x = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$ eine solche Menge definiert. Man kann jedoch umgekehrt auch die Menge der reellen Zahlen als die Menge dieser Teilmengen $\alpha \subset \mathbb{Q}$ definieren. Dazu muss man auf diesen Teilmengen eine Ordnungsrelation angeben: Es sei $\alpha < \beta$, wenn α eine echte Teilmenge von β ist. Eine Addition und Multiplikation von zwei solchen Mengen α und β , welche den obigen Bedingungen genügen, wird folgendermaßen definiert: Die Menge $\alpha + \beta$ enthält alle Elemente $p + q$, bei denen $p \in \alpha$ und $q \in \beta$; entsprechend enthält die Menge $\alpha\beta$ alle Elemente $p \cdot q$ mit $p \in \alpha$ und $q \in \beta$.

Den Beweis, dass diese Menge die Eigenschaften der reellen Zahlen hat, findet man beispielsweise in [15].

4.3.3 Nochmals die n -te Wurzel

In Abschnitt 4.1.3 wurde bewiesen, dass es zu jeder positiven reellen Zahl x (genau) eine positive reelle Zahl y gibt, sodass $y^n = x$. Der Beweis war konstruktiv in dem Sinne, dass ein Algorithmus angegeben wurde, wie man eine Folge von $\{y_k\}$ konstruieren kann, deren Grenzwert das gesuchte y ist. Wir haben den Beweis für die Konvergenz dieser Folge aber „unterschlagen“.

Letztendlich beruhen alle Beweise für die Existenz dieser Wurzel auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Die meisten Beweise zeigen zunächst, dass es Zahlen t gibt, für die $t^n < x$, und man betrachtet die Menge all dieser Zahlen. Ebenso gibt es Zahlen t' für die gilt $t'^n > x$ und man betrachtet die Menge dieser Zahlen. Die erste

Menge besitzt obere Schranken, die zweite Menge besitzt untere Schranken. Da die Menge der reellen Zahlen vollständig ist, müssen diese Schranken in der Menge der reellen Zahlen sein und die kleinste obere Schranke der ersten Menge ist gleich der größten unteren Schranke der zweiten Menge. Die Beweis beruht also im Wesentlichen auf der Definition der reellen Zahlen über Dedekind'sche Schnitte.

Kapitel 5

Stetigkeit und Ableitung

In diesem Kapitel werden wir uns mit Funktionen und einigen ihrer Eigenschaften beschäftigen. Ziel ist die Definition des Begriffs der stetigen Funktionen und ihrer Ableitungen. Dabei werden wir fast ausschließlich Funktionen über Teilmengen der reellen Zahlen, manchmal auch Funktionen über Teilmengen des \mathbb{R}^k betrachten. Funktionen über den komplexen Zahlen sind Gegenstand der Funktionentheorie und werden ausführlicher in Kapitel 11 behandelt.

In Kapitel 1.6 wurde schon der allgemeine Begriff der Funktion oder Abbildung definiert. Daher beginnen wir gleich mit dem Begriff der Stetigkeit.

5.1 Stetige Abbildungen

Es folgt zunächst eine sehr abstrakte Definition von Stetigkeit, die für Abbildungen zwischen beliebigen topologischen Räumen (siehe Kap 3.7) anwendbar ist. Anschließend betrachte ich zwei Definitionen, die einen metrischen Raum voraussetzen (wobei die Metrik dann eine Topologie definiert). Letztendlich werden wir uns jedoch auf Abbildungen zwischen \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^n (oder auch \mathbb{C}^n) einschränken und die Metrik wird immer durch die Standardnorm auf diesen Vektorräumen gegeben sein.

Definition (Umgebungsstetigkeit): Es seien M_1 und M_2 topologische Räume (mit den Topologien T_1 und T_2) und $f : U \subset M_1 \rightarrow M_2$ eine Abbildung von einer offenen Teilmenge U aus M_1 in die Menge M_2 . Eine solche Abbildung heißt stetig [continuous] in U , wenn das Urbild von jeder offenen Menge in M_2 eine offene Menge in M_1 ist. Anders ausgedrückt: f heißt stetig, wenn für alle $X \in T_2$ gilt: $f^{-1}(X) \in T_1$.

Eine bijektive stetige Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ zwischen zwei topologischen Räumen M_1 und M_2 bezeichnet man als *Homöomorphismus* [homeomorphism]. In diesem Sinne sind Homöomorphismen die *Isomorphismen* [isomorphisms] (allgemein strukturerhaltende bijektive Abbildungen) für topologische Räume. (Man verwechsle

den Homöomorphismus nicht mit dem *Homomorphismus* [*homomorphism*], der allgemein eine strukturerhaltende, nicht unbedingt bijektive Abbildung bezeichnet.) Wenn es eine solche Abbildung gibt, sind die beiden Mengen M_1 und M_2 hinsichtlich ihrer topologischen Struktur gleich.

Die folgenden zwei Definitionen verwenden zwar der Begriff der Norm bzw. der Konvergenz einer Folge in einem Vektorraum (sie lassen sich also auf Funktionen über \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n anwenden), doch sie lassen sich ebenso für beliebige metrische Räume verallgemeinern. Man kann zeigen, dass die beiden Definitionen äquivalent sind.

Definition (Folgenstetigkeit): Eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (U offen) heißt stetig im Punkte x , wenn für jede Folge $\{x_i\}$ mit x als Grenzwert die Folge $\{f(x_i)\}$ den Grenzwert $f(x)$ hat. Die Funktion f heißt stetig in U , wenn sie für alle $x \in U$ stetig ist.

Definition (Epsilon-Delta-Stetigkeit): Eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (U offen) heißt stetig im Punkte x , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass aus $\|x - y\| < \delta$ folgt $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$.

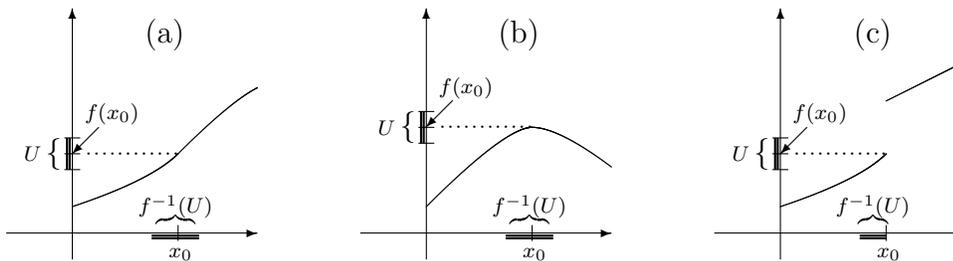


Abbildung 5.1: (a) und (b): Bei einer stetigen Funktion ist das Urbild $f^{-1}(U)$ einer offenen Menge U wieder eine offene Menge. (c) Bei einer nicht-stetigen Funktion ist eines der Urbilder einer offenen Menge an einer Sprungstelle selbst keine offene Menge sondern ist abgeschlossen am Punkt x_0 , an dem der Sprung auftritt.

Man kann sich leicht überlegen, dass beide Definitionen nahezu wörtlich für Funktionen $f : M_1 \rightarrow M_2$, wobei es sich bei M_1 und M_2 um metrische Räume mit den Abstandsfunktionen d_1 und d_2 handelt, übernommen werden können, wenn wir $\|x - y\|$ durch $d_1(x, y)$ und $\|f(x) - f(y)\|$ durch $d_2(f(x), f(y))$ ersetzen.

Im nächsten Abschnitt zeige ich, dass die Folgenstetigkeit äquivalent zur Epsilon-Delta-Stetigkeit ist. Daher unterscheidet man gewöhnlich nicht zwischen diesen beiden Formen von Stetigkeit und spricht auch vom *Folgenkriterium* und *Epsilon-Delta-Kriterium* für Stetigkeit. Die Umgebungsstetigkeit ist äquivalent zu den beiden anderen Definitionen von Stetigkeit, sofern offene Umgebungen in einem metrischen Raum über offene Bälle definiert werden (wie wir das in Kap. 3 getan haben). Im Allgemeinen hängt die Form der Stetigkeit sehr von den gewählten Topologien im Bild und

Urbildraum ab: Hat der Urbildraum die diskrete Topologie, sind alle Funktionen stetig. Das gleiche gilt, wenn der Bildraum die triviale Topologie hat. Hat der Bildraum die diskrete Topologie, der Urbildraum aber eine gröbere Topologie, kann es sein, dass nur die konstanten Funktionen stetig sind. Ich verwende im \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n jedoch immer die Standardtopologie, die durch die Standardnorm (Gl. 3.8 bzw. 4.18) induziert wird.

Die folgenden Anmerkungen dienen zunächst einer Veranschaulichung der Konzepte.

1. Man beachte, dass sich die Definition der Umgebungsstetigkeit auf die gesamte Abbildung bezieht, wohingegen die anderen beiden Definitionen die Stetigkeit zunächst nur in einem Punkt definieren.
2. Unserer Anschauung am nächsten ist vermutlich das Folgenkriterium: Wenn man sich auf der x -Achse einem Punkt x nähert, sollte sich auch der Funktionswert von f dem Punkt $f(x)$ nähern. Dies ist z.B. in Abb. 5.1(c) nicht der Fall, wenn man Folgen wählt, die sich von rechts dem Punkt x_0 nähern. Anschaulich bedeutet dieses Kriterium, dass die Funktion keine Sprünge macht, wenn sich der x -Wert wenig ändert. Wichtig ist auch, dass die Bedingung für *alle* Folgen erfüllt sein muss. Das heißt insbesondere auch, dass man sich dem Punkt von beiden Seiten nähern kann und entlang beliebiger Schritte.

Ein Beispiel für eine Funktion, bei der verschiedene Nullfolgen des Arguments (also Folgen in x , die 0 als Grenzwert haben) zu verschiedenen Grenzwerten in $f(x)$ führen (und die daher bei 0 nicht stetig ist), ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} . \quad (5.1)$$

Die folgenden 0-Folgen

$$x_n = \frac{1}{x + 2\pi n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

haben als Bild konstant den Wert $\sin x$. Verschiedene 0-Folgen konvergieren also gegen verschiedene Werte (und natürlich kann man auch 0-Folgen konstruieren, für die die Bildwerte überhaupt nicht konvergieren).

3. Definition (3) (das Epsilon-Delta-Kriterium) besagt im Wesentlichen, dass das Urbild jeder ϵ -Umgebung um $f(x)$ eine δ -Umgebung um x enthalten muss. Das ist schon sehr nahe der Umgebungsdefinition von Stetigkeit, wonach das Urbild jeder offenen Umgebung selbst wieder offen sein muss. Eine ϵ -Umgebung bzw. δ -Umgebung eines bestimmten Punktes ist eine spezielle offene Umgebung (die einem verallgemeinerten Kreis bzw. einer verallgemeinerten Kugel

um diesen Punkt entspricht), daher kann man nicht erwarten, dass das Urbild einer ϵ -Umgebung selbst eine δ -Umgebung ist. Aber wenn das Urbild der ϵ -Umgebung nicht offen wäre sondern einen Randpunkt enthielte, könnte man eine ϵ -Umgebung um das Bild dieses Randpunktes wählen, und das zugehörige Urbild würde keine δ -Umgebung enthalten. Nur eine offene Menge hat die Eigenschaft, dass sämtliche Punkte eine offene Umgebung in dieser Menge haben. Damit ist die Beziehung zwischen Definition (1) und (3) deutlich.

Abb. 5.1(c) zeigt eine Funktion, die bei x_0 einen Sprung hat. Man erkennt, dass eine beliebig kleine Umgebung U um den Bildpunkt $f(x_0)$ immer ein Urbild hat, das bei x_0 abgeschlossen ist. Da das Urbild von jeder Umgebung um $f(x_0)$ den Punkt x_0 enthalten muss, gibt es offensichtlich Fälle, bei denen diese Urbilder keine offenen Umgebungen von x_0 enthalten können.

5.1.1 Beweis der Äquivalenz von Folgen- und Epsilon-Delta-Stetigkeit

Wir beweisen die Äquivalenz der beiden Stetigkeitsdefinitionen, indem wir zunächst zeigen, dass aus dem ϵ - δ -Kriterium die Folgenstetigkeit folgt. Anschließend beweisen wir die umgekehrte Richtung.

(1) Aus ϵ - δ -Stetigkeit folgt Folgenstetigkeit:

Das ϵ - δ -Kriterium sei für eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle x erfüllt. Gegeben sei eine beliebige Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert x . Es ist zu zeigen, dass dann auch $\{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert $f(x)$ hat. Dazu ist zu zeigen, dass es zu jedem beliebigen $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\|f(x_i) - f(x)\| < \epsilon$ für alle $i \geq N$. Wir wählen nun $\delta > 0$ so, dass das ϵ - δ -Kriterium erfüllt ist, also dass für alle x_i mit $\|x_i - x\| < \delta$ gilt $\|f(x_i) - f(x)\| < \epsilon$. Nun wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $i > N$ die Bedingung $\|x - x_i\| < \delta$ erfüllt ist (ein solches N muss es immer geben, da die Folge $\{x_i\}$ den Punkt x als Grenzwert hat). Für dieses N gilt dann aber auch $\|f(x_i) - f(x)\| < \epsilon$ für alle $i > N$. (qed \simeq quod erat demonstrandum \simeq was zu zeigen war, oder, genauer „was das zu Zeigende war“.)

(2) Aus der Folgenstetigkeit folgt das ϵ - δ -Kriterium:

Diesen Beweis führen wir durch Widerspruch. Wir nehmen die Folgenstetigkeit an, behaupten aber gleichzeitig, dass es ein $\epsilon_0 > 0$ gibt, sodass wir kein $\delta > 0$ finden können, sodass für $\|x - y\| < \delta$ die Bedingung $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon_0$ erfüllt ist. Anders ausgedrückt, es soll ein $\epsilon_0 > 0$ geben, sodass für alle $\delta > 0$ und $\|x - y\| < \delta$ trotzdem $\|f(y) - f(x)\| \geq \epsilon_0$ folgt. Das würde aber das Folgenkriterium verletzen, denn es muss ja zu einer Folge $\{x_i\}$, die gegen x konvergiert, für *alle* $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass $\|x_i - x\| < \delta$ für alle $i > N$. Wegen des Folgenkriteriums muss es dann aber auch für

jedes ϵ ein $K \in \mathbb{N}$ geben, sodass $\|f(x_i) - f(x)\| < \epsilon$ für alle $i > K$. Insbesondere muss das auch für unser ϵ_0 gelten, womit wir zu einem Widerspruch gelangen.

5.1.2 Stetigkeitsregeln

Weiß man, dass Funktionen an bestimmten Stellen (oder in bestimmten Bereichen) stetig sind, so kann man dies auch für bestimmte Kombinationen dieser Funktionen schließen:

Sind zwei Funktionen $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $x_0 \in U$, dann folgt:

1. Die Funktion $\alpha f + \beta g$ ist stetig in x_0 für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Diese Eigenschaft gilt auch allgemeiner für Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.)
2. Die Funktion $f \cdot g$ ist stetig in x_0 .
3. Für $g(x_0) \neq 0$ ist auch die Funktion f/g stetig in x_0 . (Achtung: Diese Funktion ist nur in einem Bereich um x_0 definiert, der keine Nullstellen von g enthält.)
4. Ist $f(z)$ eine stetige Funktion ($z \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}), dann ist auch $|f(z)|$ stetig.

Aus Eigenschaft 1) folgt, dass die Menge der stetigen Funktionen einen Vektorraum bildet, weil die Eigenschaft der Stetigkeit unter der Bildung von Linearkombinationen erhalten bleibt. Zunächst folgt die Stetigkeit nur für die Linearkombination von zwei stetigen Funktionen, damit aber auch für Linearkombinationen von endlich vielen stetigen Funktionen. Diese Aussage gilt jedoch nicht mehr, wenn wir eine Linearkombination aus unendlich vielen Termen (also eine Reihe von Funktionen) bilden. Sämtliche angegebenen Stetigkeitsregeln gelten auch für Funktionen über \mathbb{C}^n .

Lassen sich zwei Funktionen hintereinschalten (d.h., liegt der Definitionsbereich von g im Bild von f) und ist f an der Stelle x_0 stetig und g an der Stelle $f(x_0)$, dann ist auch die Funktion $g(f(x))$ an der Stelle x_0 stetig. Zum Beweis betrachtet man Folgen $\{x_n\}$, die gegen x_0 konvergieren. Da f stetig ist, konvergiert auch $\{f(x_n)\}$ gegen $f(x_0)$, und wegen der Stetigkeit von g konvergiert somit $\{g(f(x_n))\}$ gegen $g(f(x_0))$.

5.1.3 Der Zwischenwertsatz [*intermediate value theorem*]

Der folgende Satz scheint derart trivial, dass man geneigt ist zu glauben, dass er keines Beweises bedarf:

Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es dann ein $x \in [a, b]$, sodass $f(x) = y$.

Der Punkt x muss nicht eindeutig sein, da f in dem Intervall $[a, b]$ den Wert y mehrfach annehmen kann.

Der Satz wird weniger trivial, wenn man sich überlegt, dass er für eine stetige Funktion $f : [a, b] \in \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ nicht gilt. (Hierbei ist \mathbb{Q} nicht als Teilmenge der reellen Zahlen aufzufassen, sondern als eine Menge, der man über ϵ -Umgebungen eine eigene Topologie geben kann.)

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $a = 0, b = 2$, also $f(0) = 0$ und $f(2) = 4$. Dann gibt es zu dem Wert $y = 2$ kein Urbild. Das Urbild wäre $+\sqrt{2}$, aber dieser Wert liegt nicht in \mathbb{Q} . Offensichtlich benötigt man für den Beweis des Satzes die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Dann kann man verwenden, dass jede Folge $\{x_i\}$, für die die Folge $\{f(x_i)\}$ den Grenzwert 2 hat, selbst konvergieren muss (eventuell muss man sich dabei auf ein kleineres Intervall einschränken, in dem f den Wert y nur einmal annimmt). Der Grenzwert dieser Folge liegt aber in \mathbb{R} .

5.1.4 Der Satz von Weierstraß

Der Satz von Weierstraß besagt: *Jede stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ über einem kompakten Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und nimmt auf diesem Gebiet einen Maximal- und Minimalwert an.*

Zur Wiederholung: Eine Menge $U \in \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn U von einem offenen Ball überdeckt werden kann und abgeschlossen ist (d.h., die Grenzwerte von beliebigen Folgen in U liegen alle in U). Natürlich darf die Funktion ihren Maximal- und Minimalwert auch auf dem Rand dieses Gebiets annehmen (daher gilt der Satz auch nicht für offene Mengen).

Für den Beweis der Beschränktheit verwendet man den Satz von Bolzano und Weierstraß (siehe S. 76). Wäre f nicht beschränkt, gäbe es eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, für welche die Folge $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Grenzwert hat. Diese Folge $\{x_n\}$ ist jedoch wegen der Kompaktheit von U selbst beschränkt. An jedem Grenzwert von einer ihrer Teilfolgen muss f wegen der Stetigkeit endlich sein.

Für die Tatsache, dass f seine Maximalwerte und Minimalwerte tatsächlich annimmt, verwendet man die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Da f beschränkt ist, muss die kleinste obere Schranke und die größte untere Schranke von den Bildwerten von f in dem kompakten Gebiet auch angenommen werden.

5.1.5 Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Zahl $0 \leq L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in U. \quad (5.3)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Steigung der Verbindungslinie zwischen zwei Punkten im Graphen von f nirgendwo größer als L werden kann. Das bedeutet auch, dass die Steigung von Tangenten an f niemals größer als L werden kann.

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *gleichmäßig stetig* [*uniformly continuous*] auf U , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in U$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$.

Im Gegensatz zum Epsilon-Delta-Kriterium für Stetigkeit, bei dem die ϵ - δ -Vorschrift nur für ein gegebenes $x \in U$ erfüllt sein muss, sollte bei der gleichmäßigen Stetigkeit dasselbe ϵ - δ -Kriterium für alle $x \in U$ gelten. Offenbar ist eine Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmäßig stetig, denn wenn $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ gelten soll, ist dies offensichtlich für $\|x - y\| < \delta = \epsilon/(2L)$ erfüllt.

Lipschitz-Stetigkeit ist eine sehr starke Bedingung. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, aber sie ist nicht Lipschitz-stetig. Sei beispielsweise $x = 0$ und y beliebig, dann ist $|f(y) - f(x)| = y^2$. Es gibt keine noch so große Zahl L , sodass $y^2 \leq L|y|$ für beliebige $y \in \mathbb{R}$ ist, denn für $|y| > L$ ist die Bedingung immer verletzt. Schränkt man den Definitionsbereich auf ein kompaktes Gebiet (abgeschlossenes Intervall) ein, so ist die Funktion immer Lipschitz-stetig.

Allgemein gilt: Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit impliziert Stetigkeit. Die folgende Funktion ist ein Beispiel für eine gleichmäßig stetige Funktion, die nicht Lipschitz-stetig ist: Es sei $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ (diese Funktion ist auf der gesamten reellen Achse definiert, bei $x = 0$ ist auch $f(x) = 0$). Für $x = 0$ und einen beliebigen Punkt $y > 0$ gilt

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \frac{\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{y}}. \quad (5.4)$$

Offenbar wird die rechte Seite beliebig groß, wenn man y nur genügend klein wählt. Diese Funktion ist also in einer Umgebung von $x = 0$ nicht Lipschitz-stetig. Andererseits reicht für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ die Bedingung $\delta = \epsilon^2$, sodass das Epsilon-Delta-Kriterium für $x = 0$ (und damit für alle x) erfüllt ist.

Die Funktion $f(x) = 1/x$ auf den positiven reellen Zahlen ($x > 0$) ist ein Beispiel für eine stetige Funktion, die nicht gleichmäßig stetig ist. Wir wählen $x = \delta$ und $y = 2\delta$, dann ist $|f(x) - f(y)| = 1/(2\delta)$ und $|x - y| = \delta$. Offensichtlich gibt es kein noch so kleines δ , sodass wir den Abstand zwischen den Funktionswerten ebenfalls beliebig klein machen können.

5.2 Die \mathcal{O} - und \mathcal{o} -Notation

Die \mathcal{O} - und \mathcal{o} -Notation (manchmal spricht man auch von den Landau-Symbolen, benannt nach dem Zahlentheoretiker Edmund Landau (1877–1938)) dienen häufig dazu,

das asymptotische Verhalten von Folgen oder Funktionen qualitativ abzuschätzen oder anzugeben. Wir betrachten zunächst das Verhalten von Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für große Werte von n , im nächsten Abschnitt beschreiben wir die Notation dann für Funktionen.

5.2.1 \mathcal{O} und o für Folgen

Mit der \mathcal{O} -Notation kann man zum Ausdruck bringen, dass sich eine Folge für große Werte von n „ähnlich verhält wie“ eine andere, meist einfachere Folge. Damit kann man sowohl charakterisieren, wie eine Folge divergiert (sofern sie keinen Grenzwert hat bzw. nicht beschränkt ist) als auch, wie rasch eine Folge gegen ihren Grenzwert konvergiert.

Definition der \mathcal{O} -Notation: Eine Folge $\{a_n\}$ verhält sich wie $\mathcal{O}(f(n))$, wenn es eine natürliche Zahl n_0 und eine Konstante C gibt, sodass für alle $n > n_0$ gilt: $|a_n|/|f(n)| < C$ (bzw. äquivalent $|a_n| < C|f(n)|$).

(Äquivalent können wir auch sagen, dass der Quotient $|a_n|/|f(n)|$ eine obere Schranke haben soll. Außerdem dient die Einschränkung „es gibt eine natürliche Zahl n_0 , sodass für alle $n > n_0$ “ nur dem Fall, dass $f(n)$ an manchen Stellen 0 werden kann; das sollte aber ab einem n_0 nicht mehr passieren. Falls also $f(n) \neq 0$, kann man die Schranke C auch für alle n fordern.)

Die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = n^2 \sin \pi n/2$ ist beispielsweise $\mathcal{O}(n^2)$. Für große Werte von n steigt diese Folge nicht stärker als n^2 an. Bei einer Summe von Potenzen wie bei der Folge $\{x_n\}$ mit $x_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ (mit Konstanten a, b, c, d, e) verhält sich die Folge für große Werte von n wie die höchste Potenz, d.h., $\{x_n\}$ ist $\mathcal{O}(n^4)$.

Bei den angegebenen Beispielen handelt es sich um divergente Folgen (also Folgen, deren Terme keine obere und/oder untere Schranke haben). Die Folge $\{x_n\}$ mit $x_n = (-1)^n$ ist zwar nicht divergent, sie konvergiert aber auch nicht gegen einen Grenzwert. Von dieser Folge kann man sagen, sie ist $\mathcal{O}(1)$. Die Folge $\{x_n\}$ mit $x_n = \frac{1}{2n+1}$ ist eine Nullfolge, um aber anzugeben, wie rasch diese Folge gegen 0 geht, kann man sagen, die Folge ist $\mathcal{O}(1/n)$.

Manchmal kennt man auch die exakte Folge nicht, kann aber eine Abschätzung angeben. Sei beispielsweise $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner als n . Diese Funktion kann natürlich nur ganzzahlige Werte annehmen und macht bei jeder natürlichen Zahl n , die eine Primzahl ist, einen Sprung um 1 nach oben.

Diese wohldefinierte Funktion lässt sich nicht geschlossen angeben, aber der Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) vermutete 1796, dass sich $\pi(n)$ wie $\mathcal{O}(n/\ln n)$ verhält. (Gauß vermutete sogar genauer, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)/(x/\ln(x)) = 1$, was man auch schon mal in der Form $\pi(x) \sim x/\ln(x)$ schreibt.) Die Vermutung konnte 1896 nahezu zeitgleich und unabhängig von den Mathematikern Jacques S. Hadamard

(1865–1963) und Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866–1962) bewiesen werden.

Definition der o -Notation: Eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verhält sich wie $o(f(n))$ (wobei $\forall n : f(n) \neq 0$), wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/f(n) = 0$.

Im Gegensatz zur \mathcal{O} -Notation, die angibt, dass der Quotient $a_n/f(n)$ beschränkt ist, besagt die o -Notation somit, dass dieser Quotient für n gegen unendlich eine Nullfolge darstellt. Mit der o -Notation bringen wir also zum Ausdruck, dass etwas *schwächer* als eine andere Funktion ansteigt. Beispielsweise können wir sagen, dass $\pi(n)$ von der Ordnung $o(n)$ ist, also schwächer ansteigt als proportional zu n . Das würde man auch vermuten, da die Primzahlen immer seltener werden, allerdings hätte auch die Funktion $n/\log(\log n)$ diese Eigenschaft, sodass die Vermutung von Gauß präziser war als die Aussage „ $\pi(n)$ ist $o(n)$ “.

Zusammenfassend können wir also sagen, dass die \mathcal{O} -Notation angibt, dass der Quotient aus der Folge und ihrer Abschätzung beschränkt ist, wohingegen die o -Notation verlangt, dass dieser Quotient eine Nullfolge ist.

5.2.2 \mathcal{O} und o für Funktionen

Funktionen $g(x)$ unterscheiden sich von Folgen lediglich dadurch, dass wir einerseits den Grenzwert für x festlegen müssen, für den wir die Abschätzung vornehmen wollen, andererseits verlangen wir dann, dass die Abschätzung für *jede* Folge von x -Werten gilt, die diesen Grenzwert hat.

Beispielsweise können wir sagen, dass sich eine Funktion mit Funktionswerten $g(x)$ für große Werte von x wie die Funktion $f(x)$ verhält. Das drücken wir durch „ $g(x)$ ist $\mathcal{O}(f(x))$ “ aus und meinen damit, dass für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \rightarrow \infty$ die Folge $\{g(x_n)/f(x_n)\}$ beschränkt ist. (Eventuell müssen wir fordern, dass es ein n_0 gibt, ab dem für alle $n > n_0$ die Folge $g(x_n)/f(x_n)$ beschränkt ist, falls die Funktion $f(x)$ bei einem x_i eine Nullstelle hat.)

Sehr oft interessiert uns aber auch das Verhalten einer Funktion für $x \rightarrow 0$. Die Aussage „ $g(x)$ verhält sich für x gegen null wie $\mathcal{O}(x^2)$ “ bedeutet also, dass $g(x)/x^2$ für genügend kleine Werte von x beschränkt ist („es gibt ein x_0 und eine Konstante C , sodass für alle $x < x_0$ gilt: $g(x)/x^2 < C$ “).

Für die o -Notation bei Funktionen gilt das Entsprechende. Wenn $g(x)$ sich für $x \rightarrow 0$ wie $o(x)$ verhält, bedeutet dies, dass $g(x)$ schneller als x gegen Null geht, oder genauer: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)/x = 0$.

Die \mathcal{O} - und o -Notation werden bei Funktionen sehr oft verwendet, um die Güte von Näherungen an Funktionen anzugeben. Beispielsweise gilt

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \quad (5.5)$$

oder auch

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4). \quad (5.6)$$

Die \mathcal{O} -Notation wird meist verwendet, wenn man den Korrekturterm der nächsten Ordnung kennt, wohingegen die o -Notation (mit einer schwächeren Bedingung) meist verwendet wird, wenn die genaue Bedingung nicht bekannt oder nicht wichtig ist. Wir hätten (da die Potenzreihenentwicklung für die Sinus-Funktion bekannt ist) in der zweiten Gleichung auch $\mathcal{O}(x^5)$ schreiben können.

5.3 Die Ableitung einer Funktion

Wir wollen nun den Begriff der Ableitung einer Funktion einführen. Dazu betrachten wir zunächst reellwertige Funktionen über der reellen Achse. Anschließend erweitern wir dies auf reellwertige Funktionen über dem \mathbb{R}^n . Dies wird uns auf den Begriff des Gradienten führen. Schließlich definieren wir die Ableitung allgemein für Funktionen vom \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m . Es handelt sich bei diesen Verallgemeinerungen nicht wirklich um neue Begriffe, sondern eigentlich nur um Erweiterungen der einfachen Ableitung, allerdings werden wir dabei eine Notation verwenden, welche die Koordinatenunabhängigkeit dieser Begriffe deutlich macht.

5.3.1 Ableitung einer reellwertigen Funktion

Es sei $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf einem offenen Gebiet U der reellen Zahlen. Wir nehmen an, die Funktion sei in U stetig (oder zumindest an den Punkten, bei denen wir die Ableitung definieren möchten).

Wir definieren nun die Ableitung [*derivative*] $f'(x)$ dieser Funktion an der Stelle x durch einen Grenzwert:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (5.7)$$

Wie immer ist dieser Grenzwert $h \rightarrow 0$ im Sinne von „für jede beliebige Nullfolge $\{h_n\}$ “ zu verstehen. Das setzt voraus, dass dieser Grenzwert überhaupt existiert und dass er für jede beliebige Nullfolge auch derselbe ist (wobei hier nur Nullfolgen betrachtet werden, für die $h_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$). Die Stetigkeit ist zwar eine notwendige Voraussetzung für die Existenz und Eindeutigkeit der Ableitung, aber keine hinreichende Voraussetzung. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist bei $x = 0$ stetig, doch die Ableitung ist nicht eindeutig.¹ Die Funktion

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} \quad (5.8)$$

¹Ist der Grenzwert in Gl. 5.7 für jede positive Nullfolge derselbe, spricht man von einer rechtseitigen Ableitung; entsprechend ist eine linksseitige Ableitung definiert als der Grenzwert für jede Folge $\{h_n\}$ die sich von links (also mit negativen Werten für h) der Null nähert. Dementsprechend hat die

ist ebenfalls bei $x = 0$ wohl definiert und stetig, doch in diesem Fall gibt es keinen endlichen Grenzwert für die Ableitung. (Zur Funktion $\operatorname{sgn}(x)$ vgl. Gl. 1.53.)

Manchmal schreibt man statt $f'(x)$ auch

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv Df(x). \quad (5.9)$$

Man beachte, dass wir zunächst die Ableitung der Funktion f nur an einer Stelle (x) definiert haben, aber wir können natürlich x auch als einen Parameter auffassen und $f'(x)$ als Funktion dieses Parameters interpretieren. In diesem Sinne verstehen wir den Begriff „eine Funktion ableiten“ [*to take the derivative of a function*].

Wir betrachten nun eine andere (im vorliegenden Fall äquivalente) Formulierung der Ableitung. Wir sagen, $f'(x)$ ist die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x , wenn

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + o(h). \quad (5.10)$$

Anmerkungen:

1. Es sollte offensichtlich sein, dass sich hier die o -Notation auf den Grenzfall $h \rightarrow 0$ bezieht.
2. Außerdem deutet die o -Notation an, dass der Restterm schneller als linear in h gegen null geht. In diesem Sinne bezeichnet man $f'(x)$ auch als die „beste lineare Näherung“ an $f(x)$ an der Stelle x . Wichtig ist, dass hier „linear“ in Bezug auf das Inkrement h zu verstehen ist. Die Funktion $f'(x)$ muss als Funktion von x natürlich nicht linear sein. $f'(x)$ ist (für festes x) eine Zahl, die der Steigung von $f(x)$ am Punkte x entspricht.
3. Wenn sich die Funktion $f(x)$ „gutartig“ verhält und auch höhere Ableitungen zulässt (mehr dazu in Abschnitt 5.5), gilt im Allgemeinen:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.11)$$

Man beachte aber, dass diese Bedingung wesentlich stärker ist als Gl. 5.10 und nicht die Definition der Ableitung bezeichnet.

4. In manchen Büchern findet man auch die Definition

$$f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} f(x) + f'(x) \cdot h + R(h) \quad \text{mit } R(h) = o(h). \quad (5.12)$$

Dies ist natürlich äquivalent zu Gl. 5.10, allerdings wird hier betont, dass der Restterm $R(h)$ zur linearen Näherung ein bestimmtes Verhalten hat.

Funktion $f(x) = |x|$ bei $x = 0$ keine wohldefinierte Ableitung, aber die rechtsseitige Ableitung ist $+1$ und die linksseitige -1 .

Den Quotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (5.13)$$

bezeichnet man auch als *Differenzenquotient* [*difference quotient*]. Die Definition der Ableitung entspricht also dem Grenzwert der Folge von Differenzenquotienten, wenn die Abstände $\Delta x = x_2 - x_1$ (und entsprechend die Abstände $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$), was bei stetigen Funktionen der Fall sein sollte) gegen null gehen.

Anmerkung: Die folgende, etwas ungewöhnliche Anmerkung verdeutlicht einerseits, weshalb man historisch gesehen ohne einen sauberen Grenzwertbegriff so große Schwierigkeiten mit Objekten wie dx oder $df(x)$ hatte, andererseits soll sie auch auf einen Punkt aufmerksam machen, der zwar offensichtlich sein sollte, der aber trotzdem anfänglich für Verwirrung sorgen kann. Für Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$, bei denen $\{b_i\}$ keine Nullfolge ist, konvergiert der Grenzwert von a_i/b_i gegen den Quotienten a/b der Grenzwerte (vgl. S. 75). In diesem Fall vertauschen also die beiden Operationen der Quotientenbildung und Grenzwertbildung. In Gl. (5.7) sind beide Folgen (im Zähler und Nenner) jedoch Nullfolgen. Daher darf man in diesem Fall die Grenzwert- und Quotientenbildung *nicht* vertauschen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \neq \frac{\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x))}{\lim_{h \rightarrow 0} h} \quad (!). \quad (5.14)$$

Die rechte Seite ist nicht definiert (dort steht $(0/0)$), die linke Seite jedoch im Allgemeinen schon. Solange diese „Feinheiten“ im Umgang mit Grenzwerten nicht verstanden waren, blieb die sogenannte *Infinitesimalrechnung* obskur.

5.3.2 Ableitungsregeln

Aus der Definition der Ableitung können wir Ableitungsregeln herleiten. Dabei folgt die *Summenregel* [*sum rule*] (hier zusammengefasst mit der *Faktorregel* [*factor rule*]) unmittelbar aus der Definition:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'. \quad (5.15)$$

Die Ableitung einer Linearkombination von Funktionen ist gleich der Linearkombination der Ableitungen. Dies kennzeichnet die Ableitung als eine lineare Abbildung auf dem Vektorraum der (ableitbaren) Funktionen.

Die drei wichtigsten Ableitungsregeln sind: (1) die Produktregel, (2) die Kettenregel und (3) die Quotientenregel.

Die Produktregel [*product rule*]

Ist eine Funktion das Produkt von zwei anderen Funktionen, gilt für die Ableitung

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \quad (5.16)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)) \cdot (g(x) + g'(x) \cdot h + o(h)) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h + f(x) \cdot g'(x) \cdot h + o(h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
 &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
 \end{aligned}$$

Die Kettenregel [*chain rule*]

Wir betrachten die Hintereinanderschaltung von zwei Funktionen:

$$F(x) = f(g(x))$$

Für die Ableitung gilt:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (5.17)$$

Beweis:

Wir verwenden die Definition der Ableitung mit der o -Notation und erhalten:

$$F(x+h) = f[g(x+h)] = f[g(x) + g'(x) \cdot h + o(h)].$$

Nun fassen wir $g'(x) \cdot h + o(h)$ als „kleine Störung“ auf. (Genauer: Sofern $g'(x)$ existiert, ist für jede Nullfolge $\{h_n\}$ auch $\{\epsilon_n\}$ mit $\epsilon_n = g'(x)h_n + o(h_n)$ eine Nullfolge.) Wir wissen dass

$$f(x+\epsilon) = f(x) + f'(x) \cdot \epsilon + o(\epsilon).$$

In dieser Gleichung ersetzen wir ϵ durch $g'(x) \cdot h$ und erhalten

$$F(x+h) = f(g(x)) + f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot h + o(h)$$

und damit das oben angegebene Ergebnis.

Manchmal schreibt man für die Kettenregel auch

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \Big|_{g=g(x)} \frac{dg(x)}{dx}.$$

und bringt damit zum Ausdruck, dass zunächst die Ableitung von f nach ihrem natürlichen Argument zu bilden ist; anschließend ist in die Funktion, die man so erhält, das spezielle Argument $g = g(x)$ einzusetzen.

Die Quotientenregel [quotient rule]

Zum Beweis der Quotientenregel bilden wir zunächst die Ableitung von $1/x$, wobei $x \neq 0$. Für Werte von h , sodass $h/x < 1$, gilt (vergleiche die geometrische Reihe; Gl. 3.28):

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+\frac{h}{x}} \right) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{h}{x} + \mathcal{O}(h^2) \right). \quad (5.18)$$

Man beachte, dass $x \neq 0$ hier fest vorgegeben ist, wohingegen wir für h Nullfolgen betrachten.

Damit folgt

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}h + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.19)$$

Also ist die Ableitung von $f(x) = 1/x$ gleich $f'(x) = -1/x^2$. (Die allgemeine Regel der Ableitung von $f(x) = x^n$ als $f'(x) = nx^{n-1}$ gilt also auch für negative n .)

Zusammen mit der Produktregel und der Kettenregel können wir nun die Quotientenregel ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{d}{dx} (f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + (-1)f(x)g(x)^{-2}g'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

(Anmerkung: Hier ist $g(x)^{-1} = 1/g(x)$. Man unterscheide dies von $g^{-1}(x)$, also der Umkehrfunktion von $g(x)$.)

Ableitung der Umkehrfunktion

Für die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt allgemein

$$f^{-1}(f(x)) = x. \quad (5.21)$$

Ableiten dieser Gleichung auf beiden Seiten liefert nach der Kettenregel:

$$\left. \frac{df^{-1}}{dy} \right|_{y=f(x)} \cdot f'(x) = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x(y))} \quad (5.22)$$

wobei $x(y)$ die Auflösung von $y = f(x)$ nach x ist, also $x = f^{-1}(y)$. Hierbei haben wir $f'(x) \neq 0$ vorausgesetzt. Insgesamt folgt also:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \quad (5.23)$$

Setzen wir einmal voraus, dass die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist, so folgt für die Umkehrfunktion, also den natürlichen Logarithmus:

$$\frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}. \quad (5.24)$$

Ähnlich kann man auch die Ableitung von $f(x) = x^{1/n}$ für $n \in \mathbb{N}$ ableiten: Wir wissen, dass $f(x)^n = x$ und erhalten

$$\frac{df(x)^n}{dx} = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x) = 1 \quad (5.25)$$

und daraus:

$$f'(x) = \frac{1}{n f(x)^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{(1-n)/n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}. \quad (5.26)$$

Damit lässt sich sofort zeigen, dass die Beziehung

$$\frac{dx^a}{dx} = a x^{a-1} \quad (5.27)$$

zumindest für $a \in \mathbb{Q}$ gilt.

Implizite Ableitung

Manchmal ist eine Funktion nicht in der Form $y = f(x)$ gegeben, sondern in einer impliziten Form als verallgemeinerte Funktion $F(y, x) = 0$. Die Ableitung einer solchen Funktion nach x ergibt nach der Kettenregel (und den Regeln für Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen, die in Abschnitt 5.3.4 behandelt werden):

$$\frac{\partial F(y, x)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F(y, x)}{\partial x} = 0. \quad (5.28)$$

Unter geeigneten Bedingungen lässt sich diese Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auflösen.

Im Grunde genommen wurde dieses Verfahren schon im letzten Abschnitt für die Herleitung der Ableitung einer Umkehrfunktion angewandt. Ein weiteres Beispiel wäre die implizite Gleichung:

$$f(x)^5 - f(x) - x = 0, \quad (5.29)$$

die nicht so ohne weiteres nach $f(x)$ aufgelöst werden kann. Man erhält daraus:

$$5f(x)^4 f'(x) - f'(x) - 1 = 0 \quad \implies \quad f'(x) = \frac{1}{5f(x)^4 - 1}. \quad (5.30)$$

Trigonometrische Funktionen

Als Anwendung der Ableitungsvorschriften betrachten wir die Ableitungen der Sinus- und Kosinus-Funktion. Dabei verwenden wir nicht die in Abschnitt 3.5.5 definierten Reihen, sondern die trigonometrischen Eigenschaften dieser Funktionen.

Aus trigonometrischen Überlegungen erhält man die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:

$$\sin(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y \quad (5.31)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \quad (5.32)$$

Wir benötigen nun folgende Abschätzungen, die man ebenfalls aus trigonometrischen Überlegungen herleiten kann:

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{und} \quad \cos x = 1 + o(x). \quad (5.33)$$

Setze wir nun

$$\sin(x + h) = \cos x \sin h + \sin x \cos h = \cos x \cdot h + \sin x + o(h), \quad (5.34)$$

folgt durch Vergleich mit der Definition der Ableitung:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \quad (5.35)$$

Für den Kosinus erhalten wir entsprechend

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h = \cos x + o(h) - \sin x \cdot h, \quad (5.36)$$

und damit

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x. \quad (5.37)$$

5.3.3 Bahnkurven und ihre Geschwindigkeit

In der Physik möchte man häufig die Bahnkurve eines physikalischen Körpers – meist beschrieben durch seinen Schwerpunkt oder idealisiert als Partikel – beschreiben. Zur mathematischen Darstellung der Bahnkurve gibt man zu jedem Zeitpunkt t den Ort $\mathbf{x}(t)$ des Objekts an. Bei einer *parametrisierten Bahnkurve* [*parametrized trajectory*] γ handelt es sich um eine Abbildung

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \mathbf{x}(t). \quad (5.38)$$

Das Intervall $I \subset \mathbb{R}$ bezeichnet man allgemein als Parameterintervall und in der Physik (sofern t der Zeit entspricht) als Zeitintervall.

Die Geschwindigkeit [*velocity*] des Teilchens zu einem Zeitpunkt t ergibt sich aus der Ableitung dieser Bahnkurve nach der Zeit:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}. \quad (5.39)$$

Diese Gleichung darf man komponentenweise verstehen, d.h., die i -te Komponente der Geschwindigkeit ergibt sich aus der Ableitung der i -ten Komponente der Bahnkurve nach der Zeit:

$$v_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}. \quad (5.40)$$

$\mathbf{v}(t)$ bezeichnet man auch als die *Momentangeschwindigkeit* [*momentary velocity*] des Teilchens zum Zeitpunkt t . Demgegenüber ist die *Durchschnittsgeschwindigkeit* [*average velocity*] zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 durch

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (5.41)$$

gegeben. Wenn wir physikalisch die Geschwindigkeit eines Objekts messen, bestimmen wir meist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei sehr nahe beieinanderliegenden Zeitpunkten. Man beachte, dass dies auch der mathematischen Definition der Ableitung entspricht: Der Grenzwert von Differenzenquotienten entspricht dem Grenzwert von Durchschnittsgeschwindigkeiten.

Wir haben hier das Konzept der Ableitung auf Funktionen des Typs $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ verallgemeinert. Die Ableitung einer solchen Funktion ist definiert als:

$$D\mathbf{f}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(x + \epsilon) - \mathbf{f}(x)}{\epsilon} \quad (5.42)$$

Ich habe hier durch die Fettschrift angedeutet, dass es sich bei $\mathbf{f}(x)$ um Vektoren in einem \mathbb{R}^n handelt und im Zähler des Differenzenquotienten die Differenz von Vektoren steht. Die Definition der Ableitung ist unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems im \mathbb{R}^n . Falls jedoch ein Koordinatensystem (eine Basis) gegeben ist, kann man die Ableitung komponentenweise ausführen; daher handelt es sich nicht um ein neues Konzept.

5.3.4 Gradient, Richtungsableitung und partielle Ableitung

Wir betrachten nun eine reellwertige Funktion in mehreren reellen Variablen, also $f(x_1, \dots, x_n)$ bzw. $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Außerdem nehmen wir an, dass die Funktion an den Stellen, an denen wir die Ableitungen nehmen möchten, immer stetig ist.

Die partielle Ableitung

Wir können zunächst die *partielle Ableitung* [*partial derivative*] definieren, indem wir die Definition der Ableitung einer Funktion von einer Variablen einfach auf ein bestimmtes Argument anwenden (bei partiellen Ableitungen verwendet man statt des Symbols ‚d‘ das Symbol ‚∂‘):

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\epsilon}. \quad (5.43)$$

Äquivalent gilt

$$f(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \epsilon + o(\epsilon). \quad (5.44)$$

Die Richtungsableitung

Sei $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \neq 0$ ein beliebiger n -komponentiger Vektor (ungleich dem Nullvektor). Wir definieren die *Richtungsableitung* [*directional derivative*] $\mathbf{D}_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x})$ durch:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\epsilon} \quad (5.45)$$

bzw.

$$f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) \epsilon + o(\epsilon). \quad (5.46)$$

Wählt man für eine gegebene Basis des \mathbb{R}^n den Vektor \mathbf{h} speziell als Einheitsvektor zu einem Basisvektor, $\mathbf{h} = \mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, so wird die Richtungsableitung zur partiellen Ableitung:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}. \quad (5.47)$$

In manchen Büchern fordert man, dass es sich bei \mathbf{h} um einen normierten Vektor handeln soll (also $\|\mathbf{h}\| = 1$). Das hat den Vorteil, dass die Richtungsableitung wirklich nur von der Richtung und nicht auch vom Betrag von \mathbf{h} abhängt.

Die totale Ableitung – der Gradient

Wenn es eine lineare Abbildung $\mathbf{D}f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass für jede beliebige Nullfolge $\{\mathbf{h}_i\}$ n -komponentiger Vektoren die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{D}f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|), \quad (5.48)$$

bezeichnet man $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ als den *Gradienten* [*gradient*] $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ bzw. die *totale Ableitung* [*total derivative*] der Funktion f an der Stelle \mathbf{x} . Äquivalent kann man auch sagen: Wenn die Richtungsableitung $\mathbf{D}_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x})$ eine lineare Abbildung für das Argument \mathbf{h} ist, sich also in der Form $\mathbf{D}_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ schreiben lässt, bezeichnet man $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ als die totale Ableitung bzw. als den Gradienten von f an der Stelle \mathbf{x} .

Anmerkungen:

1. $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ ist eine lineare Abbildung, die auf den Vektor \mathbf{h} anzuwenden ist, und das Ergebnis ist eine reelle Zahl. Das kennzeichnet $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ als einen *dualen Vektor*. Bezieht man die Komponenten eines Vektors \mathbf{x} auf eine Orthonormalbasis (ein kartesisches Koordinatensystem), dann sind die Komponenten von $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ durch $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$ gegeben. Man beachte jedoch, dass Gl. 5.48 nicht von einer Basis im \mathbb{R}^n abhängt. Kapitel 10 beschreibt etwas ausführlicher, wie die Komponenten des Gradienten in allgemeinen Koordinatensystemen ausgedrückt werden können.
2. Die durch Gl. 5.48 definierte lineare Abbildung $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ ist durch diese Definition eindeutig festgelegt; es gibt also keine zweite lineare Abbildung, die ebenfalls

obige Bedingung erfüllt. Denn wären $\mathbf{D}f_1(\mathbf{x})$ und $\mathbf{D}f_2(\mathbf{x})$ zwei solche lineare Abbildungen, dann müsste für jeden Vektor \mathbf{v} gelten

$$\epsilon(\mathbf{D}f_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{D}f_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}) = o(\epsilon) \quad (5.49)$$

(die Nullfolge ist nun speziell $\mathbf{h} = \epsilon\mathbf{v}$ für eine Nullfolge ϵ und den festen Vektor \mathbf{v} .) Diese Bedingung ist aber nur erfüllt, wenn

$$\mathbf{D}f_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{D}f_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \quad (5.50)$$

für alle Vektoren \mathbf{v} , doch daraus folgt $\mathbf{D}f_1(x) = \mathbf{D}f_2(x)$. Die beiden Abbildungen sind also identisch.

3. Wie schon erwähnt, gilt: Wenn die lineare Abbildung $\mathbf{D}f(x)$ existiert, ist die Richtungsableitung zu einem nicht-verschwindenden Vektor \mathbf{h} durch

$$\mathbf{D}_{\mathbf{h}}f(x) = \mathbf{D}f(x) \cdot \mathbf{h}. \quad (5.51)$$

gegeben. Es gibt jedoch Fälle, in denen die Richtungsableitungen zwar für alle Vektoren \mathbf{h} existieren, jedoch keine lineare Abbildung für \mathbf{h} definieren und somit keine totale Ableitung. Nur, wenn die Richtungsableitungen in einer offenen Umgebung des Punkts \mathbf{x} stetig sind, gibt es auch die totale Ableitung.

Zu dem letzten Punkt gibt es bekannte Gegenbeispiele: Sei beispielsweise

$$f(x, y) = \begin{cases} +\sqrt{x^2 + y^2} & y > 0 \\ x & y = 0 \\ -\sqrt{x^2 + y^2} & y < 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

Diese Funktion ist im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ stetig. Die Richtungsableitung existiert für jeden Vektor $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, aber sie definiert keine lineare Abbildung (siehe Übungsaufgabe). Sofern nicht anders erwähnt soll im Folgenden die totale Ableitung immer existieren.

Geometrische Bedeutung des Gradienten

Zur Veranschaulichung des Gradienten (vereinfacht interpretiert als einen Vektor – auch wenn es sich um einen dualen Vektor handelt) betrachten wir einen Spezialfall in Gl. 5.48: \mathbf{v} sei ein Einheitsvektor (also $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = 1$) und die Nullfolge sei durch $\mathbf{h} = \epsilon\mathbf{v}$ gegeben. Wir stellen uns nun die Frage, für welchen Vektor \mathbf{v} (zu genügend kleinem aber festem ϵ) die rechte Seite maximal wird. Das ist dann der Fall, wenn \mathbf{v} parallel zu $\mathbf{D}f$ steht. Andererseits wird die linke Seite maximal, wenn \mathbf{v} in die Richtung zeigt, in die die Funktion f am stärksten zunimmt. Der Gradient zeigt also in die Richtung, in die f am stärksten zunimmt. Insbesondere steht $\mathbf{D}f$ senkrecht auf allen Äquipotenziallinien bzw. -flächen von f , also auf den Richtungen am Punkt \mathbf{x} , für die sich die Funktion f nicht ändert.

Das ∇ -(Nabla-)Symbol

In der Physik wird meist die Notation $\mathbf{D}f(x) = \nabla f(x)$ verwendet (manchmal schreibt man auch $\vec{\nabla}f(x)$, um zu betonen, dass es sich um eine mehrkomponentige Größe handelt). Dieses Symbol ∇ – genannt „Nabla“ – wird wie ein Vektor behandelt, dessen Komponenten in der Standardbasis $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ die Operationen der partiellen Ableitungen sind. (Trotzdem soll nochmals betont werden, dass die Definition Gl. 5.48 unabhängig vom Koordinatensystem ist – der Gradient ist ein geometrisches Konzept. Wie der Gradient in anderen Koordinatensystemen zu berechnen ist, werden wir noch untersuchen; vgl. Abschnitt 10.7.2.) Dieses Symbol wird auch in entsprechender Bedeutung für andere Ableitungen verwendet, die wir später noch kennenlernen werden.

Besonders wichtige Beispiele in der Physik sind Gradienten von Funktionen, die nur vom Betrag des Ortsvektors abhängen, also z.B. $U(|\vec{x}|)$. In diesem Fall erhält man für die Komponenten des Gradienten nach der Kettenregel:²

$$\frac{\partial U(|\vec{x}|)}{\partial x_i} = \frac{dU(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i}, \quad (5.53)$$

und da

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad (5.54)$$

folgt

$$\vec{\nabla}U = U'(r) \frac{\vec{x}}{r}. \quad (5.55)$$

Der Gradient zeigt also in radialer Richtung und hat die „Länge“ $U'(r)$.

Die Richtungsableitung als Ableitung entlang eines Weges

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Außerdem betrachten wir einen stetigen Weg $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, den wir wieder mit $\mathbf{x}(t)$ kennzeichnen. Wenn das Bild des Weges in U liegt, können wir die kombinierte Abbildung: $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten, also die Funktion $f(\mathbf{x}(t))$. Bei dieser Funktion handelt es sich um eine gewöhnliche Funktion von einem Parameter t .

Diese Funktion können wir nach der Kettenregel ableiten und erhalten:

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{v}(t). \quad (5.56)$$

Ganz rechts steht das Skalarprodukt des Gradienten von f an der Stelle $\mathbf{x}(t)$ mit dem „Geschwindigkeitsvektor“ $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

²Wir haben die Kettenregel zwar nur für den Fall $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bewiesen, doch sie gilt ganz allgemein für Abbildungen zwischen reellen und komplexen Vektorräumen beliebiger Dimensionen (sofern der Definitionsbereich der zweiten Abbildung im Bildraum der ersten Abbildung enthalten ist). Der Beweis ist ganz analog.

Dieser Ausdruck entspricht in seiner Bedeutung Gleichung 5.48, allerdings wurde der Vektor \mathbf{h} hier mit $\mathbf{v}(t)$ bezeichnet. $\mathbf{v}(t)$ kennzeichnet somit die Richtung, in welche die Ableitung von f vorgenommen wird.

5.3.5 Allgemeine Ableitung

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Es handelt sich also um eine m -komponentige Funktion von n Variablen. Auch dieser Fall bringt nichts Neues, da wir jede Komponente von f als eine reellwertige Funktion im Sinne des letzten Abschnitts betrachten können. (In diesem Abschnitt verwende ich keine Fettschreibweise für Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mehr.)

Auch hier bietet sich jedoch die koordinaten- bzw. basisunabhängige Definition der Ableitung als „beste lineare Näherung“ an. Für einen beliebigen n -komponentigen Vektor h sei

$$f(x + \epsilon h) = f(x) + \epsilon Df(x) \cdot h + o(\epsilon). \quad (5.57)$$

Nun ist $Df(x)$ eine lineare Abbildung, $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die einen Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ auf einen Vektor $Df(x) \cdot h \in \mathbb{R}^m$ abbildet. In der Standardbasis ist $Df(x)$ eine $m \times n$ -Matrix mit den Komponenten $\partial f_j(x) / \partial x_i$.

Typische Beispiele in der Physik sind vektorwertige Felder, beispielsweise das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ oder das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$, wobei ich diesmal die Vektorwertigkeit durch die Vektorpfeile betont habe.

Im Prinzip lässt sich jede Feldkomponente nach jeder Ortskomponente ableiten, man erhält so die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x_1} & \frac{\partial E_1}{\partial x_2} & \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} & \frac{\partial E_2}{\partial x_2} & \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x_1} & \frac{\partial E_3}{\partial x_2} & \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x_1} & \frac{\partial B_1}{\partial x_2} & \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} & \frac{\partial B_2}{\partial x_2} & \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_3}{\partial x_1} & \frac{\partial B_3}{\partial x_2} & \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

5.3.6 Divergenz und Rotation

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, lassen sich die ersten Ableitungen eines Vektorfeldes nach den Raumkomponenten als eine Matrix schreiben. Einige spezielle Kombinationen dieser Ableitungen spielen jedoch eine besondere Rolle, dazu zählen insbesondere die Divergenz und die Rotation.

Ich definiere in diesem Abschnitt die Divergenz und die Rotation durch die Komponenten der Ableitungen in einem kartesischen Koordinatensystem. Später werde ich eine allgemeinere Definition angeben, die eine koordinatenunabhängige Definition von Divergenz und Rotation ermöglicht.

Die *Divergenz* [*divergence*] eines Vektorfeldes $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ich spezifiziere im Folgenden nicht immer, ob die Urbildmenge der ganze \mathbb{R}^3 oder nur eine offene Teilmenge davon ist) ist:

$$\operatorname{div} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x_i}. \quad (5.59)$$

Man beachte, dass das Ergebnis eine skalare Funktion ist, d.h., jedem Punkt im \mathbb{R}^3 wird eine Zahl zugewiesen. Oftmals vereinfacht man in der Physik noch die Notation der partiellen Ableitung und schreibt einfacher:

$$\partial_i E_j := \frac{\partial E_j}{\partial x_i}. \quad (5.60)$$

Damit lässt sich die Divergenz auch schreiben als

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_i \partial_i E_i. \quad (5.61)$$

Entsprechend definieren wir die *Rotation* [*rotation*] eines Vektorfeldes $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ als den Vektor:

$$\operatorname{rot} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Mit dem in Abschnitt 2.3 definierten Levi-Civita-Symbol können wir auch schreiben:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j E_k. \quad (5.63)$$

Die Rotation lässt sich nur für Vektorfelder angeben und das Ergebnis ist wieder ein Vektorfeld.

5.4 Höhere Ableitungen

Wenn die erste Ableitung einer Funktion selbst wieder stetig ist, können wir die zweite Ableitung als die Ableitung der ersten Ableitung definieren:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}. \quad (5.64)$$

Dafür schreibt man auch $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Ist die physikalische Interpretation des Arguments der Funktion f die Zeit t , so schreibt man für die Ableitung oft:

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Entsprechend ist die zweite Ableitung $\ddot{f}(t)$. Aus der Geschwindigkeit eines Teilchens $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ erhält man durch eine erneute Ableitung nach der Zeit die *Beschleunigung* [*acceleration*]:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}. \quad (5.65)$$

Auch hier verwendet man oft die Notation $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$.

Für die dritte Ableitung $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ einer Funktion schreibt man manchmal auch $f'''(x)$. Die höheren Ableitungen schreibt man gelegentlich durch einen in Klammern gesetzten Hochindex n :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Bei Funktionen von mehreren Argumenten, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kann man die höheren Ableitungen nach verschiedenen Argumenten bilden. Für die zweiten Ableitungen erhält man auf diese Weise eine Matrix von Ableitungen, die man auch als *Hesse-Matrix* [*hessian*] bezeichnet:

$$H(f)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (5.66)$$

bzw.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Sofern die zweiten Ableitungen existieren und stetig sind, spielt die Reihenfolge der Ableitung keine Rolle, die Hesse-Matrix ist also symmetrisch:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (5.68)$$

Dies bezeichnet man manchmal auch als den *Satz von Schwarz*. Dazu darf die Reihen-

folge, in der wir die Grenzwerte bilden, keine Rolle spielen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} &= \lim_{h_i \rightarrow 0} \left[\lim_{h_j \rightarrow 0} \left(\frac{f(\dots, x_i + h_i, \dots, x_j + h_j, \dots) - f(\dots, x_i + h_i, \dots, x_j, \dots)}{h_i h_j} \right) \right. \\ &\quad \left. - \lim_{h_j \rightarrow 0} \left(\frac{f(\dots, x_i, \dots, x_j + h_j, \dots) - f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)}{h_i h_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \left[\lim_{h_i \rightarrow 0} \left(\frac{f(\dots, x_i + h_i, \dots, x_j + h_j, \dots) - f(\dots, x_i, \dots, x_j + h_j, \dots)}{h_i h_j} \right) \right. \\ &\quad \left. - \lim_{h_i \rightarrow 0} \left(\frac{f(\dots, x_i + h_i, \dots, x_j, \dots) - f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)}{h_i h_j} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Genau das ist aber der Fall, wenn die zweiten Ableitungen existieren und stetig sind.

Dieses Ergebnis überträgt sich entsprechend auch auf die höheren Ableitungen: Sind alle Ableitungen einer Funktion f mindestens k -mal stetig differenzierbar, spielt die Reihenfolge, in der wir die k Ableitungen ausführen, keine Rolle.

5.4.1 Extrempunkte und stationäre Punkte

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt x_0 heißt *lokales Maximum* von f , wenn es eine Umgebung V von x_0 gibt, sodass $f(x_0) - f(x) > 0$ für alle $x \in V$. Ein Punkt x_0 heißt *globales Maximum* in U , wenn für alle $x \in U$ gilt: $f(x_0) - f(x) > 0$. Entsprechend heißt ein Punkt x_0 *lokales Minimum* von f , wenn es eine Umgebung V von x_0 gibt, sodass $f(x_0) - f(x) < 0$ für alle $x \in V$. Und ein Punkt x_0 heißt *globales Minimum* in U , wenn für alle $x \in U$ gilt: $f(x_0) - f(x) < 0$.

Zusammenfassend bezeichnet man Punkte, bei denen eine Funktion ein (lokales oder globales) Minimum oder Maximum hat, als (lokale bzw. globale) *Extrempunkte* [*extremal points*].

Zur Existenz von Extrempunkten auf kompakten Mengen haben wir bereits den Satz von Weierstraß kennengelernt (Abschnitt 5.1.4).

Der *Satz von Fermat* besagt, dass für eine differenzierbare Funktion an einem lokalen Extrempunkt immer gilt $Df(x_0) = 0$, d.h., die erste Ableitung verschwindet. Bei einer Funktion über den reellen Zahlen bedeutet dies einfach $f'(x_0) = 0$, bei einer Funktion über dem \mathbb{R}^n heißt das $\nabla f(x_0) = 0$, also in Koordinaten $\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x=x_0} = 0 \quad \forall i$. Dieses Kriterium ist allerdings nur ein notwendiges Kriterium.

Bei Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (also Funktionen über den reellen Zahlen) kann man auch die hinreichenden Bedingungen leicht charakterisieren, sofern die höheren Ableitungen der Funktion existieren:

1. Verschwinden die ersten n Ableitungen einer Funktion f and der Stelle x_0 und ist n ungerade, und gilt für die $n + 1$ -te Ableitung $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so liegt bei x_0 ein lokales Maximum vor. Ist $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, hat f bei x_0 ein lokales Minimum.

1. *lokales Minimum* [*local minimum (point)*], wenn es eine (offene) Umgebung X von x_0 gibt, sodass für alle $x \in X$ gilt $f(x_0) \leq f(x)$.
2. *globales Minimum* [*global minimum (point)*], wenn für alle $x \in U$ gilt $f(x_0) \leq f(x)$.
3. *lokales Maximum* [*local maximum (point)*], wenn es eine Umgebung X von x_0 gibt, sodass für alle $x \in X$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$.
4. *globales Maximum* [*global maximum (point)*], wenn für alle $x \in U$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$.

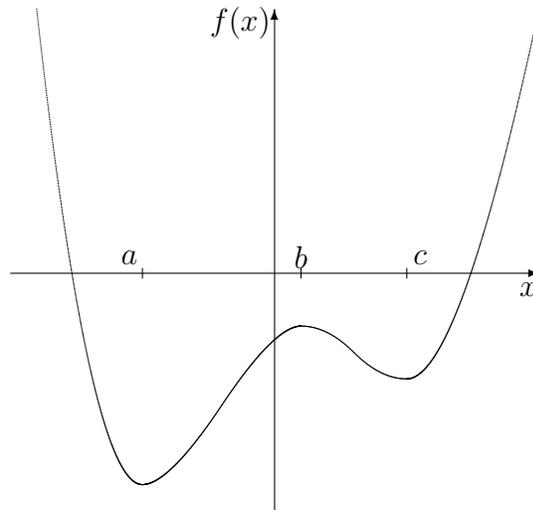


Abbildung 5.2: Bei $x = a, c$ liegen lokale Minima vor, ein globales Minimum ist nur bei $x = a$. Bei $x = b$ befindet sich ein lokales Maximum. Ein globales Maximum gibt es nicht.

2. Verschwinden die ersten n Ableitungen einer Funktion f an der Stelle x_0 und ist n gerade (und gilt für die $n + 1$ -te Ableitung $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$), dann hat f an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt* [*inflection point*].

Verschwindet der Gradient einer Funktion über dem \mathbb{R}^n , so spricht man allgemein von einem *stationären Punkt* [*stationary point*]. Hier kann ein Maximum (oder *Hochpunkt*) oder auch ein Minimum (*Tiefpunkt*) vorliegen, es kann sich aber auch um einen (verallgemeinerten) *Sattelpunkt* [*saddle point*] handeln. Zur Charakterisierung eines solchen Punktes benötigt man im Allgemeinen die Matrix der zweiten Ableitungen, also die Hesse-Matrix.

Für zweimal stetig ableitbare Funktionen ist die Hesse-Matrix symmetrisch. Wir benötigen nun einen Satz, den wir in Abschnitt 2.6 angegeben, allerdings nicht bewiesen haben (dies sollte in der Linearen Algebra erfolgen): Eine selbst-adjungierte $n \times n$ -Matrix H (beim üblichen euklidischen Skalarprodukt in reellen Vektorräumen sind dies genau die symmetrischen Matrizen) erlaubt die Definition von n orthonormalen Vektoren f_i ($i = 1, \dots, n$), sodass $Hf_i = \lambda_i f_i$ ist. Die Vektoren f_i bilden einen Satz von orthogonalen Eigenvektoren und charakterisieren die sogenannten Hauptachsen. Die Zahlen λ_i sind reell und heißen die Eigenwerte von H .

Diesen Satz können wir auf die Hesse-Matrix einer zweimal stetig ableitbaren Funktion anwenden. Falls alle Eigenwerte der Hesse-Matrix einer Funktion f , für die $\nabla f(x_0) = 0$ ist, an einer Stelle x_0 positiv sind, handelt es sich um ein lokales Mi-

nimum von f . Sind alle Eigenwerte an dieser Stelle negativ, handelt es sich um ein lokales Maximum von f . Andernfalls spricht man von einem Sattelpunkt (d.h., in manche Richtungen nimmt die Funktion zu, in andere Richtungen ab). Verschwinden Eigenwerte der Hesse-Matrix, so muss man entlang der zugehörigen Hauptachsen die höheren Ableitungen untersuchen.

5.4.2 Laplace- und d'Alembert-Operator

Ein besonderer Ableitungsoperator, der die zweiten Ableitungen einer Funktion von mehreren Argumenten enthält, ist der *Laplace-Operator* [*laplacian*]:

$$\Delta f(x) = \sum_i \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}. \quad (5.71)$$

Besonders wichtig ist der Laplace-Operator für die drei Raumkoordinaten, wenn wir Felder über dem dreidimensionalen Raum betrachten:

$$\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_3^2}. \quad (5.72)$$

Hat das Feld mehrere Komponenten (beispielsweise das elektrische oder magnetische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ bzw. $\vec{B}(\vec{x})$), wirken die Ableitungen auf jede Komponente des Feldes getrennt, das Ergebnis ist also wieder ein entsprechend mehrkomponentiges Feld.

Man beachte, dass diese Definition zunächst nur für orthonormale (kartesische) Koordinaten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ gilt. Wir werden später sehen, wie diese Ableitungsoperatoren in anderen Koordinaten aussehen.

Ebenfalls ein wichtiger Ableitungsoperator in der Physik ist der *Wellenoperator* [*wave operator*] oder *d'Alembert-Operator* [*d'Alembertian, d'Alembert operator*], der beispielsweise in der Theorie des Elektromagnetismus oder auch der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie auftritt. Bei ihm tritt noch die zweite Ableitung nach der Zeit auf, allerdings sind die Vorzeichen entgegengesetzt:

$$\begin{aligned} \square f(\vec{x}, t) &= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) f(\vec{x}, t) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

5.4.3 Ableitungsidentitäten

Die Rotation lässt sich nur auf Vektorfelder anwenden. Da der Gradient eines skalaren Feldes $\Phi(\vec{x})$ jedoch ein Vektorfeld ist, können wir die Rotation eines Gradientenfeldes bestimmen. Wir erhalten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) = 0. \quad (5.74)$$

Beweis: Wir berechnen die i -te Komponente der Rotation des Gradientenfeldes

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}))_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi(\vec{x}) = 0.$$

Der Grund für das Verschwinden der rechten Seite liegt darin, dass $\partial_j \partial_k$ symmetrisch in den Indizes j und k ist (dieses Argument setzt voraus, dass die Funktion $\Phi(\vec{x})$ mindestens zweimal stetig nach ihren Argumenten differenzierbar ist), wohingegen der ϵ -Tensor total antisymmetrisch ist. Die einzelnen Terme heben sich also paarweise weg.

Aus demselben Grund verschwindet auch die Divergenz einer Rotation:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = 0. \quad (5.75)$$

Beweis:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = \sum_{ijk} \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(\vec{x}) = 0. \quad (5.76)$$

Für die Rotation einer Rotation erhalten wir:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x})) - \Delta \vec{A}. \quad (5.77)$$

Für den Beweis benötigen wir die folgende Identität für das Produkt zweier ϵ -Tensoren:³

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (5.78)$$

Zum Beweis von Gl. 5.77 berechnen wir wieder die i -te Komponente der Rotation der Rotation (das Argument \vec{x} lasse ich der Einfachheit halber weg):

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k \\ &= \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\ &= \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m \\ &= \sum_j (\partial_j \partial_i A_j - \partial_j \partial_j A_i). \end{aligned}$$

Der erste Term entspricht dem Gradienten der Divergenz und der zweite Term dem Laplace-Operator angewandt auf die i -te Komponente von \vec{A} .

³Diese Identität folgt aus der sogenannten Graßmann-Identität für beliebige drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:
 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

5.5 Die Taylor-Entwicklung

Wir erläutern die folgenden Überlegungen für eine reellwertige Funktion über den reellen Zahlen. Sie gelten aber mit entsprechenden Verallgemeinerungen auch für mehrkomponentige Funktionen über dem \mathbb{R}^n .

Ist eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in ihrem Definitionsbereich k -mal stetig ableitbar, können wir die Funktion in einer Umgebung eines Punktes x durch ein Polynom approximieren:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k + o(h^k) \quad (5.79)$$

(der Restterm verschwindet also schneller für $h \rightarrow 0$ als die Funktion h^k). Diese Reihe bezeichnet man auch als *Taylor-Reihe* [*Taylor series*] oder *Taylor-Entwicklung* [*Taylor expansion*] (nach dem englischen Mathematiker Brook Taylor (1685–1731)).

Zum Beweis benötigt man ein Zwischenergebnis: Wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an einer Stelle x_0 zusammen mit ihren ersten k Ableitungen übereinstimmen, also

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \quad \forall 0 \leq n \leq k. \quad (5.80)$$

gilt:

$$f(x_0+h) - g(x_0+h) = o(h^k). \quad (5.81)$$

Im nächsten Schritt zeigt man, dass das Polynom auf der rechten Seite von Gl. 5.79 bis zur Ordnung k dieselben Ableitungen nach h hat, wie die Funktion $f(x+h)$ (aufgefasst als eine Funktion von h bei festgehaltenem Wert x).

In vielen Fällen sind Funktionen in der Physik unendlich oft stetig differenzierbar, dann gilt:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} h^k + R(h), \quad (5.82)$$

wobei der Restterm $R(h)$ schneller als *jede* Potenz von h verschwindet, also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h^n} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (5.83)$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite von Gl. 5.82 bezeichnet man als die *Maclaurin-Reihe* [*Maclaurin series*] der Funktion $f(x)$, benannt nach dem schottischen Mathematiker Colin Maclaurin (1698–1746).

Dass die genannten Restterme manchmal notwendig sind, zeigt folgendes Beispiel: Die Funktion

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (5.84)$$

hat die Eigenschaft, dass sämtliche Ableitungen an der Stelle $x = 0$ verschwinden. Die Taylor- bzw. Maclaurin-Entwicklung dieser Funktion um den Punkt $x = 0$ ist

also das Polynom $P(x) = 0$. Trotzdem verschwindet die Funktion nicht identisch. Die Korrekturterme sind jedoch im Grenzfall $x \rightarrow 0$ kleiner als jede Potenz in x und tragen daher zu einer Potenzreihenentwicklung nicht bei.

Ist eine Funktion in ihrem Definitionsbereich gleich ihrer Taylor-Entwicklung, bezeichnet man sie als *reell-analytisch* [*real analytic*]. Die meisten Funktionen, die in der Physik von Bedeutung sind, haben diese Eigenschaft.

5.5.1 Der Satz von L'Hospital

Betrachtet man den Quotienten von zwei Funktionen, $q(x) = f(x)/g(x)$, an einer Stelle x_0 , an denen sowohl die Funktion im Nenner wie auch die Funktion im Zähler eine Nullstelle haben, also $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so ist dieser Quotient dort zunächst nicht definiert. Man kann aber untersuchen, ob sich die Funktion $q(x)$ an dieser Stelle stetig fortsetzen lässt, d.h., ob es einen Wert $q(x_0)$ gibt, sodass die Funktion

$$q(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & x \neq x_0 \\ q(x_0) & x = 0 \end{cases} \quad (5.85)$$

(hier wurde angenommen, dass $g(x)$ außer x_0 keine weiteren Nullstellen hat) stetig ist. Wenn sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ eine Taylor-Entwicklung um den Punkt x_0 zulassen, können wir diese Taylor-Entwicklung im Zähler und Nenner einsetzen und $q(x)$ in der Umgebung von x_0 betrachten:

$$q(x_0 + h) = \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 \dots}{g(x_0) + g'(x_0)h + \frac{1}{2}g''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^3 \dots} \quad (5.86)$$

Da $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gelten soll, folgt:

$$q(x_0 + h) = \frac{f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 \dots}{g'(x_0)h + \frac{1}{2}g''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^3 \dots} \quad (5.87)$$

$$= \frac{h(f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^2 \dots)}{h(g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)h + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^2 \dots)} \quad (5.88)$$

$$= \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^2 \dots}{g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)h + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^2 \dots} \quad (5.89)$$

Sofern $g'(x_0) \neq 0$, existiert diese Funktion bei x_0 und hat den Wert

$$q(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad (5.90)$$

Es kann vorkommen, dass auch die beiden ersten Ableitungen der Funktionen f und g an der Stelle x_0 verschwinden, dann kann man das Verfahren einen Schritt weiter

führen:

$$q(x_0 + h) = \frac{\frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 \dots}{\frac{1}{2}g''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_0)h^3 \dots} \quad (5.91)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}h^2(f''(x_0) + \frac{1}{2!}f'''(x_0)h \dots)}{\frac{1}{2}h^2(g''(x_0) + \frac{1}{2!}g'''(x_0)h \dots)} \quad (5.92)$$

$$= \frac{f''(x_0) + \frac{1}{2!}f'''(x_0)h \dots}{g''(x_0) + \frac{1}{2!}g'''(x_0)h \dots}. \quad (5.93)$$

Falls also $g(x_0) = f(x_0) = 0$ und $g'(x_0) = f'(x_0) = 0$, folgt

$$q(x_0) = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}. \quad (5.94)$$

Dies führt uns auf den Satz von L'Hopital (benannt nach dem Mathematiker Guillaume Francois Antoine, Marquis de L'Hospital (1661-1704)): Der Grenzwert für den Quotient zweier Funktionen, die beide an einer Stelle x_0 verschwinden und deren erste $n - 1$ Ableitungen ebenfalls an dieser Stelle verschwinden, ist durch

$$q(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)} \quad (5.95)$$

gegeben, wobei $f^{(n)}$ bzw. $g^{(n)}$ die n -te Ableitung von f bzw. g bezeichnen.

Ein Beispiel, das in der Physik gelegentlich auftritt, ist die Funktion

$$q(x) = \frac{\sin kx}{x} \quad (x \neq 0) \quad (5.96)$$

mit

$$q(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \quad (5.97)$$

5.5.2 Einige spezielle Funktionen

Als abschließende Anwendung der Inhalte dieses Kapitels betrachten wir nochmals die Exponentialfunktion sowie die Sinus- und Kosinus-Funktionen.

Wir hatten für die Exponentialfunktion die Reihenentwicklung

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (5.98)$$

angegeben. Bilden wir die Ableitung dieser Reihe, so erhalten wir sofort:

$$\frac{d \exp(x)}{dx} = \exp(x). \quad (5.99)$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist also wieder gleich der Exponentialfunktion.

Andererseits folgen aus den Ableitungsregeln für den Sinus und Kosinus:

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \quad (5.100)$$

sowie den speziellen Werten $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$ die Taylor-Entwicklungen um den Punkt $x = 0$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (5.101)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \quad (5.102)$$

Dass die Taylor-Entwicklungen dieser Funktionen keinen Restterm haben muss allerdings erst bewiesen werden. Der einfachere Weg, die Äquivalenz von trigonometrischer Definition und Reihenentwicklung zu zeigen, erfolgt über die Ableitungen. Sowohl aus der Trigonometrie als auch aus der Reihenentwicklung folgen nämlich die Beziehungen

$$\frac{d^2 \sin(x)}{dx^2} = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \cos(x)}{dx^2} = -\cos(x). \quad (5.103)$$

Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (5.104)$$

lässt sich ebenfalls über die Taylor-Entwicklung ableiten (wenn man einen komplizierten Beweis möchte). Sehr hilfreich sind auch oft die folgenden Entwicklungen:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3) \quad (5.105)$$

und

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \quad (5.106)$$

Für $x = 1$ erhalten wir die alternierende harmonische Reihe und damit die Identität aus Gl. 3.23.

Kapitel 6

Integrale

Das Integral entstand ursprünglich aus der Flächenmessung. Erst später erkannte man, dass die Integration in gewisser Hinsicht als Umkehrung der Tangentenfindung (Ableitung) verstanden werden kann. Diesen Zusammenhang bezeichnet man als den Hauptsatz der Integralrechnung. Mithilfe von einfachen (eindimensionalen) Integralen lassen sich nicht nur Flächen unter Kurven, sondern auch Längen und spezielle Volumina (um bei geometrischen Konzepten zu bleiben) bestimmen.

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst eindimensionale Integrale. Große Teile stammen aus dem Skript zum „Vorkurs Mathematik“ [5], das hinsichtlich mancher Einzelheiten ausführlicher ist. Mehrfachintegrale werden in Kapitel 10 behandelt.

6.1 Das Integral als Flächenmessung

Die antiken Mathematiker verstanden unter der Flächenmessung meist eine geometrische Konstruktion, bei der eine vorgegebene Fläche durch ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt ersetzt wird. Diese Vorgehensweise bezeichnete man als „Quadratur“. Eines der klassischen mathematischen Probleme war die „Quadratur des Kreises“. Erst 1882 wurde durch Ferdinand von Lindemann (1852–1939) bewiesen, dass dieses Problem (mit den klassischen Instrumenten Zirkel und Lineal) nicht lösbar ist.

Da wir die Flächen von Rechtecken, Dreiecken und Trapezen vergleichsweise einfach angeben können, führen wir die Flächenmessung auf solche Figuren zurück.

Gegeben sei eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen die Fläche unter einer Kurve (definiert durch den Graph dieser Funktion) zwischen zwei Werten $x = a$ und $x = b$ bestimmen. Dazu unterteilen wir die Strecke $[a, b]$ in N gleiche Abschnitte der Breite Δx , sodass $(b - a) = N \cdot \Delta x$. Die Punkte dieser Unterteilung seien $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \dots$ bis $x_N = b$. Dann gilt für die Fläche unter der Kurve näherungsweise:

$$F = \sum_{n=1}^N f(x_n) \cdot \Delta x. \quad (6.1)$$

Für das Folgende setze ich meist voraus, dass f in dem betrachteten Intervall stetig ist. Diese Bedingung ist eigentlich zu streng; es genügt *stückweise stetig* [*piecewise continuous*]. Das bedeutet, die Stellen, an denen die Funktion nicht stetig ist, haben keine Häufungspunkte (bzw. in jedem kompakten Intervall gibt es nur endlich viele Sprungstellen). In diesem Fall kann man die Flächen unter den stetigen Abschnitten bestimmen und die Gesamtfläche zum Schluss als Summe dieser Teilflächen schreiben.

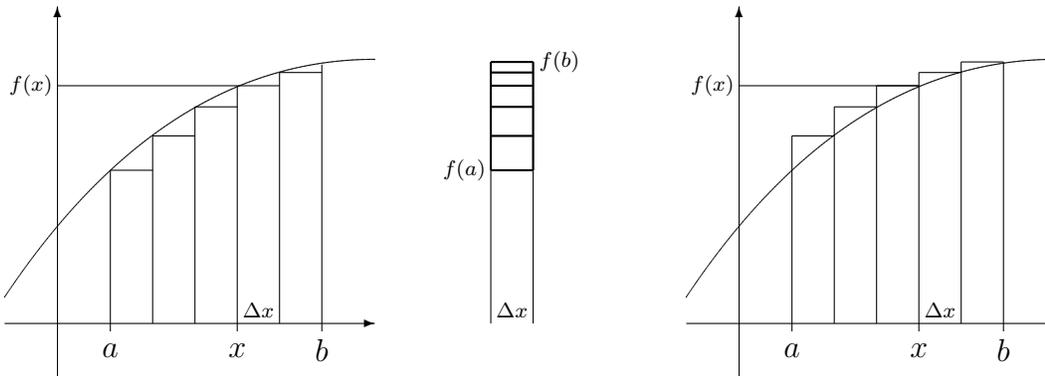


Abbildung 6.1: Die Fläche unter einer (stückweise stetigen) Funktion ist näherungsweise durch die Summe der N schmalen Rechtecke gegeben. Für den Grenzfalle $N \rightarrow \infty$ spielt es keine Rolle, ob man jeweils die linke (Abb. links) oder die rechte (Abb. rechts) Höhe eines Rechtecks betrachtet. Die Differenz zwischen beiden Flächen (Abb. Mitte) ist gleich $\Delta A = \Delta x(f(b) - f(a))$ und verschwindet für $\Delta x \rightarrow 0$.

Unter den genannten Voraussetzungen kann man den Grenzwert $N \rightarrow \infty$ und gleichzeitig $\Delta x \rightarrow 0$ betrachten, wobei $N \cdot \Delta x = (b - a)$ konstant bleiben soll. Man erhält in diesem Grenzfalle die Fläche unter der Kurve. Dafür schreibt man:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(x_n) \cdot \Delta x \quad (6.2)$$

($N \cdot \Delta x = b - a$ fest).

A bezeichnet man als das Integral [*integral*] über die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$. Konkret spricht man auch von einem *Riemann-Integral*. Ich werde später (Kap. 9) im Zusammenhang mit der Maßtheorie eine verallgemeinerte Definition für Integrale einführen.

Die Konvergenz dieser Reihe gegen die Fläche unter einer Kurve lässt sich leicht zeigen, wenn man die tatsächliche Fläche einmal durch Rechtecke unterhalb der Kurve (Abb. 6.1 links) und einmal Rechtecke oberhalb der Kurve (Abb. 6.1 rechts) abschätzt. Es handelt sich somit um eine Intervallschachtelung der tatsächlichen Fläche (im vorliegenden Fall sei $f(x)$ monoton steigend; bei einer monoton fallenden Funktion drehen

sich die Ungleichheitszeichen um):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \cdot \Delta x \leq A \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(x_n) \cdot \Delta x. \quad (6.3)$$

Die Differenz zwischen den beiden Näherungen (Abb. 6.1 Mitte) verschwindet im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ bzw. $\Delta x \rightarrow 0$, da

$$\sum_{n=1}^N f(x_n) \cdot \Delta x - \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \cdot \Delta x = (f(b) - f(a)) \cdot \Delta x. \quad (6.4)$$

Alle Terme außer dem letzten der ersten Summe und dem ersten der zweiten Summe heben sich paarweise weg.

Ersetzt man Δx noch durch $(b - a)/N$, so wird deutlich, dass die Fläche gleich dem „Mittelwert“ der Funktionswerte $f(x_i)$ ist, multipliziert mit der „Grundseite“ $(b - a)$:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} (b - a) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (6.5)$$

6.1.1 Einfache Eigenschaften des Integrals

Aus der Interpretation (und Definition) des Integrals als Fläche ergibt sich unmittelbar folgende Identität:

$$A = \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (6.6)$$

für alle $a < b < c$.

Die folgenden beiden Beziehungen folgen ebenfalls aus der Definition des Integrals:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (6.7)$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ konstant}). \quad (6.8)$$

Diese beiden Bedingungen kennzeichnen die Bildung des Integrals als sogenannte „lineare Abbildung“. Dabei ist der Vektorraum, für den diese Linearität gilt, der Vektorraum der stetigen (bzw. stückweise stetigen) Funktionen. Da das Bild dieser Abbildung eine reelle Zahl ist, handelt es sich bei dem bestimmten Integral um ein Element des Dualraums dieses Vektorraums.

Ist $f(x)$ negativ, wird auch der Beitrag zur Fläche negativ. Ist man an dem Betrag einer Fläche unter einer Kurve interessiert, muss man entweder über $|f(x)|$

integrieren, oder (was zu demselben Ergebnis führt) zunächst die Nullstellen von $f(x)$ bestimmen sowie die Bereiche, in denen $f(x)$ positiv bzw. negativ ist, und dann die Beiträge dieser Bereiche entsprechend addieren oder subtrahieren.

Außerdem definieren wir, dass der Wert des bestimmten Integrals das Vorzeichen umkehrt, wenn man die Integrationsgrenzen vertauscht:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx. \quad (6.9)$$

6.1.2 Der Hauptsatz der Integralrechnung

Wir bezeichnen mit $F_1(x)$ das Integral von einem Punkt a zu einem Punkt $x > a$ über eine Funktion $f(z)$:

$$F_1(x) = \int_a^x f(z) \, dz. \quad (6.10)$$

Für diese Funktion berechnen wir:

$$F_1(x+h) = F_1(x) + F_1'(x) \cdot h + o(h). \quad (6.11)$$

Es gilt:

$$F_1(x+h) = \int_a^{x+h} f(z) \, dz = \int_a^x f(z) \, dz + \int_x^{x+h} f(z) \, dz. \quad (6.12)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist $F_1(x)$, der zweite Term verläuft für sehr kleine Werte von h über ein entsprechend kleines Intervall, sodass sich aus der Definition des Integrals ergibt:

$$\int_x^{x+h} f(z) \, dz = f(x) \cdot h + o(h). \quad (6.13)$$

Damit folgt:

$$F_1'(x) = f(x). \quad (6.14)$$

Die Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze ist somit gleich der Funktion $f(x)$. Damit ist das Integral (6.10) selbst eine sogenannte *Stammfunktion* von $f(x)$, also eine Funktion, deren Ableitung gerade $f(x)$ ist. Diese Funktion ist nicht eindeutig, da man immer eine x -unabhängige Konstante addieren kann (dies entspricht der freien Wahl der unteren Integrationsgrenze).

Wir können die entsprechende Rechnung auch für die untere Grenze wiederholen und erhalten für

$$F_2(x) := \int_x^b f(z) \, dz \quad (6.15)$$

die Ableitung:

$$F_2'(x) = -f(x). \quad (6.16)$$

Damit können wir das bestimmte Integral angeben:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad (6.17)$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist. Bei der Differenzbildung fällt die freie Konstante heraus, sodass dieses Ergebnis eindeutig ist. Oft schreibt man für die rechte Seite auch:

$$F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a). \quad (6.18)$$

Diese Beziehung zwischen der Integration und der Ableitung bezeichnet man auch als Hauptsatz der Integralrechnung. Anders ausgedrückt gilt:

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (6.19)$$

6.1.3 Unbestimmte Integrale

Für die Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ schreibt man manchmal auch ein *unbestimmtes Integral* [*indefinite integral*] (ein Integral ohne Grenzen):

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c. \quad (6.20)$$

Die freie Konstante c fällt bei der Ableitung wieder heraus. Die Stammfunktion ist daher nur bis auf diese Konstante c eindeutig.

Von einigen Funktionen kennen wir die Stammfunktionen:

$$\int x^y \, dx = \frac{1}{y+1} x^{y+1} + c \quad (y \neq -1) \quad (6.21)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c \quad (6.22)$$

$$\int e^{\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + c \quad (6.23)$$

$$\int \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\omega} \sin \omega x + c \quad (6.24)$$

$$\int \sin \omega x \, dx = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x + c. \quad (6.25)$$

Im Gegensatz zur Ableitung von elementaren Funktionen (rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen und Funktionen von diesen Funktionen), für deren Berechnung es feste Regeln gibt, kann man von manchen elementaren Funktionen die Stammfunktionen nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen angeben.

6.2 Integrationsregeln

Zu den allgemeinen Ableitungsregeln gibt es entsprechende Integrationsregeln.

6.2.1 Partielle Integration

Die Produktregel (vgl. S. 120) für Ableitungen besagte:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \quad (6.26)$$

Wir bilden auf beiden Seiten dieser Gleichung das Integral:

$$\int (f \cdot g)' dx = \int f' \cdot g dx + \int f \cdot g' dx. \quad (6.27)$$

Für die linke Seite folgt nach dem Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = f(x) \cdot g(x), \quad (6.28)$$

dieses Integral ist also bekannt. Auf der rechten Seite stehen zwei im Allgemeinen unbekannte Integrale und wir können die Identität in folgender Form schreiben:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = - \int f'(x) \cdot g(x) dx + f(x) \cdot g(x). \quad (6.29)$$

Unter Berücksichtigung der Grenzen gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + f(b)g(b) - f(a)g(a). \quad (6.30)$$

Diese Regel bezeichnet man als *partielle Integration* [*partial integration*]. Man „schiebt“ somit die Ableitung von der einen Funktion auf die andere Funktion hinüber.

6.2.2 Partialbruchzerlegung

Dieses Verfahren ist kein ausgesprochenes Integrationsverfahren, sondern dient eher der Vereinfachung von rationalen Funktionen, was allerdings bei Integralen helfen kann.

Betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$g(x) = \frac{1}{1 - f(x)^2}, \quad (6.31)$$

wobei $f(x)$ nahezu beliebig sein kann ($f(x) \neq \pm 1$). Der Nenner lässt sich faktorisieren und man findet:

$$g(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - f(x)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + f(x)}. \quad (6.32)$$

Diese Zerlegung des Bruchs erleichtert manchmal das Finden der Stammfunktion.

Ähnliches gilt für:

$$\frac{f(x)}{1 - f(x)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - f(x)} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + f(x)}. \quad (6.33)$$

6.2.3 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel entspricht in gewisser Hinsicht der Kettenregel (vgl. S. 121) bei der Ableitung. Die Idee ist, dass sich die Fläche unter einer Kurve nicht ändert, wenn man den Maßstab auf der x -Achse (lokal) anders wählt (beispielsweise die Intervallbreiten Δx unterschiedlich wählt), dieser neuen Wahl aber natürlich Rechnung trägt.

Betrachten wir nochmals die Kettenregel der Ableitung einer Funktion $F(x) = g(y(x))$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dg(y(x))}{dx} = g'(y(x)) \cdot y'(x). \quad (6.34)$$

Wir integrieren beide Seiten dieser Gleichung in den Grenzen von a bis b und erhalten:

$$F(b) - F(a) = g(y(b)) - g(y(a)) = \int_a^b g'(y(x)) \cdot y'(x) dx. \quad (6.35)$$

Wenn es uns also gelingt, die zu integrierende Funktion $f(x)$ in dem gesuchten Integral

$$F = \int_a^b f(x) dx \quad (6.36)$$

in folgender Form darzustellen

$$f(x) = g'(y(x)) \cdot y'(x), \quad (6.37)$$

haben wir das Integral bestimmt.

Betrachten wir dazu ein Beispiel. Berechnet werden soll

$$F = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx. \quad (6.38)$$

Wenn wir folgende Funktionen betrachten:

$$g(y) = -2e^{-y} \quad \text{und} \quad y(x) = \sqrt{x} \quad (6.39)$$

gilt tatsächlich:

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = g'(y(x)) \cdot y'(x), \quad (6.40)$$

denn

$$\frac{d(-2e^{-y})}{dy} \Big|_{y=\sqrt{x}} = 2e^{-\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad \frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (6.41)$$

Also erhalten wir als Ergebnis:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}} \Big|_a^b = 2e^{-\sqrt{a}} - 2e^{-\sqrt{b}}. \quad (6.42)$$

Oftmals ist es jedoch schwer, die richtigen Funktionen $g(y)$ und $y(x)$ auf Anhieb zu erkennen. Es soll daher ein direkterer Weg angegeben werden, die Substitution durchzuführen.

Berechnet werden soll das bestimmte Integral

$$F = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.43)$$

Die Grenzen sind in diesem Fall wichtig, weil bei der Substitutionsregel auch die Grenzen beeinflusst werden. Will man ein unbestimmtes Integral berechnen, muss man die Definition der Stammfunktion als Integral bis zur Grenze der Variablen x verwenden.

Wir nehmen an, die Funktion $f(x)$ lässt sich als Funktion $g(y(x))$ schreiben, d.h., $f(x)$ lässt sich in geeigneter Weise als Hintereinanderschaltung zweier Abbildungen schreiben. Statt einer Integration über die Variable x soll das Integral als eine Integration über die Variable y umgeschrieben werden.

Die folgende Herleitung ist mathematisch nicht ganz „sauber“, aber sie ist eine hilfreiche Eselsbrücke, falls man die Formeln mal vergessen hat.

Es gilt

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) \quad \text{bzw.} \quad dy = y'(x) dx. \quad (6.44)$$

Im Integral ersetzt man nun dx durch dy , außerdem muss man allerdings noch die Umkehrfunktion von $y(x)$ bestimmen, also $x = x(y)$. Dann gilt

$$F = \int_a^b g(y(x)) dx = \int_{y(a)}^{y(b)} g(y) \cdot \frac{1}{y'(x(y))} dy. \quad (6.45)$$

Als Beispiel berechnen wir nochmals dasselbe Integral wie zuvor, diesmal allerdings nach Formel (6.45). Es ist

$$y(x) = \sqrt{x} \quad \implies \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx. \quad (6.46)$$

In dieser Formel ist \sqrt{x} noch durch y zu ersetzen:

$$dy = \frac{1}{2y} dx, \quad (6.47)$$

oder

$$dx = 2y dy. \quad (6.48)$$

Die neuen Grenzen sind $y(a) = \sqrt{a}$ und $y(b) = \sqrt{b}$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} F &= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{y} e^{-y} 2y dy \\ &= 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-y} dy \\ &= -2 e^{-y} \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = -2 e^{-\sqrt{b}} + 2 e^{-\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Eine dritte Version der Substitutionsregel fasst den Integrationsparameter x als Funktion von einer Variablen y auf, dann gilt:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_{y=x^{-1}(a)}^{y=x^{-1}(b)} g(x(y)) \frac{dx(y)}{dy} dy. \quad (6.49)$$

Es handelt sich jedoch nicht um drei verschiedene Integrationsregeln sondern dieselbe Regel wird in unterschiedlicher Form (welche Variable ist eine Funktion von welcher anderen Variablen) interpretiert.

Häufige Anwendungen der Substitutionsregel

Die folgenden Formeln folgen aus der Substitutionsregel und finden in der Physik häufig Anwendung:

$$\int_a^b f(x^2)x dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} f(y) dy. \quad (6.50)$$

Hier wurde $y = x^2$ substituiert. Es ist $dy = 2x dx$. Allgemeiner

$$\int_a^b f(x^n)x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int_{a^n}^{b^n} f(y) dy. \quad (6.51)$$

Diese Gleichung gilt (für Integrationsbereiche im \mathbb{R}^+) auch für beliebige reelle $n \neq 0$.

Gelegentlich tritt auch das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(\cos \theta) \sin \theta d\theta = - \int_{\cos \alpha}^{\cos \beta} f(y) dy \quad (6.52)$$

auf (und natürlich umgekehrt: $\sin \theta$ als Argument der Funktion f und $\cos \theta d\theta$ als „Integrationsmaß“).

Ein weiteres Beispiel ist so allgemein, dass es oftmals nicht als Anwendung der Substitutionsregel empfunden wird:

$$\int_a^b f(\lambda x + c) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a + c}^{\lambda b + c} f(y) dy. \quad (6.53)$$

Hier wurde $y = \lambda x + c$ substituiert. Besonders hilfreich ist diese Regel bei Integralen der Form

$$\int_a^b \frac{1}{(\lambda x + c)} dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a + c}^{\lambda b + c} \frac{1}{y} dy = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\lambda b + c}{\lambda a + c} \right). \quad (6.54)$$

6.3 Zwei Anwendungen

6.3.1 Arbeit als Integral über eine Kraft

In der Physik wird die „Arbeit“ W oft vereinfacht als „Kraft mal Weg“ definiert und man schreibt:

$$W = F \cdot s. \quad (6.55)$$

Genauer ist die Arbeit gleich der Kraft F multipliziert mit der Wegstrecke s , um die ein Körper gegen die Kraft bewegt wird.

Gleichung 6.55 ist nur gültig, wenn die Kraft entlang der Wegstrecke konstant ist. Ändert sich die Kraft jedoch entlang der Wegstrecke, ist also eine Funktion vom Ort x , müssen wir die Beiträge der Teilstrecken addieren:

$$W = \sum_i F(x_i) \cdot \Delta x. \quad (6.56)$$

Hierbei ist Δx eine sehr kurze Wegstrecke am Punkt x_i , entlang der die Kraft $F(x_i)$ näherungsweise als konstant angesehen werden kann. Im Grenzfall sehr vieler sehr kurzer Wegstrecken erkennt man in dieser Formel die Definition des Integrals wieder:

$$W = \int_a^b F(x) dx. \quad (6.57)$$

Beispiele

1. Ist die Kraft F konstant (wie näherungsweise im Gravitationsfeld der Erde, wo $F = mg$ ist) und ist die Wegstrecke die Höhe von 0 auf h , so folgt:

$$W = \int_0^h F ds = F \cdot s \Big|_0^h = F \cdot h - F \cdot 0 = F \cdot h. \quad (6.58)$$

Das ist das vertraute Ergebnis.

2. Die Federkraft ist $F = R \cdot s$; sie wächst also proportional zur Auslenkung s . Die Spannenergie in einer Feder, die von 0 bis zu einer Auslenkung x gedehnt wurde, ist gleich der Arbeit, die bei dieser Dehnung aufgebracht wird:

$$W = \int_0^x R \cdot s ds = \frac{1}{2} R \cdot s^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2} R x^2. \quad (6.59)$$

Arbeit als Wegintegral im \mathbb{R}^3

Wegintegrale im \mathbb{R}^3 betrachten wir ausführlicher im Kapitel 10. Trotzdem hier einige Vorbemerkungen.

Verschiebt man einen Gegenstand im \mathbb{R}^3 um eine Wegstrecke $\vec{\Delta}s$ gegen eine Kraft \vec{F} (man beachte, dass nun sowohl die Wegstrecke als auch die Kraft Vektoren sind), so ist die geleistete Arbeit:

$$\Delta W = -\vec{F} \cdot \vec{\Delta}s. \quad (6.60)$$

Das Minuszeichen tritt auf, weil Arbeit geleistet werden muss (also W positiv ist), wenn die Kraft der Verschiebungsrichtung *entgegen* gerichtet ist. Wird der Weg durch eine Bahnkurve $\vec{x}(t)$ beschrieben, gilt für die infinitesimale Wegstrecke näherungsweise:

$$\vec{\Delta}s = \vec{v}(t) \Delta t = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \Delta t \quad (6.61)$$

Im Grenzfall „unendlich vieler infinitesimal kleiner Abschnitte“ erhält man für die Arbeit:

$$W = - \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt. \quad (6.62)$$

Das Produkt

$$P(t) = -\vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v}(t) \quad (6.63)$$

bezeichnet man auch als *Leistung*. (Hier soll P positiv sein, wenn Energie von der Umgebung in das System, das sich im Kraftfeld bewegt, hineinfließt, also wenn die Kraft gegen die Geschwindigkeit gerichtet ist.)

6.3.2 Rotationskörper und Längen

Wir betrachten im Folgenden drei Fälle, bei denen mithilfe des Integrals (als Fläche unter einer Kurve) auch Volumina, Mantelflächen oder Längen berechnet werden können.

Das Volumen eines Rotationskörpers

Einen Rotationskörper erhält man aus einer Kurve $f(x)$, indem man den Graphen der Funktion um die x -Achse dreht. Man kann nun das Volumen dieses Rotationskörpers bestimmen. Im Gegensatz zur Flächenmessung, wo die Flächen von Rechtecken der Form $f(x) \cdot \Delta x$ addiert wurden, bildet man nun die Summe von Zylindern mit Radius $f(x)$ und „Höhe“ Δx . Das Volumen eines solchen Zylinders ist:

$$\Delta V = \pi f(x)^2 \cdot \Delta x. \quad (6.64)$$

Damit erhält man für das Volumen des Rotationskörpers zwischen zwei Punkten a und b :

$$V = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \pi f(x_i)^2 \cdot \Delta x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \quad (6.65)$$

Die Länge einer Kurve

In ähnlicher Form kann man auch die Länge einer Kurve $f(x)$ zwischen zwei Punkten a und b bestimmen. Für einen „infinitesimalen“ Abstand Δx gilt für die Länge der Kurve zwischen $f(x_i)$ und $f(x_i + \Delta x)$:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_i + \Delta x) - f(x_i))^2} \quad (6.66)$$

$$= \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \right)^2}. \quad (6.67)$$

Damit ergibt sich für die Gesamtlänge der Kurve zwischen den beiden Punkten a und b :

$$L(a, b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta l_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x} \right)^2} \Delta x \quad (6.68)$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (6.69)$$

Beim letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass im Limes $N \rightarrow \infty$ bzw. $\Delta x \rightarrow 0$ der Differenzenquotient zur ersten Ableitung der Funktion wird.

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers

Abschließend soll noch gezeigt werden, wie man die Mantelfläche eines Rotationskörpers in den Grenzen a und b bestimmen kann. Wir zerteilen die Mantelfläche durch Schnitte senkrecht zur x -Achse in kleine Scheiben, die man näherungsweise als Kegelstümpfe der Höhe Δx interpretieren kann. Wir berechnen zu jedem dieser Kegelstümpfe die Mantelfläche und addieren schließlich die Beiträge.

Wie wir oben gesehen haben, lässt sich ein „infinitesimales“ Linienelement in folgender Form darstellen:

$$\Delta l_i = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \right)^2}. \quad (6.70)$$

Die Mantelfläche des zugehörigen Kegelstumpfs ist durch

$$\Delta A_i = 2\pi f(x_i) \cdot \Delta l_i + o(\Delta l_i) \quad (6.71)$$

gegeben. $f(x_i)$ ist der Radius des Kegelstumpfs und somit ist $2\pi f(x_i)$ der Umfang. Insgesamt folgt für die Mantelfläche:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta A_i = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi f(x_i) \Delta l_i \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung [*differential equation*] ist eine Gleichung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen, die an jedem Punkt des Definitionsbereichs erfüllt sein soll. Bei einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* [*ordinary differential equation*] hängt die Funktion nur von einem Argument $t \in \mathbb{R}$ ab (in der Physik handelt es sich dabei oft um die Zeit). Bei einer *partiellen Differentialgleichung* [*partial differential equation*] kann die gesuchte Funktion von mehreren Argumenten abhängen und dementsprechend handelt es sich um eine Beziehung zwischen der Funktion und ihren partiellen Ableitungen. In diesem Kapitel geht es nur um gewöhnliche Differentialgleichungen; partielle Differentialgleichungen werden in der Physik meist im Rahmen der Elektrodynamik behandelt. Den Grad der höchsten Ableitung, die in der Gleichung auftritt, bezeichnet man als die *Ordnung* [*order*] der Gleichung.

Die so genannten Newton'schen [*Newton's equations of motion*] Bewegungsgleichungen (für ein einzelnes Teilchen der Masse m) haben die Form

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}(t), \vec{v}(t), t), \quad (7.1)$$

wobei $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ die Kraft bezeichnet, die auf ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t)$ am Ort \vec{x} (und eventuell zum Zeitpunkt t) wirkt. Diese Kraft bezeichnet zunächst ein verallgemeinertes Feld (sofern sie explizit von der Geschwindigkeit abhängt) für alle Orte und Geschwindigkeiten. Die gesuchte Bahnkurve $\vec{x}(t)$ sollte dann die obige Differentialgleichung zu jedem Zeitpunkt t erfüllen. Bei der Newton'schen Bewegungsgleichung handelt es sich somit um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Da es sich bei der Bahnkurve $\vec{x}(t)$ eigentlich um *drei* Funktionen handelt (die drei Komponenten $x_i(t)$) und die Kraft für jede dieser Komponenten von den anderen Komponenten abhängen kann, spricht man auch von einem *gekoppelten System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung*.

Man beachte, dass sich bei Differentialgleichungen die Beziehungen zwischen der Funktion und ihren Ableitungen immer auf denselben Ort bzw. denselben Zeitpunkt beziehen und an jedem Ort bzw. Zeitpunkt gelten müssen. Dies drückt für physikalische Systeme eine *lokale Kausalität* [*local causality*] aus: Ereignisse an einem Ort zu einem bestimmten Zeitpunkt beeinflussen nur Ereignisse in unmittelbarer Umgebung und in unmittelbarer Zeitnähe weitere Ereignisse. In der Physik gibt es (vermutlich) keine nachweisbaren *Fernwirkungen* [*action at a distance*], weder räumlich noch zeitlich. Theorien, welche solche Beziehungen beschreiben, sind meist phänomenologischer Natur und vernachlässigen die Mechanismen der Wirkungsübertragung.

7.1 Zwei Beispiele

Ich beginne dieses Kapitel mit zwei Beispielen für Differentialgleichungen, bei denen die Lösungen schon bekannt sind bzw. leicht „erraten“ werden können. Die an den Beispielen gewonnenen Erkenntnisse können wir später entsprechend verallgemeinern.

7.1.1 Die Zerfalls- bzw. Wachstumsgleichung

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t). \quad (7.2)$$

Die Ableitung der Funktion (zum Zeitpunkt t) ist also proportional zu der Funktion selbst (zum selben Zeitpunkt).

Für $\lambda > 0$ hat die Ableitung dasselbe Vorzeichen wie die Funktion, d.h., ist die Funktion positiv, ist auch die Ableitung positiv und die Funktion wird noch größer. Ist die Funktion negativ, gilt dies auch für die Ableitung und die Funktion wird noch negativer. Für positive Werte von λ beschreibt die Differentialgleichung exponentielles Wachstum. Entsprechend beschreibt die Gleichung für $\lambda < 0$ den exponentiellen Zerfall.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist schon bekannt:

$$x(t) = A \exp(\lambda t). \quad (7.3)$$

A ist eine Konstante, die durch die Differentialgleichung nicht festgelegt ist. Man bezeichnet eine solche Konstante als *Integrationskonstante* [*integration constant*]. Sie wird erst durch eine Bedingung an die Lösung festgelegt, beispielsweise die *Anfangsbedingung* [*initial condition*] $x(0)$. Im vorliegenden Fall gilt

$$x(t) = x(0) \exp(\lambda t). \quad (7.4)$$

Im Hinblick auf die spätere Diskussion zur Existenz und Eindeutigkeit von Differentialgleichungen soll hier ein konstruktives Verfahren zur Lösung der Gleichung gezeigt werden. Dieses Verfahren bezeichnet man allgemein als *Verfahren von Picard und Lindelöf*. Dazu integrieren wir beide Seiten der Differentialgleichung:

$$\int_0^t \dot{x}(\tau) \, d\tau = \lambda \int_0^t x(\tau) \, d\tau \quad (7.5)$$

$$\implies x(t) - x(0) = \lambda \int_0^t x(\tau) \, d\tau, \quad (7.6)$$

oder

$$x(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x(\tau) \, d\tau. \quad (7.7)$$

Die offene Integrationskonstante wurde hier durch die Anfangsbedingung festgelegt, denn zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet das Integral auf der rechten Seite. Allgemeiner hätte man auch

$$x(t) = x(t_0) + \lambda \int_{t_0}^t x(\tau) \, d\tau \quad (7.8)$$

schreiben können.

Gleichung 7.7 bezeichnet man als Integralgleichung [*integral equation*]. Allgemein drückt eine Integralgleichung eine Beziehung zwischen dem Wert einer Funktion und einem Integral über diese Funktion aus (sowie eventuell Ableitungen dieser Funktion.) Sie ist äquivalent zur Differentialgleichung, enthält aber zusätzlich noch die Information zu der gewählten Anfangsbedingung.

Wir ersetzen nun die Integralgleichung durch eine *iterative Gleichung* [*iterative equation*]:

$$x_{n+1}(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x_n(\tau) \, d\tau. \quad (7.9)$$

Die Idee ist, mit dieser iterativen Gleichung eine Folge von Funktionen $x_n(t)$ zu konstruieren, die gegen die gesuchte Lösung der Integralgleichung konvergiert.

Als Startfunktion setzen wir $x_0(t) = x(0)$. (Wir hätten auch mit der Funktion $x_0(t) = 0$ beginnen können, dann wäre $x_1(t) = x(0)$; die Folge wäre somit dieselbe, nur der Index wäre um 1 verschoben.) Es folgt

$$x_1(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x(0) \, d\tau = x(0) + \lambda x(0)t, \quad (7.10)$$

und

$$x_2(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x_1(\tau) \, d\tau = x(0) + \lambda x(0)t + \frac{1}{2} \lambda^2 x(0)t^2. \quad (7.11)$$

Man kann nun leicht zeigen (beispielsweise durch vollständige Induktion), dass

$$x_n(t) = x(0) \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (7.12)$$

Offenbar ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) = x(0) \exp(\lambda t). \quad (7.13)$$

7.1.2 Der harmonische Oszillator

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t). \quad (7.14)$$

Es handelt sich um die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators.

Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind die Sinusfunktion $\sin(\omega t)$ und die Kosinusfunktion $\cos(\omega t)$. Die allgemeine Lösung ist eine beliebige Linearkombination dieser beiden speziellen Lösungen:

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t. \quad (7.15)$$

Wir können dies als Überlagerung von zwei Schwingungen (mit Phasenunterschied $\pi/2$) mit den Amplituden a und b deuten. Wir können die allgemeine Lösung aber auch in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.16)$$

schreiben, wobei A nun die Interpretation der Amplitude hat und φ_0 die Phase zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Den Bezug zwischen beiden Lösungen sieht man, wenn man das Additionstheorem für die Kosinus-Funktion ausnutzt:

$$x(t) = A(\cos \omega t \cdot \cos \varphi_0 - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_0). \quad (7.17)$$

Es gilt also $a = A \cos \varphi_0$ und $b = -A \sin \varphi_0$.

Wir können die Integrationskonstanten auch durch Anfangsbedingungen ersetzen, beispielsweise indem wir zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangslage $x(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ festlegen. Offenbar folgt aus Gl. 7.15:

$$x(0) = a \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = v(0) = \omega b \quad (7.18)$$

und damit

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t. \quad (7.19)$$

(Diese Gleichung hat unter anderem auch den Vorteil, dass wir in sinnvoller Weise den Grenzwert $\omega \rightarrow 0$ untersuchen können und zur Lösung der freien Bewegung $x(t) = x(0) + v(0)t$ gelangen.)

Es erhebt sich die Frage, ob wir ähnlich wie im letzten Abschnitt eine Lösung explizit über eine Integralgleichung konstruieren können. Dazu formen wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung zunächst in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung um:

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t). \quad (7.20)$$

Die linke Gleichung ist einfach die Definition der Geschwindigkeit und die rechte Gleichung beinhaltet die eigentliche Differentialgleichung, nämlich dass die Ableitung der Geschwindigkeit (die Beschleunigung) gleich $-\omega^2 x$ ist.

Wir integrieren beide Gleichungen und erhalten:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau \quad v(t) = v(0) - \omega^2 \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (7.21)$$

Nun ersetzen wir diese beiden gekoppelten Integralgleichungen wieder durch iterative Gleichungen:

$$x_{n+1}(t) = x(0) + \int_0^t v_n(\tau) d\tau \quad v_{n+1}(t) = v(0) - \omega^2 \int_0^t x_n(\tau) d\tau. \quad (7.22)$$

mit

$$x_0(t) = x(0) \quad \text{und} \quad v_0(t) = v(0). \quad (7.23)$$

Die ersten beiden Iterationen liefern:

$$x_1(t) = x(0) + v(0)t \quad v_1(t) = v(0) - \omega^2 x(0)t \quad (7.24)$$

$$x_2(t) = x(0) + v(0)t - \frac{1}{2}\omega^2 x(0)t^2 \quad v_2(t) = v(0) - \omega^2 x(0)t - \frac{1}{2}\omega^2 v(0)t^2$$

und allgemein erhält man (hier sind nur die Lösungen für gerade Schritte angegeben, entsprechende Lösungen erhält man auch für ungerade Schritte):

$$x_{2n}(t) = x(0) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\omega t)^{2k} + \frac{v(0)}{\omega} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\omega t)^{2k+1} \quad (7.25)$$

$$v_{2n}(t) = v(0) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\omega t)^{2k} - \omega x(0) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\omega t)^{2k+1}. \quad (7.26)$$

Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ konvergieren diese Folgen gleichmäßig gegen die schon bekannten Lösungen:

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (7.27)$$

$$v(t) = v(0) \cos \omega t - \omega x(0) \sin \omega t. \quad (7.28)$$

Abschließend möchte ich noch anmerken, dass man die Lösung für $x(t)$ auch dadurch erhält, dass man die Differentialgleichung 7.14 zweimal integriert,

$$\dot{x}(t) = v(0) - \omega^2 \int_0^t x(t') dt' \quad (7.29)$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t - \omega^2 \int_0^t \left(\int_0^{t'} x(\tau) d\tau \right) dt', \quad (7.30)$$

und nun zu einer Iterationsgleichung übergeht:

$$x_{n+1}(t) = x(0) + v(0)t - \omega^2 \int_0^t \left(\int_0^{t'} x_n(\tau) d\tau \right) dt'. \quad (7.31)$$

Auch hier kann man mit $x_0(t) \equiv 0$ beginnen und erhält im ersten Schritt $x_1(t) = x(0) + v(0)t$. Für $x_2(t)$ folgt nun:

$$x_2(t) = x(0) + v(0)t - \omega^2 \int_0^t \left(\int_0^{t'} (x(0) + v(0)\tau) d\tau \right) dt' \quad (7.32)$$

$$= x(0) + v(0)t - \omega^2 \int_0^t \left(x(0)t' + \frac{1}{2}v(0)t'^2 \right) dt' \quad (7.33)$$

$$= x(0) + v(0)t - \omega^2 \left(\frac{1}{2}x(0)t^2 + \frac{1}{3!}v(0)t^3 \right) \quad (7.34)$$

$$= x(0) \left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2 \right) + v(0) \left(t - \frac{1}{3!}\omega^2 t^3 \right) \quad (7.35)$$

$$= x(0) \left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2 \right) + \frac{v(0)}{\omega} \left(\omega t - \frac{1}{3!}\omega^3 t^3 \right) \quad (7.36)$$

Man erkennt nun an den beiden Ausdrücken in Klammern die ersten Terme der Reihenentwicklung der Kosinus- und der Sinus-Funktion. In n -ter Ordnung findet man (Beweis z.B. durch vollständige Induktion)

$$x_n(t) = x(0) \left(\sum_{n=0}^n \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\omega t)^{2n} \right) + \frac{v(0)}{\omega} \left(\sum_{n=0}^n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\omega t)^{2n+1} \right) \quad (7.37)$$

und damit im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ das bekannte Ergebnis

$$x_n(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t. \quad (7.38)$$

Das Verfahren führt sogar schneller zum Ziel.

7.2 Allgemeine Bemerkungen

Typischerweise hat eine gewöhnliche Differentialgleichung die Form

$$f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots) = 0. \quad (7.39)$$

Es handelt sich also um eine Beziehung zwischen einer Funktion $x(t)$ und ihren Ableitungen $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots$ zu einem gegebenen Zeitpunkt t . Diese Beziehung soll für alle Zeitpunkte t (in einem vorgegebenen Definitionsbereich) erfüllt sein. Letztendlich handelt es sich also um unendlich viele Bedingungen (für jeden Zeitpunkt t eine) an eine Funktion $x(t)$. Gesucht ist die Funktion $x(t)$, die diese Bedingungen erfüllt.

Damit die Lösungen zu vorgegebenen Anfangsbedingungen existieren und eindeutig sind, verlangen wir für f meist Lipschitz-Stetigkeit (siehe Ende dieses Abschnitts). In der Physik setzen wir die notwendigen Stetigkeits- und Ableitbarkeitsbedingungen im Allgemeinen voraus, sodass ich diese im Folgenden nicht immer explizit erwähne. Wie ersichtlich, kann die Funktion f auch explizit von t abhängen (ausgedrückt durch das erste Argument). Falls f nicht explizit von t abhängt (sondern nur implizit über $x(t)$ und seine Ableitungen), bezeichnet man die Differentialgleichung als *autonom* [*autonomous*].

In vielen Fällen kann man die Gleichung nach dem Term mit der höchsten Ableitung (im folgenden Beispiel die zweite Ableitung) auflösen:

$$\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)). \quad (7.40)$$

Wie schon erwähnt, sind Differentialgleichungen dieser Form typisch für Newton'sche Bewegungsgleichungen, die nach dem zweiten Newton'schen Gesetz zum Ausdruck bringen, dass die Beschleunigung eines Teilchens proportional zur Kraft auf dieses Teilchen ist. Für die folgenden Überlegungen muss $F(t, x, v)$ ebenfalls Lipschitz-stetig in seinen Argumenten sein. Ich beschränke mich im Folgenden im Wesentlichen auf die Behandlung von Differentialgleichungen (maximal) zweiter Ordnung, aber es sollte offensichtlich sein, wie sich die Überlegungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung verallgemeinern lassen.

In Gl. 7.40 kann $x(t)$ beispielsweise auch für die drei Koordinaten eines Teilchens stehen oder auch für die Koordinaten von mehreren Teilchen, wobei die „Kraft“ F nun entsprechend viele Komponenten hat:

$$\ddot{x}_i(t) = F_i(t, (x_1(t), x_2(t), \dots, \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots)). \quad (7.41)$$

Ich verwende in diesem Kapitel weiterhin die „Vektornotation“ $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots)$, d.h. $x(t)$ kann für (endlich viele) Komponenten stehen.

Zunächst kann man jede Differentialgleichung höherer Ordnung durch einen Satz von Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen, indem man mehr Variable einführt. Beispielsweise ist Gl. 7.40 äquivalent zu folgenden zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad (7.42)$$

$$\dot{v}(t) = F(t, x(t), v(t)). \quad (7.43)$$

Da wir ohnehin mehrkomponentige Variable zulassen, reicht es somit, sich für die folgende Diskussion auf Gleichungen von dem Typ

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad (7.44)$$

zu beschränken. In obigem Fall (Gl. 7.42) steht $x(t)$ eigentlich für $(x(t), v(t))$ und die zugehörigen Komponenten der „Kraft“ sind $F_x(t, x, v) = v$ und $F_v(t, x, v) = F(t, x, v)$. (Man beachte, dass sowohl $x(t)$ als auch $v(t)$ selbst nochmals mehrere Komponenten haben können.)

Bei dem Verfahren von Picard-Lindelöf, das wir bei den Beispielen angewandt haben, wird dieser Satz von Differentialgleichungen in einen Satz von Integralgleichungen überführt, indem beide Seiten der Gleichungen integriert werden:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau, x(\tau)) \, d\tau. \quad (7.45)$$

Die Werte $x(t_0)$ bezeichnen die Anfangsbedingungen der Lösung. Da es sich im Allgemeinen um mehrere gekoppelte Gleichungen handelt ($x(t)$ kann mehrere Komponenten haben!), erhält man auch entsprechend viele Anfangsbedingungen. Ganz allgemein bezeichnet man den Raum der möglichen Anfangsbedingungen einer Differentialgleichung als *Phasenraum* [*phase space*].

Im nächsten Schritt des Picard-Lindelöf-Verfahrens werden diese Integralgleichungen durch iterative Gleichungen ersetzt:

$$x_{n+1}(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau, x_n(\tau)) \, d\tau. \quad (7.46)$$

Als Startfunktion kann man wieder $x_0(t) = x(t_0)$ (eine von t unabhängige Konstante) wählen. (Dieses Verfahren, eine Differentialgleichung durch eine äquivalente Integralgleichung zu ersetzen und diese dann iterativ zu lösen, wird in der Physik sehr oft verwendet, wenn Gleichungen nicht exakt lösbar sind und eine sogenannte *Störungsreihe* oder *Störungsentwicklung* [*perturbation expansion*] konstruiert wird.)

In der Mathematik interessiert nun die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Differentialgleichungen. Der Satz von Picard und Lindelöf besagt, dass die angegebene Folge von stetigen Funktionen $x_n(t)$ zumindest in einem ausreichend kleinen Intervall um t_0 gleichförmig gegen einen Grenzwert konvergiert, und wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist diese Grenzwertfunktion wieder stetig. Genauer lautet die Aussage: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass in dem Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ die Folge $x_n(t)$ gleichmäßig konvergent ist. Zum Beweis (siehe z.B. [10]) schreibt man

$$x_n(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \dots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)) \quad (7.47)$$

und beweist nun, dass für genügend kleine t gilt: $\|x_n(t_0 + t) - x_{n-1}(t_0 + t)\| \leq c|t|^n$ (für diesen Schritt benötigt man die Lipschitz-Stetigkeit von F). Dann kann man die Reihe durch eine geometrische Reihe abschätzen und hat die Konvergenz bewiesen. Daraus folgt auch die Existenz einer Lösung.

Für die Eindeutigkeit der Lösung benötigt man ebenfalls wieder die Lipschitz-Stetigkeit (ein ausführlicher Beweis findet sich in [12]). Man nimmt zunächst an, dass es

zwei Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ mit denselben Anfangsbedingungen gibt. Dann betrachtet man die Funktion $u(t) = \|x(t) - y(t)\|^2$ (für die $u(0) = 0$ gilt) und zeigt, dass $\|\dot{u}(t)\| \leq Cu(t)$ (mit einer Konstanten C). In einem nächsten Schritt zeigt man, dass die einzige Lösung zur Anfangsbedingung $u(0) = 0$ die Funktion $u(t) = 0$ ist und damit $x(t) = y(t)$ gelten muss.

7.3 Lineare Differentialgleichungen

Eine spezielle und für die Physik besonders wichtige Klasse von Differentialgleichungen sind die sogenannten *linearen Differentialgleichungen* [*linear differential equations*]. Bei diesen treten die Funktion und ihre Ableitungen immer nur in der ersten Potenz (und niemals als Produkte voneinander) auf.

7.3.1 Allgemeine Eigenschaften

Auch wenn ich in dieser Vorlesung nur gewöhnliche Differentialgleichungen betrachte, gelten die folgenden Überlegungen größtenteils auch für partielle Differentialgleichungen.

Eine lineare Differentialgleichung von der Ordnung n hat die Form:

$$\sum_{k=0}^n c_k(t)x^{(k)}(t) = F(t), \quad (7.48)$$

wobei $x^{(k)}(t)$ die k -te Ableitung von $x(t)$ nach ihrem Argument t bezeichnet und $x^{(0)}(t) = x(t)$ die Funktion selbst ist. Die Funktion $F(t)$ beschreibt in der Physik meist eine äußere Kraft, „Störung“ bzw. einen Quellterm des Systems.

Hängen die Koeffizientenfunktionen nicht explizit von t ab – gilt also $c_k(t) = c_k$ – handelt es sich wieder um eine autonome Differentialgleichung. Für $F(t) \equiv 0$ bezeichnet man die Differentialgleichung als *homogen* [*homogeneous*], andernfalls als *inhomogen* [*inhomogeneous*].

Lineare homogene Differentialgleichungen

Für lineare homogene Differentialgleichungen gilt das *Superpositionsprinzip*: Zu je zwei Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Differentialgleichung ist auch die Superposition $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ eine Lösung. Das erkennt man sofort, indem man diese Summe in die homogene Differentialgleichung einsetzt. Die Menge der Lösungen bildet also einen Vektorraum. Allgemein bezeichnet man einen Satz von Funktionen $y_k(x)$ ($1 \leq k \leq n$) als *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n c_k y_k(x) = 0 \quad (7.49)$$

für alle x im Definitionsbereich nur die Lösungen $c_k = 0$ (für alle k) hat.

Für eine lineare Differentialgleichung der Ordnung n gibt es genau n linear unabhängige Lösungen und die allgemeinste Lösung ist eine Linearkombination dieser linear unabhängigen Lösungen. Die Dimension des Vektorraums der Lösungen ist somit n . Die Koeffizienten sind die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung und können so bestimmt werden, dass beispielsweise die Anfangsbedingungen erfüllt werden. Als Anfangsbedingung kann man die Funktion $x(t)$ zusammen mit ihren ersten $n - 1$ Ableitungen zu einem festen Zeitpunkt t_0 vorgeben. Der Raum dieser möglichen Anfangsbedingungen ist wieder der Phasenraum der Differentialgleichung.

Die beiden Beispiele zu Beginn dieses Kapitels waren von diesem Typ. Für die Gleichung des harmonischen Oszillators waren die Sinus- und die Kosinus-Funktion die beiden linear unabhängigen Lösungen und die allgemeinste Lösung war die Superposition dieser beiden Funktionen (Gl. 7.15 bzw. 7.19).

Lineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Lösungen einer inhomogenen Gleichung bilden natürlich keinen Vektorraum. Allerdings gilt folgender Satz:

Sei $x_s(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und sei $x_0(t)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, dann ist die allgemeinste Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch $x(t) = x_s(t) + x_0(t)$ gegeben.

Der Beweis ist offensichtlich: Seien $x_{s1}(t)$ und $x_{s2}(t)$ zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung, dann ist die Differenz $x_{s2}(t) - x_{s1}(t)$ offensichtlich eine Lösung der homogenen Gleichung. Damit erhält man aber eine beliebige Lösung immer aus der Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und einer Lösung der homogenen Gleichung. Anders ausgedrückt: Für die allgemeinste Lösung der inhomogenen Gleichung reicht es somit, die allgemeinste Lösung der homogenen Gleichung und eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu kennen.

Wir können diese Aussage sogar noch verallgemeinern: Falls sich der inhomogene Term als Summe oder Integral von einfacheren Termen schreiben lässt,

$$F(t) = \sum_m f_m(t) \quad \text{bzw.} \quad F(t) = \int f(y, t) dy, \quad (7.50)$$

ist die allgemeinste Lösung eine Summe (bzw. Integral) von speziellen Lösungen jeweils zu den Funktionen $f_m(t)$ (bzw. $f(y, t)$) und der allgemeinen Lösungen zu der homogenen Gleichung. Seien also $\{x(m, t)\}$ die Lösungen von

$$\sum_{k=0}^n c_k(t) x^{(k)}(m, t) = f_m(t), \quad (7.51)$$

dann ist

$$x(t) = \sum_m x(m, t) + x_0(t) \quad (7.52)$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^n c_k(t)x^{(k)}(t) = \sum_m f_m(t) = F(t). \quad (7.53)$$

Lineare inhomogene Differentialgleichungen löst man meist mithilfe von sogenannten *Green'schen Funktionen* [*Green's functions* oder *Green functions*]. Da dies die Kenntnis von Distributionen voraussetzt, gehe ich hier nicht auf dieses Verfahren ein (Näheres dazu in der Vorlesung zur Theoretischen Elektrodynamik). Es verwendet aber die oben genannte Idee, dass man jeden Quellterm $F(t)$ nach einer geeigneten „Basis“ entwickeln kann (speziell wählt man dafür die sogenannten δ -Distributionen) und sucht nach Lösungen zu dieser speziellen Basis. Abschnitt 7.3.4 betrachtet ein Beispiel aus der Mechanik, bei dem ein etwas anderes Verfahren angewandt wird.

7.3.2 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sowohl die Differentialgleichung zum Wachstums- bzw. Zerfallsgesetz als auch die Differentialgleichung zum harmonischen Oszillator hatten konstante Koeffizienten. Das wird in vielen Fällen in der Physik der Fall sein. Es zeigt sich, dass homogene lineare Gleichungen dieser Art generell mit einem einfachen Ansatz gelöst werden können.

Der gedämpfte Oszillator

Wir betrachten zunächst als weiteres und etwas komplizierteres Beispiel die Differentialgleichung zum gedämpften harmonischen Oszillator:

$$m\ddot{x}(t) = -\mu\dot{x}(t) - kx(t). \quad (7.54)$$

Hierbei sind m die Masse, μ ein Reibungskoeffizient und k die Federkonstante (bzw. allgemeiner die Konstante der rücktreibenden Kraft). Nach Division durch m folgt:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0 \quad (7.55)$$

mit $2\gamma = \mu/m$ und $\omega_0^2 = k/m$ (ω_0 bezeichnet die Frequenz des ungedämpften – also $\gamma = 0$ – Oszillators).

Gleichungen dieser Art löst man häufig durch den sogenannten *Exponentialansatz*. Man „vermutet“, dass spezielle Lösungen die Form

$$x(t) = e^{i\alpha t} \quad (7.56)$$

mit einer zunächst noch unbekanntem Größe α haben. Dieser Ansatz führt auf die Gleichung:

$$-\alpha^2 x(t) + i2\gamma\alpha x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (7.57)$$

Da die Lösung $x(t)$ nicht identisch verschwinden soll, folgt eine Bedingung für α :

$$\alpha^2 - i2\gamma\alpha - \omega_0^2 = 0, \quad (7.58)$$

oder:

$$\alpha_{\pm} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (7.59)$$

Wir können nun drei Fälle unterscheiden:

- $\omega_0^2 > \gamma^2$:

Mit $\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ist

$$\alpha_{\pm} = i\gamma \pm \omega. \quad (7.60)$$

Wir haben also zwei spezielle Lösungen gefunden:

$$\tilde{x}_1(t) = e^{-\gamma t} e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \tilde{x}_2(t) = e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}. \quad (7.61)$$

Statt dieser beiden komplexen Lösungen können wir ebensogut die reellen Real- und Imaginärteile dieser Funktionen betrachten (beliebige Linearkombinationen sind ja wieder Lösungen, insbesondere auch der Realteil $(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)/2$ und der Imaginärteil $(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)/(2i)$):

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \cos \omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-\gamma t} \sin \omega t. \quad (7.62)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) \quad (7.63)$$

oder, äquivalent:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.64)$$

Die abfallende Exponentialfunktion beschreibt die Dämpfung der Schwingung und ω (was etwas kleiner als die Frequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung ist) charakterisiert die Frequenz der Schwingung. Die freien Integrationskonstanten lassen sich wieder mit den Anfangsbedingungen in Beziehung setzen:

$$x(0) = a \quad \text{und} \quad v(0) = -a\gamma + \omega b, \quad (7.65)$$

bzw.

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x(0) \cos \omega t + \frac{x(0)\gamma + v(0)}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (7.66)$$

Diesen Fall bezeichnet man auch als *gedämpfte Schwingung* oder *Schwingungsfall*.

- $\omega_0^2 < \gamma^2$:

Nun ist α (Gl. 7.59) rein imaginär, $\alpha_{\pm} = i(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})$, und wir erhalten eine reine Dämpfung (exponentiellen Abfall):

$$x(t) = ae^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + be^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}. \quad (7.67)$$

Man beachte, dass im vorliegenden Fall $\tau_{\pm}^{-1} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ immer positiv ist, sodass beide Anteile der Lösung eine abklingende Bewegung beschreiben. τ_{\pm} sind Zeitkonstanten, die angeben, nach welcher Zeitspanne die Lösung auf $1/e$ abgeklungen ist. Da die Lösung $\tau_- = (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})^{-1}$ die größere Zeitkonstante ist, beschreibt sie das Abfallverhalten für große Zeiten.

- $\omega_0^2 = \gamma^2$:

Diesen Fall bezeichnet man als *aperiodischen Grenzfall*. Die Lösung zu $\alpha = i\gamma$ beschreibt ebenfalls eine reine Dämpfung:

$$x_1(t) = e^{-\gamma t}. \quad (7.68)$$

Damit haben wir jedoch nur eine Lösung gefunden. Nach den allgemeinen Überlegungen muss es aber noch eine zweite, linear unabhängige Lösung geben, die wir offensichtlich durch den Exponentialansatz nicht gefunden haben. Betrachten wir jedoch in der allgemeinen Lösung 7.66 den Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ (was dem aperiodischen Grenzfall entspricht), so erhalten wir:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (x(0) + (x(0)\gamma + v(0))t). \quad (7.69)$$

Die beiden speziellen Lösungen sind somit:

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = te^{-\gamma t}. \quad (7.70)$$

Allgemeiner Fall

Eine Differentialgleichung der Form

$$\sum_{k=0}^n c_k x^{(k)}(t) = 0 \quad (7.71)$$

kann man wiederum durch einen Exponentialansatz (zumindest teilweise) lösen. Ein solcher Ansatz führt (vgl. den Weg zu Gl. 7.58) auf die Gleichung

$$\sum_{k=0}^n (i)^k \alpha^k c_k = 0. \quad (7.72)$$

Dies ist eine Polynomgleichung für α , von der wir nach dem Fundamentalsatz der Algebra wissen, dass sie n Lösungen besitzt.

Sind alle Lösungen $\{\alpha_i\}$ dieser Gleichung verschieden (d.h. Nullstellen erster Ordnung von Gl. 7.72), haben wir n linear unabhängige Lösungen gefunden:

$$x_i(t) = e^{i\alpha_i t}. \quad (7.73)$$

Ist eine Lösung α_i p -fach entartet, sind folgende Lösungen linear unabhängig:

$$x_q(t) = t^q e^{i\alpha_i t}. \quad (7.74)$$

wobei q die Werte $q = 0, 1, \dots, p - 1$ annehmen kann. Die allgemeinste Lösung der homogenen Gleichung ist eine Linearkombination dieser Lösungen:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t), \quad (7.75)$$

wobei die Integrationskonstanten a_i beispielsweise durch die Anfangsbedingungen $x^{(k)}(t_0)$ ($0 \leq k < n$) festgelegt werden können.

7.3.3 Weshalb Exponentialansatz?

Man wird sich vermutlich fragen, was den Exponentialansatz gegenüber anderen Funktionen auszeichnet, dass dieser (zumindest im allgemeinen Fall) zu den linear unabhängigen speziellen Lösungen führt.

Der unmittelbare Grund ist die Eigenschaft der Exponentialfunktion, unter der Operation der Ableitung sich selbst zu reproduzieren, also die Gleichung

$$\frac{d \exp(\alpha t)}{dt} = \alpha \exp(\alpha t). \quad (7.76)$$

(Dabei spielt es keine Rolle, ob α reell oder komplex angenommen wird.) Da dies auch für die höheren Ableitungen gilt, wird in jedem Term der Differentialgleichung dieselbe Funktion reproduziert. Da die Gleichung für alle t (im Definitionsbereich) gelten soll, können wir somit diese Funktion herauskürzen und erhalten eine algebraische Gleichung für den offenen Parameter α . Genau dies haben wir im letzten Kapitel gemacht.

Es steckt aber noch ein tieferer Grund hinter dem Exponentialansatz für homogene lineare Differentialgleichungen. Eine solche Differentialgleichung ist *invariant unter Zeittranslationen*. Das bedeutet, mit jeder Lösung $x(t)$ ist auch $x(t + \Delta t)$ eine Lösung (für beliebige Werte von Δt). Der mathematische Grund ist, dass die Koeffizienten nicht explizit von t abhängen. Physikalisch bedeutet dies, dass es keine Rolle spielt, zu welchem Zeitpunkt ein Experiment durchgeführt wird – die physikalischen Gesetze sind dieselben. Und damit spielt es auch für die Lösungen der Differentialgleichung (z.B. die Bahnkurven) keine Rolle, zu welchem Zeitpunkt sie „beginnen“.

Da sich die allgemeinste Lösung aber als Linearkombination der speziellen Lösungen schreiben lässt, muss sich die Funktion $x(t + \Delta t)$ als Linearkombination der speziellen Lösungen $x_i(t)$ schreiben lassen:

$$x(t + \Delta t) = \sum_i c_i(\Delta t) x_i(t) \quad (7.77)$$

(wobei die Entwicklungskonstanten c_i natürlich von Δt abhängen dürfen).

Bei einer Differentialgleichung erster Ordnung ist die Exponentialfunktion dadurch schon festgelegt, denn wenn

$$x(t + \Delta t) = c(\Delta t) x(t) \quad (7.78)$$

gelten muss, bleibt nur noch die Exponentialfunktion übrig. Bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung muss zumindest gelten:

$$x(t + \Delta t) = c_1(\Delta t) x_1(t) + c_2(\Delta t) x_2(t), \quad (7.79)$$

wobei $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die speziellen Lösungen sind. Die Exponentialfunktionen (zu verschiedenen Dämpfungs- bzw. Schwingungsfaktoren) erfüllen diese Bedingung ebenfalls, daher ist der Exponentialansatz immer noch gerechtfertigt, aber auch Exponentialfunktionen multipliziert mit cos- und sin-Funktionen erfüllen diese Bedingung (das war beim gedämpften harmonischen Oszillator der Fall). Schließlich erfüllen auch die Funktionen $\exp(\alpha t)$ und $t \exp(\alpha t)$ diese Bedingungen, kommen daher ebenfalls als Lösungen in Betracht. Im Fall von Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt es entsprechend mehr linear unabhängige Lösungen, somit kommen dort auch Funktionen der Form $t^q \exp(\alpha t)$ in Frage, wobei q immer kleiner als die Ordnung der Differentialgleichung sein muss.

Ganz allgemein muss der Vektorraum der Lösungen also unter Zeittranslationen in sich selbst abgebildet werden. Anders ausgedrückt: Eine beliebige Zeittranslation (um Δt) definiert eine lineare Abbildung des Lösungsraums auf sich selbst. Mathematisch sucht man also nach sogenannten linearen Darstellungen der Translationsgruppe auf endlichdimensionalen Funktionenräumen. Die Ausarbeitung dieser Bemerkungen würde hier zu weit führen, aber bei den genannten Darstellungen spielen eben die Exponentialfunktionen eine besondere Rolle, weil sie selbst schon die geforderten Transformationseigenschaften erfüllen.

7.3.4 Der getriebene gedämpfte Oszillator

Als Beispiel für eine inhomogene Differentialgleichung betrachten wir

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F \cos \omega t. \quad (7.80)$$

Diese Gleichung beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator, der zusätzlich von einer periodischen äußeren Kraft getrieben wird.

Um wieder mit einem Exponentialansatz Erfolg zu haben, zerlegen wir die Kosinus-Funktion in ihre Exponentialanteile (dies ist eine Anwendung der allgemeinen Überlegungen, Gl. 7.50 bis 7.53):

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (7.81)$$

und lösen zunächst die Gleichungen

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{2} e^{\pm i\omega t}. \quad (7.82)$$

Die Lösung für die Kosinusfunktion ist dann gleich der Summe dieser beiden Lösungen.

Diesmal lässt der Exponentialansatz für die Lösungen

$$x_{\pm}(t) = A_{\pm} e^{\pm i\omega t} \quad (7.83)$$

nicht die Winkelfrequenz ω offen, diese ist nun extern vorgegeben und nach genügend langer Zeit sollte der Oszillator mit derselben Frequenz wie der externe Quellterm schwingen. Wir erwarten somit keine Gleichung für die Frequenz sondern für die Amplituden A_{\pm} . (Diese waren im homogenen Fall nicht bestimmt sondern die freien Integrationskonstanten.)

Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung führt auf die Bedingungen:

$$(-\omega^2 \pm 2\gamma i\omega + \omega_0^2) A_{\pm} = \frac{F}{2} \quad (7.84)$$

bzw.

$$A_{\pm} = \frac{F}{2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 \pm 2\gamma i\omega)}. \quad (7.85)$$

Bei der Amplitude handelt es sich also um eine komplexe Zahl. Die (spezielle) Lösung von Gl. 7.80 lautet somit:

$$x(t) = A_+ e^{+i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}. \quad (7.86)$$

Da $A_+^* = A_-$ ist diese Lösung reell. Aus ihr folgen die Resonanzphänomene, die hier aber nicht diskutiert werden sollen.

7.4 Gekoppelte lineare Differentialgleichungen

Fast immer haben wir es in der Physik mit gekoppelten Differentialgleichungen zu tun. Das bedeutet, das Verhalten von einem Freiheitsgrad (einer Koordinate) hängt von den anderen Freiheitsgraden (Koordinaten) ab. Auch hier bilden lineare Differentialgleichungen wieder einen besonderen Fall, da sie sich in vergleichsweise allgemeiner

Form lösen lassen. Wir betrachten zwei Spezialfälle: lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung und lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung (ohne Dämpfungen) mit jeweils konstanten Koeffizienten. Der erste Fall dient hauptsächlich dazu, den Begriff der Diagonalisierung einzuführen, der zweite Fall ist für die Physik der wichtigere. Die Verallgemeinerung auf nicht-konstante Koeffizienten tritt in der Physik zwar gelegentlich auf, erfordert aber spezielle Verfahren, die in den entsprechenden Vorlesungen behandelt werden.

7.4.1 Gekoppelte lineare homogene Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (7.87)$$

$x(t)$ beschreibt eine mehrkomponentige Variable $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, und A ist eine konstante $n \times n$ Matrix, durch die diese Variablen gekoppelt werden. In Komponenten lautet also obige Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i(t). \end{aligned} \quad (7.88)$$

Wir haben nun zwei Möglichkeiten, dieses Differentialgleichungssystem zu lösen. Formal können wir die Lösung wie im eindimensionalen Fall als Exponentialfunktion schreiben:

$$x(t) = \exp(At)x(0). \quad (7.89)$$

$\exp(At)$ ist nun eine $n \times n$ Matrix, die man durch eine Reihendarstellung definieren kann:

$$\exp(At) = \mathbf{1} + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k. \quad (7.90)$$

Hierbei ist $\mathbf{1}$ die Identitätsmatrix, also die Matrix, bei der überall auf der Diagonalen eine 1 steht und alle Nebendiagonalelemente sind 0. Die Potenzen der Matrix A sind sukzessive durch Matrixmultiplikation (vgl. Gl. 2.48) definiert. Dabei handelt es sich jeweils wieder um $n \times n$ Matrizen. Die Summe von $n \times n$ Matrizen ist komponentenweise

definiert. Somit ist die obige Summe mathematisch sinnvoll, sofern die Reihe konvergiert (was aber für reguläre Matrizen, bei denen also alle Einträge endliche Zahlen sind, der Fall ist).

Diese $n \times n$ Matrix $\exp(At)$ kann man mit dem Vektor der Anfangsbedingungen $x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots)$ multiplizieren und erhält so die Lösung $x(t)$. Man kann sich (mit etwas Rechenaufwand) davon überzeugen, dass die so erhaltene Lösung tatsächlich das Differentialgleichungssystem (7.88) erfüllt.

Es gibt aber auch noch eine andere Möglichkeit, letztendlich zu derselben Lösung zu gelangen, die aber in der Praxis oft einfacher ist. Auch diese zweite Möglichkeit lässt sich ganz allgemein durchführen, erfordert aber einige Fallunterscheidungen, die eher technischer Natur sind. Daher beschränke ich mich auf den Fall, bei dem die Matrix A *diagonalisierbar* [*diagonalizable*] ist. Das bedeutet, man kann neue Koordinaten

$$\begin{aligned} y_1 &= R_{11}x_1(t) + R_{12}x_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n R_{1i}x_i(t) \\ y_2 &= R_{21}x_1(t) + R_{22}x_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n R_{2i}x_i(t) \\ &\vdots \\ y_n &= R_{n1}x_1(t) + R_{n2}x_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n R_{ni}x_i(t), \end{aligned} \quad (7.91)$$

bzw. in Matrixnotation

$$y = Rx, \quad (7.92)$$

wählen, sodass das Differentialgleichungssystem in den neuen Koordinaten *entkoppelt* [*decoupled*] ist, also

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1(t) \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= \lambda_n y_n(t). \end{aligned} \quad (7.93)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich natürlich sehr einfach lösen. Für jede einzelne Komponente gilt:

$$y_i(t) = y_i(0) \exp(\lambda_i t). \quad (7.94)$$

Die Wahl neuer Koordinaten entspricht einer Wahl eines neuen Koordinatensystems, und der Wechsel der Koordinaten von $\{x_i\}$ auf $\{y_i\}$ sollte eindeutig und ohne Informationsverlust sein. Das bedeutet, die lineare Abbildung R soll umkehrbar sein, d.h. es soll eine Matrix R^{-1} geben, sodass im Sinne der Matrixmultiplikation $RR^{-1} = R^{-1}R = \mathbf{1}$

ist. (Die erwähnten technischen Feinheiten beziehen sich unter anderem darauf, ob diese inverse Matrix R^{-1} tatsächlich diese Bedingung rechtsseitig und linksseitig erfüllt, bzw. welche Bedingungen tatsächlich ganz allgemein gelten müssen, sodass die Diagonalisierbarkeit von A garantiert ist.)

Ist die Transformation umkehrbar, so erhalten wir aus den Lösungen $\{y_i(t)\}$ auch wieder die Lösungen für $\{x_i(t)\}$:

$$x(t) = R^{-1}y(t) \quad (7.95)$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (R^{-1})_{11}y_1(t) + (R^{-1})_{12}y_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n (R^{-1})_{1i}y_i(t) \\ x_2(t) &= (R^{-1})_{21}y_1(t) + (R^{-1})_{22}y_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n (R^{-1})_{2i}y_i(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= (R^{-1})_{n1}y_1(t) + (R^{-1})_{n2}y_2(t) + \dots = \sum_{i=1}^n (R^{-1})_{ni}y_i(t), \end{aligned} \quad (7.96)$$

wobei $(R^{-1})_{ij}$ die Komponenten der inversen Matrix R^{-1} bezeichnen.

Wir können diese Umformungen auch abstrakter in Matrixnotation schreiben. Dazu wenden wir auf das Differentialgleichungssystem (7.87) auf beiden Seiten von links (bei Matrizen ist es wichtig, von welcher Seite man die Matrix multipliziert) die Matrix R an:

$$\dot{y}(t) = R\dot{x}(t) = RAx(t). \quad (7.97)$$

Da die Matrix A (und damit auch die Matrix R) konstant sein soll, also nicht von t abhängt, kann man die Ableitung nach der Zeit mit der Matrix vertauschen, sodass also

$$R \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dRx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt}. \quad (7.98)$$

(Dies würde nicht gelten, wenn die Matrix A , also die Koeffizienten der Gleichung, selbst zeitabhängig sind. Dann ist auch $R(t)$ zeitabhängig.)

Nun nutzen wir aus, dass es zu R eine inverse Matrix geben soll, sodass

$$RAx(t) = RAR^{-1}Rx(t) = RAR^{-1}y(t). \quad (7.99)$$

Damit erhalten wir in den neuen Koordinaten

$$\dot{y}(t) = RAR^{-1}y(t). \quad (7.100)$$

Bisher haben wir außer der Invertierbarkeit der Transformationsmatrix R keine weiteren Einschränkungen vorgenommen, diese Umformungen gelten also allgemein. Wir

wollten jedoch eine spezielle Koordinatentransformation durchführen, sodass die Differentialgleichungen in den neuen Koordinaten entkoppeln. Die Bedingung dafür lautet, dass die Matrix RAR^{-1} diagonal ist, also alle Matrixelemente außer denen auf der Diagonalen verschwinden. Die Angabe der Bedingungen, unter denen es zu einer Matrix A solche Matrizen R gibt und wie man sie konstruiert, ist ein Problem der linearen Algebra und wird dort ausführlich behandelt. Die Zahlen $\{\lambda_i\}$ bezeichnet man auch als die *Eigenwerte* [*eigenvalues*] der Matrix A .

Wenn die Matrix A symmetrisch ist, also $A_{ij} = A_{ji}$ gilt, lässt sich das Verfahren immer durchführen. Man kann in diesem Fall zeigen, dass R eine Rotation des Koordinatensystems darstellt (insbesondere ein Orthonormalsystem wieder zu einem Orthonormalsystem wird). In diesem Fall kann man auch beweisen, dass die Zahlen $\{\lambda_i\}$ alle reell sind (vgl. Abschnitt 2.6). Ansonsten kann es sein, dass man einen Umweg über die komplexen Zahlen wählen muss. Letztendlich sind natürlich von jeder komplexen Lösung der Real- und Imaginärteil wiederum Lösungen.

7.4.2 Gekoppelte lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Sehr oft entwickelt man in der Physik ein System um seine Gleichgewichtslage. Wie wir sehen werden, beschreibt man dadurch näherungsweise kleine Schwingungen. Da dieser Fall sehr oft auftritt, soll er etwas ausführlicher behandelt werden.

Entwicklung Newton'scher Bewegungsgleichungen um eine Gleichgewichtslage

Wir betrachten die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu konservativen Kräften (d.h., die Kräfte lassen sich als verallgemeinerter Gradient einer potenziellen Energie beschreiben):

$$\ddot{x}(t) = -\nabla U(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}_i(t) = -\frac{\partial U(x_1(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_i}. \quad (7.101)$$

(Ich habe hier angenommen, dass alle Teilchen dieselbe Masse m haben, die ich der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt habe.)

Nun stellen wir uns vor, dass es für dieses System einen Gleichgewichtszustand gibt, bei dem also alle Teilchen in Ruhe sind. Es soll also einen Vektor \hat{x} geben, sodass der Gradient von U an der Stelle \hat{x} (in allen Komponenten) verschwindet:

$$\left. \frac{\partial U(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right|_{x=\hat{x}} = 0. \quad (7.102)$$

Befinden sich die Teilchen des Systems an diesem Punkt (bzw. den durch \hat{x} beschriebenen Punkten), verschwinden alle Kräfte auf die Teilchen und sie sind in Ruhe. Man

stelle sich beispielsweise einen Kristall oder ein Molekül vor, bei dem es solche Ruhelagen gibt (im Rahmen einer quantenmechanischen Beschreibung muss diese Aussage noch präzisiert werden).

Nun betrachtet man eine kleine Störung um diese Ruhelage, d.h. wir betrachten die Freiheitsgrade:

$$z_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i. \quad (7.103)$$

Dann folgt für die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{z}_i(t) = -\frac{\partial U(z_1(t) + \hat{x}_1, \dots, z_n(t) + \hat{x}_n)}{\partial z_i}. \quad (7.104)$$

Da Gl. 7.103 nur eine zeitunabhängige Verschiebung der Koordinate x_i darstellt, gilt

$$\ddot{x}_i(t) = \ddot{z}_i(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(z + \hat{x})}{\partial z_i}. \quad (7.105)$$

Da z_i „klein“ sein soll (in welchem Sinne, wird noch geklärt) können wir U nach Potenzen von z entwickeln:

$$U(\hat{x} + z) = U(\hat{x}) + \sum_i \frac{\partial U(\hat{x} + z)}{\partial z_i} \Big|_{z=0} z_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \partial z_j} \Big|_{z=0} z_i z_j + \dots \quad (7.106)$$

Der Gradient verschwindet aber nach Voraussetzung an der Stelle \hat{x} , da \hat{x} ein stationärer Punkt (Gleichgewichtslage) von U sein soll. Also erhalten wir

$$U(\hat{x} + z) = U(\hat{x}) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \partial z_j} \Big|_{z=0} z_i z_j + \dots \quad (7.107)$$

Bilden wir nun von dieser Funktion die partiellen Ableitungen nach z , so folgt für die Kräfte (daher das Minus-Zeichen):

$$F_i = -\frac{\partial U(\hat{x} + z)}{\partial z_i} = -\sum_j \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \partial z_j} \Big|_{z=0} z_j + \dots = -\sum_j K_{ij} z_j + \dots \quad (7.108)$$

Die symmetrische(!) Matrix K_{ij} ist nun zeitlich konstant, d.h. genauer gilt:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U(\hat{x} + z)}{\partial z_i \partial z_j} \Big|_{z=0} \quad (7.109)$$

(man beachte, dass $z = 0$ gleichbedeutend ist mit $x = \hat{x}$). K_{ij} ist also die Hesse-Matrix (vgl. Abschnitt 5.4) der potenziellen Energie um die Gleichgewichtslage \hat{x} .

Gekoppelte Oszillatoren

Die Entwicklung für kleine Störungen um eine Gleichgewichtslage führte uns also in führender Ordnung auf folgendes Gleichungssystem:

$$\ddot{x}(t) = -Kx(t) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}(t)_i = -\sum_{j=1}^n K_{ij}x(t)_j \quad (7.110)$$

(Statt der Koordinate z verwende ich nun wieder die Bezeichnung x .)

Da es sich bei der Matrix K um eine symmetrische Matrix handeln soll, gibt es sogar eine Rotationsmatrix R (d.h., diese Matrix beschreibt eine einfache Drehung des Koordinatensystems; Rotationsmatrizen erfüllen $RR^T = \mathbf{1}$ oder $R^{-1} = R^T$, wobei R^T die transponierte, also an der Hauptdiagonalen gespiegelte Matrix bezeichnet), sodass $RKR^T = D$, und D ist eine Diagonalmatrix:

$$D = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}. \quad (7.111)$$

Ähnlich wie im letzten Abschnitt bedeutet dies, dass das Gleichungssystem in den gedrehten Koordinaten $y(t) = Rx(t)$ entkoppelt:

$$\ddot{y}(t) = -Dy(t) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y}_i(t) = -k_i y_i(t). \quad (7.112)$$

Hierbei sind k_i die Eigenwerte von K bzw. die Diagonalelemente der Matrix D . Ist $k_i > 0$ können wir $k_i = \omega_i^2$ schreiben und die Lösungen der Gleichungen sind harmonische Schwingungen der Form $y_i(t) = A \cos(\omega_i t) + B \sin(\omega_i t)$. In diesem Fall bleiben „kleine“ Auslenkungen um die Gleichgewichtslage $y_i = 0$ auch klein, wobei „klein“ bedeutet, dass die Abweichungen von der harmonischen Schwingung vernachlässigbar sind (diese Schranke wird letztendlich durch die Messgenauigkeit festgelegt, mit der die Schwingung beobachtet wird). Ist jedoch $k_i < 0$, lauten die speziellen Lösungen $y_i(t) = \exp(\pm\sqrt{|k_i|}t)$. Entweder für sehr große positive oder negative Zeiten wird auch diese Auslenkung sehr groß und die harmonische Näherung wird nicht für alle t gültig sein können.

Letztendlich bedeutet $k_i < 0$, dass das Potenzial für diese Koordinate zwar einen Extrempunkt annimmt, aber kein Minimum. Insofern handelt es sich bei \hat{x} in diesem Fall auch nicht um eine stabile Gleichgewichtslage. Der Fall $k_i = 0$ bedeutet für die zugehörige Bewegungsgleichung $\ddot{y}_i(t) = 0$ und beschreibt somit eine kräftefreie Bewegung.

Wir hatten angenommen, dass alle Teilchen dieselbe Masse ($m = 1$) haben. Unter dieser Annahme ist die Matrix K symmetrisch. Im allgemeinen Fall (verschiedene

Massen) muss die Matrix R , durch die K diagonalisiert wird, keine Rotationsmatrix (Drehmatrix) sein. Die neuen Koordinaten sind dann nicht unbedingt orthogonal. Da hier nur das Prinzip zur Lösung gekoppelter linearer Differentialgleichungen vorgestellt werden sollte, gehe ich auf diese technischen Details nicht ein.

7.5 Spezielle Lösungsverfahren

Es gibt nur wenige nicht-lineare Differentialgleichungen, bei denen sich die Lösungen zum Anfangswertproblem allgemein finden lassen. Meist handelt es sich dabei um Differentialgleichungen in einer Variablen. Wir betrachten zwei Klassen solcher Differentialgleichungen, bei denen eine allgemeine Lösung möglich ist. Ich sollte allerdings betonen, dass „lösen lässt“ hier allgemeiner zu verstehen ist, nämlich „bis auf ein Integral“, d.h., es kann sein, dass sich die Lösung als ein Integral schreiben lässt oder in einem Integral auftritt, das aber selbst nicht in elementarer Form lösbar ist.

7.5.1 Trennung der Variablen

Die erste Klasse von Differentialgleichungen, die sich geschlossen lösen lässt, hat die Form:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t)g(x(t)). \quad (7.113)$$

Die gesuchte Funktion $x(t)$ ist nun einkomponentig. Die allgemeinen Sätze zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen verlangen, dass $f(t)$ und $1/g(x)$ (wie wir gleich sehen werden) Lipschitz-stetig sind.

Das Integrationsverfahren (man spricht in diesem Zusammenhang auch schon mal von der „Quadratur“ der Differentialgleichung) trennt die Variablen t und x in folgender Weise:

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t) dt, \quad (7.114)$$

und nun werden beide Seiten in ihren Variablen integriert:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau. \quad (7.115)$$

Man sollte allerdings betonen, dass der Schritt (Gl. 7.114) nur eine „Eselsbrücke“ darstellt und diese Gleichung im strengen Sinne nicht definiert ist. Formal teilt man Gleichung 7.113 durch $g(x(t))$,

$$\frac{1}{g(x(t))} \frac{dx(t)}{dt} = f(t) \quad (7.116)$$

und integriert beide Seiten dieser Gleichung nach dem Argument t :

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{g(x(\tau))} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau. \quad (7.117)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung kann man nun die Substitutionsregel anwenden und das Integrationsargument τ durch $x(\tau)$ substituieren (vgl. Gl. 6.49). Die neuen Integrationsgrenzen sind damit $x(t_0)$ und $x(t)$. Das führt auf Gl. 7.115.

Auf der linken Seite von Gl. 7.115 erhält man die Stammfunktion $G(x)$ von $1/g(x)$ und auf der rechten Seite die Stammfunktion $F(t)$ von $f(t)$:

$$G(x(t)) - G(x(t_0)) = F(t) - F(t_0). \quad (7.118)$$

Diese Gleichung kann man im Prinzip nach $x(t)$ auflösen. Die freie Wahl von t_0 entspricht der freien Integrationskonstanten einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Beispiel: $\dot{x} = \alpha x^2$

Als erstes Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \alpha x^2. \quad (7.119)$$

Trennung der Variablen führt auf

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x^2} dx = \alpha \int_{t_0}^t = \alpha(t - t_0). \quad (7.120)$$

Die linke Seite können wir leicht integrieren und erhalten:

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = \alpha(t - t_0) \quad (7.121)$$

bzw.

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x(t_0)} - \alpha(t - t_0)}. \quad (7.122)$$

Diese Lösung divergiert bei $t \rightarrow t_0 + 1/(\alpha x(t_0))$, also nach einer endlichen Zeit. Eine Wachstumsgleichung der Form 7.119 hat also nach endlicher Zeit zu einem unendlich großen Wachstum geführt. Solche Modelle sind natürlich unphysikalisch (oder unbiologisch), sie sind aber ein Beispiel dafür, dass auch scheinbar sehr „harmlose“ Differentialgleichungen Lösungen haben können, die nur in einem begrenzten Zeitintervall existieren.

Beispiel: $\dot{x} = \alpha\sqrt{x(t)}$

Diese Gleichung ist (für reelle Lösungen) nur sinnvoll, solange $x(t) \geq 0$. Insbesondere sei $\alpha > 0$ und $x(t_0) \geq 0$. Das Verfahren der Trennung der Variablen führt auf die Gleichung

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha \int_{t_0}^t d\tau \quad (7.123)$$

mit der Lösung:

$$2\sqrt{x(t)} - 2\sqrt{x(t_0)} = \alpha(t - t_0) \quad (7.124)$$

bzw.

$$x(t) = \frac{1}{4} \left(\alpha(t - t_0) + 2\sqrt{x(t_0)} \right)^2. \quad (7.125)$$

Für $t \geq t_0$ (und $x(t_0) \geq 0$) bleibt die rechte Seite positiv, sodass die Lösung sinnvoll ist.

Interessant ist der Fall $x(t_0) = 0$. In diesem Fall lautet die Lösung

$$x(t) = \frac{\alpha^2}{4}(t - t_0)^2. \quad (7.126)$$

Man kann sich leicht durch Ableiten dieser Funktion überzeugen, dass sie die Differentialgleichung erfüllt. Es gibt aber noch eine zweite Lösung zu der Anfangsbedingung $x(t_0) = 0$, nämlich die Funktion $x(t) = 0$, die offenbar ebenfalls die Differentialgleichung erfüllt. Wir haben zu derselben Anfangsbedingung zwei (unabhängige) Lösungen gefunden. Der Grund ist offensichtlich: \sqrt{x} ist bei $x = 0$ nicht Lipschitz-stetig. Daher gilt der Satz von der Eindeutigkeit der Lösung in diesem Fall nicht.

7.5.2 Beispiel: Die logistische Differentialgleichung

Das letzte Beispiel soll etwas ausführlicher behandelt werden, da man hier auch einige andere Verfahren (Stabilitätsanalyse und Flusslinien) sehr schön beschreiben kann.

Unter der *logistischen Differentialgleichung* [*logistic differential equation*] versteht man die folgende Gleichung (wiederum nur in einer Komponente):

$$\dot{x} = rx(t)(1 - x(t)). \quad (7.127)$$

Diese Gleichung tritt unter anderem in der Biologie als Beispiel für ein begrenztes Wachstum auf: Für sehr kleine Werte von $x(t)$ verhält sich die Lösung näherungsweise wie ein exponentieller Anstieg, doch für große Werte von $x(t)$ („groß“ bedeutet hier: nahe bei 1) wird das Wachstum gedämpft. Als Beispiel wählt man gerne eine Population, bei der die Ressourcen zu knapp werden, wenn die Dichte dieser Population zu groß wird.

Trennung der Variablen führt auf die Gleichung

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x(1-x)} dx = r \int_{t_0}^t dt = r(t - t_0). \quad (7.128)$$

Die linke Seite lässt sich ebenfalls leicht integrieren, wenn man die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \quad (7.129)$$

verwendet:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x(1-x)} dx = \ln x - \ln(1-x) \Big|_{x(t_0)}^{x(t)} = \ln \left(\frac{x(t)(1-x(t_0))}{(1-x(t))x(t_0)} \right). \quad (7.130)$$

Wir erhalten also die Gleichung

$$\ln \left(\frac{x(t)(1-x(t_0))}{(1-x(t))x(t_0)} \right) = r(t - t_0) \quad (7.131)$$

bzw.:

$$\frac{x(t)}{(1-x(t))} = \frac{x(t_0)}{1-x(t_0)} \exp(r(t - t_0)), \quad (7.132)$$

oder aufgelöst nach $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{1 + c \exp(-r(t - t_0))} \quad (7.133)$$

mit

$$c = \frac{1 - x(t_0)}{x(t_0)}. \quad (7.134)$$

Die Konstante c lässt sich also durch die Anfangsbedingungen ausdrücken. Je nach gewählter Anfangsbedingung lassen sich verschiedene Fälle unterscheiden:

$$0 < x(t_0) < 1$$

Im Hinblick auf die Interpretation als Wachstumsgleichung sind nur Werte von $0 < x(t_0) < 1$ sinnvoll. In diesem Fall ist $c > 0$. Für $x(t_0) \rightarrow 0$ gilt $c \rightarrow \infty$, für $x(t_0) \rightarrow 1$ findet man $c \rightarrow 0$. Da die Exponentialfunktion für alle Argumente positiv ist, wird der Nenner nie null und $x(t)$ ist für alle Werte von t eine wohl-definierte Funktion (siehe Abb. 7.1).

Die Funktion 7.133 spielt (mit vollkommen anderer Interpretation der Konstanten und Variablen) auch in der Festkörperphysik eine große Rolle als Fermi-Verteilung.

Die „physikalischen bzw. biologischen“ Anfangsbedingungen sind $0 < f(x_0) < 1$. In diesem Fall führt ein sehr kleiner Anfangswert von $f(x)$ zunächst zu einem exponentiellen Wachstum. Sobald $f(x)$ jedoch größer und die obere Grenze $f(x) = 1$

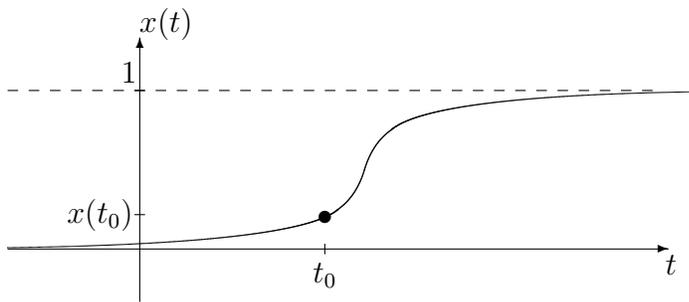


Abbildung 7.1: Die Lösung der logistischen Differentialgleichung für Anfangswerte $0 < x(t_0) < 1$.

spürbar wird, nähert sich die Lösung exponentiell dem Grenzwert $f(x) = 1$. In die Vergangenheit extrapoliert wird eine Population immer kleiner. Sie entstand in der fernen Vergangenheit aus einer exponentiell kleinen Anfangspopulation. Auch das ist natürlich eine Idealisierung, denn eine „sehr kleine“ Population besteht aus einzelnen wenigen Individuen, sodass diese kontinuierliche Gleichung nicht gültig ist.

$x(t_0) \leq 0$ **und** $x(t_0) \geq 1$

Wir betrachten nun die „unphysikalischen“ Anfangsbedingungen, für die sich $x(t)$ nicht als Dichte (sei es einer Population, einer chemischen Substanz in einer chemischen Reaktion, etc.) interpretieren lässt. Die Lösungen zu $x(t_0) = 0$ und $x(t_0) = 1$ sind die konstanten Funktionen:

$$x(t_0) = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad x(t) = 0 \quad (7.135)$$

und

$$x(t_0) = 1 \quad \text{mit der Lösung} \quad x(t) = 1. \quad (7.136)$$

Für $x(t_0) < 0$ ist $-\infty < c < -1$; für $x(t_0) \rightarrow 0$ folgt $c \rightarrow -\infty$ und für $x(t_0) \rightarrow -\infty$ folgt $c \rightarrow -1$. Nun gibt es einen Wert t für den der Term im Nenner der Lösung verschwindet und somit die Funktion $x(t)$ dort nicht definiert ist. Das Gleiche gilt für den Fall $x(t_0) > 1$, wobei nun c im Bereich $-1 < c < 0$ liegt ($c \rightarrow 0$ für $x_0 \rightarrow 1$ und $c \rightarrow -1$ für $x(t_0) \rightarrow \infty$).

Die Stelle, bei der die Lösung „explodiert“, ist durch

$$t_S = t_0 + \frac{1}{r} \ln |c| \quad (7.137)$$

gegeben. Für einen Anfangswert $x(t_0) > 0$ bleibt die Lösung negativ, nähert sich aber $x(t) \rightarrow -\infty$ nach einer endlichen Zeit $t \rightarrow t_S$ in der Zukunft von t_0 . In der Vergangenheit war die Lösung exponentiell nahe bei $x(t) = 0$ (siehe Abb. 7.2; Zweig 1).

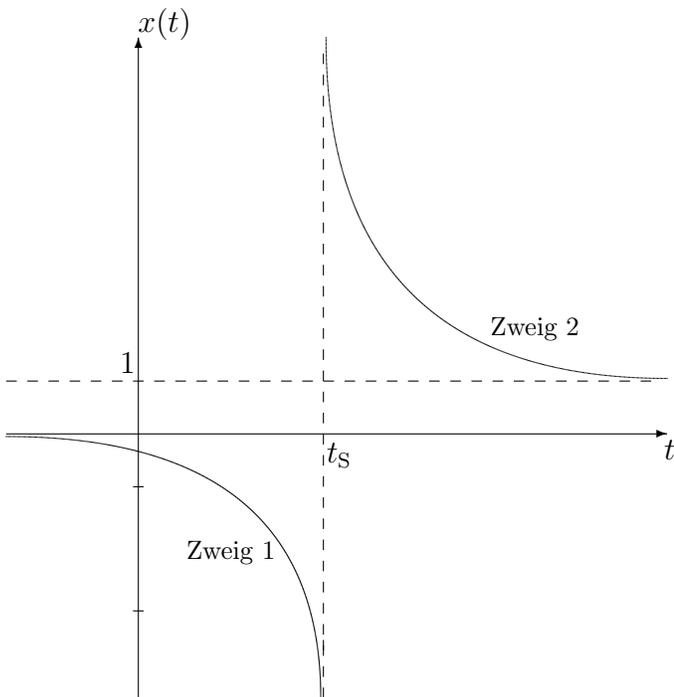


Abbildung 7.2: Die Lösung der logistischen Differentialgleichung für Anfangswerte $x(t_0) < 0$ (Zweig 1) und $x(t_0) > 1$ (Zweig 2).

Für $x(t_0) > 1$ liegt die Singularität der Lösung in der Vergangenheit von t_0 ($|c| < 1$, daher ist der Logarithmus in Gl. 7.137 negativ). Die Lösung nähert sich für große Werte von t von oben exponentiell dem Wert $x(t) = +1$ (siehe Abb. 7.2).

Fixpunkte und Flusslinien im Phasendiagramm

In vielen Fällen (insbesondere, wenn es sich um mehrkomponentige gekoppelte Differentialgleichungen handelt) kann man eine Lösung nicht explizit angeben. Oftmals möchte man aber auch nur eine qualitative Vorstellung vom Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen erhalten. Dazu eignet sich folgendes Verfahren:

Man bestimmt zunächst die sogenannten stationären Lösungen bzw. die (zeitlich) konstanten Lösungen und macht anschließend eine sogenannte Stabilitätsuntersuchung in linearer Näherung um diese Lösung. Das bedeutet, man nimmt eine Lösung an, deren Anfangswert in der Nähe der konstanten Lösung liegt und untersucht, ob sich diese Lösung von der Konstanten entfernt oder der Konstanten nähert. Dies soll nun anhand der logistischen Differentialgleichung gezeigt werden.

Zuvor jedoch ein paar Begriffsklärungen: Ein *Fixpunkt* [*fixed point*] einer Abbildung $\Phi : M \rightarrow M$ ist ein Element $x \in M$, für das gilt: $\Phi(x) = x$. Das Element x wird unter der Abbildung Φ also auf sich selbst abgebildet. Bei einer gewöhnlichen Dif-

ferentialgleichung ist der *Phasenraum* der Raum der möglichen Anfangsbedingungen (vgl. S. 160). Unter dem *Fluss* [flow] Φ_t versteht man die Abbildung, die ein Element x des Phasenraums auf das Element $\Phi_t(x) = x(t)$ abbildet, wobei $x(t)$ der Wert zum Zeitpunkt t der Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $x(0) = x$ ist. Der Punkt x wird also auf den Punkt abgebildet, zu dem er in der Lösung der Differentialgleichung nach der Zeit t „geflossen“ ist. Wenn man bei einer Differentialgleichung von einem Fixpunkt spricht, ist meist ein Fixpunkt dieses Flusses Φ_t gemeint, wobei t beliebig sein kann. Das bedeutet, man sucht nach Lösungen, die konstant sind und damit stationär.

1.) Bestimmung der Fixpunkte

Wir betrachten nun die logistische Differentialgleichung und suchen nach den zeitlich konstanten Lösungen. Für diese Lösung gilt $\dot{x} = 0$ und somit wird aus der Differentialgleichung eine gewöhnliche algebraische Gleichung:

$$rx(1-x) = 0 \implies x_0 = 0 \text{ und } x_1 = 1. \quad (7.138)$$

Die Lösungen zu diesen beiden Anfangsbedingungen sind $x(t) = 0$ und $x(t) = 1$.

2.) Stabilitätsanalyse

Wir betrachten nun einen Punkt ϵ in der Nähe von x_0 bzw. x_1 und untersuchen, wie sich die zugehörige Lösung $x(t) = x_i + \epsilon(t)$ zu dieser Anfangsbedingung (als „Anfang“ wählen wir der Einfachheit halber $t_0 = 0$) verhält. Dabei wird eine sogenannte *lineare Näherung* [linear approximation] vorgenommen, d.h., es werden nur Terme in der Differentialgleichung berücksichtigt, die linear in $\epsilon(t)$ sind. Diese lineare Näherung ist gerechtfertigt, da die Anfangsbedingung ja sehr nahe an einer Lösung (dem Fixpunkt) liegt und somit $\epsilon(t)$ zumindest für kurze Zeiten t auch klein bleiben sollte. Dabei interessiert, ob sich die Lösung von dem Fixpunkt entfernt oder ob sie sich dem Fixpunkt nähert.

Betrachten wir zunächst den Fixpunkt $x_0 = 0$ und eine Lösung $x(t) = 0 + \epsilon(t)$. Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein und berücksichtigen nur die linearen Terme, folgt:

$$\dot{\epsilon}(t) = g\epsilon(t) - g\epsilon(t)^2 \quad (7.139)$$

mit der Lösung $\epsilon(t) = \epsilon \exp(gt)$. Offensichtlich nimmt der Wert von $\epsilon(t)$ mit wachsendem t zu, d.h., die Lösung entfernt sich von dem Fixpunkt $x = 0$. Dies ist unabhängig davon, ob ϵ positiv oder negativ ist.

Betrachten wir nun den Fixpunkt $x_1 = 1$ und eine Lösung $x(t) = 1 + \epsilon(t)$. Wiederum soll der Anfangswert $\epsilon(0) = \epsilon$ sehr klein sein (also die Funktion $x(t)$ in der Nähe des Fixpunkts beginnen), sodass nicht-lineare Terme vernachlässigt werden

können. Da $\dot{x}(t) = \dot{\epsilon}(t)$ folgt:

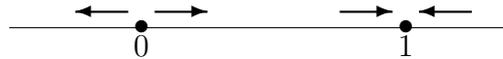
$$\dot{\epsilon}(t) = g(1 + \epsilon(t))(1 - (1 + \epsilon(t))) = -g\epsilon(t) + \mathcal{O}(\epsilon(t)^2) \quad (7.140)$$

mit der Lösung $\epsilon(t) = \epsilon \exp(-gt)$. In diesem Fall wird $\epsilon(t)$ also kleiner, d.h., die Lösung nähert sich dem Fixpunkt.

3.) Das Flussdiagramm im Phasenraum:

Wir erhalten also folgendes Bild (siehe Abb. 7.3). In der Nähe des Fixpunktes $x = 0$ werden Lösungen vom Fixpunkt weg getrieben, wohingegen eine Lösung in der Nähe des Fixpunkts $x = 1$ zu diesem Fixpunkt hin getrieben wird. Man bezeichnet $x = 0$ auch als instabilen Fixpunkt, weil eine winzige Abweichung von diesem Fixpunkt die Lösung wegtreibt. Der Fixpunkt $x = 1$ ist ein stabiler Fixpunkt, da eine winzige Abweichung wieder in den Fixpunkt zurückgetrieben wird.

Abbildung 7.3: Qualitativer Fluss im Phasenraum der logistischen Differentialgleichung.



Diese Informationen reichen schon aus, um ein qualitatives Bild der Lösungen zu erhalten, das auch mit unseren exakten Lösungen im letzten Abschnitt übereinstimmt: Für $x(t_0) < 0$ wird die Lösung exponentiell schnell zu negativen Werten getrieben (Zweig 1 in Abb. 7.2). Dass die Lösung nach einer endlichen Zeit divergiert, kann man der linearen Näherung allerdings nicht ansehen, da hierfür der quadratische Term verantwortlich ist. Für $0 < x(t_0) < 1$ wird die Lösung in der Nähe von 0 exponentiell von diesem Wert weggetrieben und nähert sich für große t exponentiell rasch dem Wert $x = 1$. Dies entspricht der regulären Lösung aus Abb. 7.1. Für $x(t_0) > 1$ wird die Lösung zu dem Fixpunkt $x = 1$ hingetrieben (Zweig 2 in Abb. 7.2). Auch hier kann die lineare Näherung allerdings das singuläre Verhalten in der Vergangenheit nicht beschreiben.

7.5.3 *Die logistische Abbildung

Eng verwandt mit der logistischen Differentialgleichung und doch mit einem quantitativ und qualitativ sehr viel reichhaltigerem Verhalten ist die *logistische Abbildung* [*logistic mapping*]. Hierbei handelt es sich um eine iterative Gleichung der Form:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (7.141)$$

In diesem Fall soll gelten: $0 < x_n < 1$ und $0 < r \leq 4$. Man kann leicht zeigen, dass die anderen Fälle (z.B. $r > 4$ oder $x_n > 1$ bzw. $x_n < 0$) im Allgemeinen zu einer divergenten Folge für $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ führen. Für die angegebenen Werte divergiert die Folge nicht, aber man kann sich natürlich fragen, ob es Grenzwerte gibt.

Fixpunkte

Falls es einen Grenzwert gibt, sollte dieser die Gleichung

$$x = rx(1 - x) \quad (7.142)$$

erfüllen. Das führt auf die Lösungen:

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{r-1}{r}. \quad (7.143)$$

Es ist offensichtlich, dass sich beide Punkte, wenn man sie in die iterative Gleichung einsetzt, reproduzieren. Doch das bedeutet nicht, dass sich die Folge für einen allgemeinen Anfangswert x_0 (im Bereich $(0, 1)$) einem dieser Punkte nähert.

Dazu betrachtet man wieder die Stabilität dieser Fixpunkte. Bei einer iterativen Gleichung machen wir den Ansatz

$$x_n = \bar{x}_i + \epsilon_n, \quad (7.144)$$

wobei \bar{x}_i einer der Fixpunkte sein soll und ϵ_n die Folge angibt. Allerdings sollte gelten: $\epsilon_0 \ll 1$, sodass man für die ersten Iterationen erwarten kann, dass auch die Werte von ϵ_n klein bleiben und somit eine lineare Näherung der iterativen Gleichung gerechtfertigt ist.

Beginnen wir mit $\bar{x}_0 = 0$, sodass $x_n = \epsilon_n$ und

$$\epsilon_{n+1} = r\epsilon_n - r\epsilon_n^2 = r\epsilon_n + \mathcal{O}(\epsilon_n^2). \quad (7.145)$$

Sofern ϵ_n klein genug ist, sodass die lineare Näherung gerechtfertigt ist, folgt als Lösung

$$\epsilon_n = r^n \epsilon_0. \quad (7.146)$$

Falls $|r| < 1$ erhalten wir also den Grenzwert $\epsilon_n \rightarrow 0$ und der Punkt $x = 0$ ist ein stabiler Fixpunkt. Für $|r| = 1$ müsste man die nächste Ordnung berechnen, doch für $|r| > 1$ wird ϵ_n immer größer und die Folge divergiert. Das bedeutet nicht unbedingt, dass die Folge $\{x_n\}$ divergiert, aber wenn der Wert von x_n nicht gleich 0 ist, entfernt sich die Folge von 0 und irgendwann ist die lineare Näherung nicht mehr gerechtfertigt. In diesem Fall ist $\bar{x}_0 = 0$ kein stabiler Fixpunkt.

Betrachten wir nun den Fall $\bar{x}_1 = \frac{r-1}{r}$, sodass

$$x_n = \frac{r-1}{r} + \epsilon_n. \quad (7.147)$$

Setzt man dies in die iterative Gleichung ein und berücksichtigt nur die linearen Terme in ϵ_n , folgt

$$\epsilon_{n+1} = (2-r)\epsilon_n + \mathcal{O}(\epsilon_n^2). \quad (7.148)$$

Der Fixpunkt ist stabil, wenn die zugehörige Folge eine Nullfolge ist, und das ist der Fall für

$$|2 - r| < 1 \quad \text{oder} \quad 1 < r < 3. \quad (7.149)$$

In diesen Fällen ist $|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_n|$ und wir erhalten eine Nullfolge. Die lineare Näherung bleibt gerechtfertigt, da ϵ_n immer kleiner wird (vgl. Abb. 7.4).

Wir können sogar noch etwas ausführlicher feststellen: Sofern $1 < r < 2$ konvergiert die Folge $\{\epsilon_n\}$ monoton gegen 0. Für $r = 2$ konvergiert diese Folge sehr rasch (bei einer kleinen Abweichung ϵ ist der nächst Term in der Folge schon von der Ordnung ϵ^2). Für $2 < r < 3$ konvergiert die Folge $\{\epsilon_n\}$ alternierend gegen Null, d.h. das Vorzeichen wechselt bei jedem Schritt.

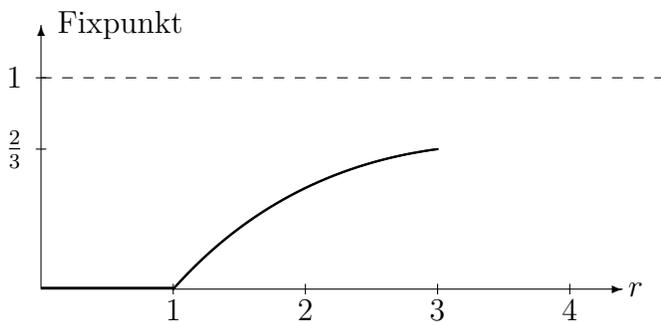


Abbildung 7.4: Fixpunkte der logistischen Abbildung: Für $0 < r < 1$ konvergiert die Folge gegen 0, in dem Bereich $1 < r < 3$ hat die Folge einen stabilen Fixpunkt, der von r abhängt.

Zyklen und chaotisches Verhalten

Die logistische Abbildung hat somit für $1 < r < 3$ stabile Fixpunkte. Bei $r = 3$ ist ein sogenannter *Bifurkationspunkt* [*bifurcation point*]. Aus dem einen Fixpunkt für $r < 3$ werden nun zwei Häufungspunkte für $r > 3$. Bei einem beliebigen Anfangswert nähert sich die Folge alternierend diesen beiden Häufungspunkten. Dieses Verhalten kann man mit etwas Rechenaufwand noch analytisch erhalten. Dazu muss man die Gleichung zweimal iterieren,

$$x_{n+2} = r^2 x_n (1 - x_n) \left(1 - r x_n (1 - x_n) \right), \quad (7.150)$$

und nun sucht man nach Fixpunkten dieser Gleichung (jeder zweite Term in der Folge ist nun gleich). Das ist eine Gleichung 4. Ordnung für \bar{x} , doch die beiden Lösungen $\bar{x}_0 = 0$ und $\bar{x}_1 = \frac{r-1}{r}$ sind natürlich auch Lösungen dieser Gleichung. Damit kann man das Problem auf eine quadratische Gleichung reduzieren. Die beiden Lösungen sind

die Häufungspunkte, zwischen denen die Folge für große Werte von n alternierend hin und her springt.

Dieses alternierende Verhalten ist stabil, sofern $r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,45$. Dort befindet sich ein weiterer Bifurkationspunkt, bei dem aus der alternierenden Folge zwischen zwei Häufungspunkten ein sogenannter *Zyklus* [*cycle*] der Periode 4 mit vier Häufungspunkten wird. Dieser Zyklus ist nur für einen sehr kleinen Bereich stabil, dann entsteht ein Zyklus der Periode 8, anschließend ein Zyklus der Periode 16, etc. Schließlich, bei $r \approx 3,57$, setzt *chaotisches Verhalten* [*chaotic behavior*] ein: Die Terme der Folge springen scheinbar ungeordnet zwischen einem Maximal- und einem Minimalwert hin und her. Für $g \rightarrow 4$ werden diese beiden Grenzpunkte zu 0 und 1. Dazwischen findet man kleine „Fenster“ bei denen die Folge endlich viele Häufungspunkte hat. Abbildung 7.5 zeigt das Verhalten der Folge für große Werte von n als Funktion von g .

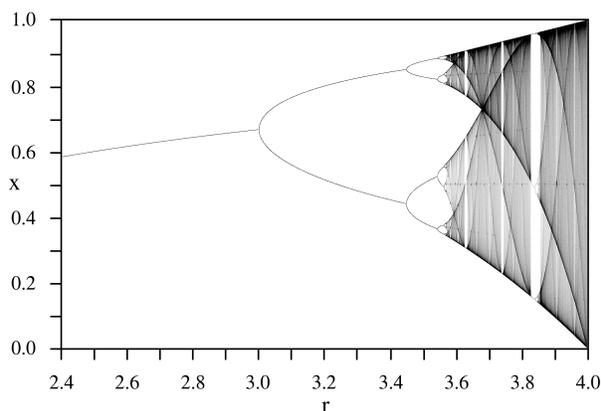


Abbildung 7.5: Verhalten der Fixpunkte, Zyklen und chaotischen Bereiche der logistischen Abbildung im Bereich $2,4 < r < 4$. (aus Wikipedia - „Logistische Gleichung“)

Zusammenhang zur logistischen Differentialgleichung

Wenn wir in der logistischen Differentialgleichung den Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten ersetzen, also eine diskrete Approximation mit Zeitschritten Δt betrachten, erhalten wir:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = gx(t)(1 - x(t)) \quad (7.151)$$

oder

$$x(t + \Delta t) = x(t) + g\Delta tx(t)(1 - x(t)) = (1 + g\Delta t)x(t) \left(1 - \frac{g\Delta t}{1 + g\Delta t}x(t)\right). \quad (7.152)$$

Definieren wir nun die Funktion

$$u(t) = \frac{g\Delta t}{1 + g\Delta t}x(t), \quad (7.153)$$

so erfüllt diese Funktion die Gleichung:

$$u(t + \Delta t) = (1 + g\Delta t)u(t)(1 - u(t)). \quad (7.154)$$

Dies entspricht einer logistischen Abbildung zu Werten von $r = 1 + g\Delta t$.

Die logistische Differentialgleichung lässt sich also approximativ durch die logistische Abbildung in dem Bereich $r \gtrsim 1$ beschreiben, d.h., wenn r etwas größer ist als 1. Dort hat die logistische Abbildung einen stabilen Fixpunkt, der durch $\frac{r-1}{r} = \frac{g\Delta t}{1+g\Delta t}$ gegeben ist. Um diesen Wert muss man die Funktion reskalieren (Gl. 7.153), sodass der stabile Fixpunkt zu 1 wird.

Die Mandelbrot-Menge

Die Mandelbrot-Menge [*Mandelbrot set*] ergibt sich aus einer Verallgemeinerung der logistischen Abbildung zu komplexen Zahlen. Zunächst betrachten wir eine Transformation der Variablen

$$y_n = -r \left(x_n - \frac{1}{2} \right) \quad \text{bzw.} \quad x_n = -\frac{y_n}{r} + \frac{1}{2}. \quad (7.155)$$

In den neuen Variablen y_n lautet die logistische Gleichung:

$$y_{n+1} = y_n^2 + \frac{r}{4}(2 - r) = y_n^2 + c \quad \text{mit} \quad c = \frac{r}{4}(2 - r). \quad (7.156)$$

Die Einschränkung $0 < r \leq 4$ bedeutet für die Konstante c : $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$. Die Beschränktheit der Folge $\{y - n\}$ hängt nun von dem Wert von c ab, aber man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Folge immer divergiert, sobald $|y_n| > 2$.

Wir betrachten nun eine Verallgemeinerung dieser iterativen Gleichung zu komplexen Zahlenwerten:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_n, c \in \mathbb{C} \quad (7.157)$$

und im Folgenden sei immer $z_0 = 0$. Ausgedrückt durch die reellen Real- und Imaginärteile, $z_n = x_n + iy_n$ und $c = a + ib$, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$x_{n+1} = (x_n^2 - y_n^2) + a \quad (7.158)$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b, \quad x_0, y_0 = 0. \quad (7.159)$$

Die Mandelbrot-Menge ist definiert als die Menge aller Punkte $c = a + ib$ in der komplexen Ebene, für welche die Folge $\{z_n\}$ beschränkt bleibt. (Sie muss nicht konvergieren!). Auf der reellen Achse ($b = 0$) erwarten wir nach den Überlegungen zur logistischen Abbildung, dass dies für Werte $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$ der Fall ist. In der komplexen Ebene ergibt sich jedoch das schwarze Gebiet aus Abb. 7.6.

Die farbigen Zeichnungen oder Filme, die man im Internet findet, entstehen meist dadurch, dass man für einen gegebenen Punkt $c = (a, b)$ die Anzahl N an Iterationen zählt, bis zu denen ein bestimmter Wert für $|z_n|$ (> 2 , meist im Bereich von

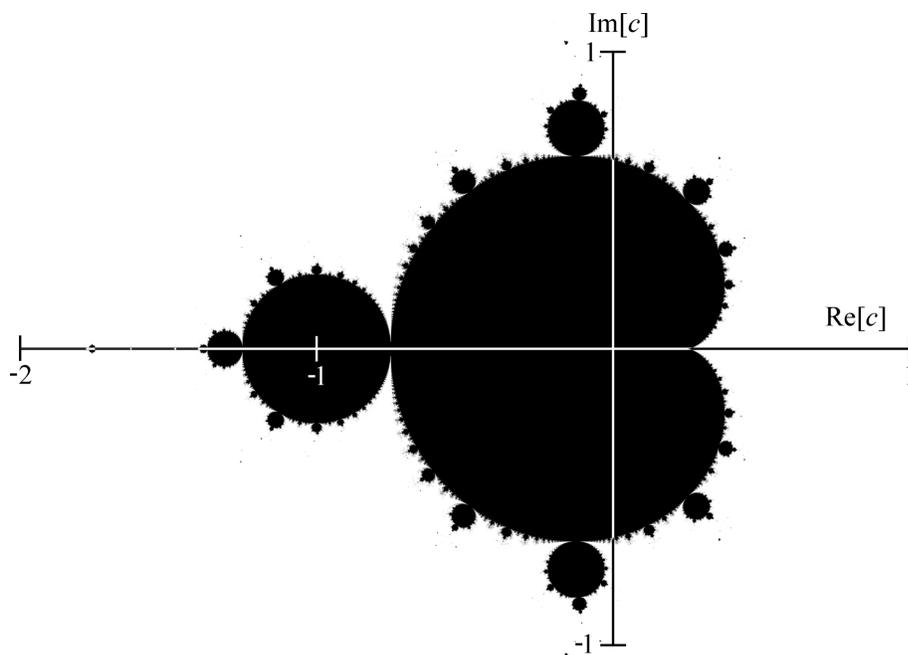


Abbildung 7.6: Die Mandelbrotmenge: Die schwarz eingezeichnete Punktmenge in der komplexen Ebene bezeichnet die komplexen Werte für c , bei denen die Folge $\{z_n\}$ mit $z_{n+1} = z_n^2 + c$ und $z_0 = 0$ beschränkt bleibt. Man beachte, dass es auch kleine Gebiete gibt, die nicht mit dem sogenannten „Apfelmännchen“ zusammenhängen. (Aus Wikipedia: Mandelbrot Set)

1000) überschritten ist. In Abhängigkeit von N wählt man dann eine farbliche Kodierung (oftmals werden die Farben für größere Werte von N immer heller, sodass sich ein scharfer Kontrast zur Mandebrot-Menge ergibt). Wird N größer als eine vorgegebene Grenze (oftmals im Bereich von Millionen bis hin zu mehreren Milliarden, je nach angestrebter Genauigkeit), wird die Folge als konvergent angenommen und der Punkt entsprechend mit schwarz markiert.

7.5.4 Die Energieerhaltung

Das folgende Beispiel zeigt, wie eine *Erhaltungsgröße*, also eine Funktion, die sich für eine gegebene Lösungskurve zeitlich nicht ändert sondern konstant bleibt, zur Auffindung der Lösungen genutzt werden kann.

Viele Bewegungsgleichungen in der Physik haben folgende Form

$$m\ddot{x}(t) = -\nabla U(x(t)). \quad (7.160)$$

Das gilt für alle Newton'schen Systeme, bei denen die Kraft „konservativ“ ist und sich als Gradient eines Potentials $U(x)$ schreiben lässt. (Man beachte, dass x hier durchaus

mehrkomponentig sein kann.) Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit der Geschwindigkeit (im Sinne einer Skalarmultiplikation), folgt

$$m\ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) = -\nabla U(x(t)) \cdot \dot{x}. \quad (7.161)$$

Für die rechte Seite der Gleichung gilt nach der Kettenregel

$$-\nabla U(x(t)) \cdot \dot{x} = -\frac{dU(x(t))}{dt}, \quad (7.162)$$

und für die linke Seite gilt

$$m\ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 \right). \quad (7.163)$$

Insgesamt folgt somit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \right) = 0 \quad (7.164)$$

Die Größe

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \quad (7.165)$$

ändert sich also nicht als Funktion der Zeit, sofern $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Diese Größe E ist die Gesamtenergie (kinetische plus potentielle Energie) des Systems.

Wir betrachten nun speziell eine einkomponentige Gleichung der Form:

$$\ddot{x} = f(x), \quad (7.166)$$

die zweite Ableitung einer Funktion ist also gleich einer (integrablen) Funktion f dieser Funktion. Die Stammfunktion zu f sei F , sodass wir auch

$$\ddot{x} = F'(x) \quad (7.167)$$

schreiben können. Die gleiche Argumentation wie vorher führt nun auf die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 - F(x(t)) \right) = 0 \quad (7.168)$$

oder

$$\frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 - F(x(t)) = c, \quad (7.169)$$

wobei c eine beliebige Konstante sein kann (c ist eine Integrationskonstante, da wir es aber mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun haben, gibt es noch eine zweite Integrationskonstante). Man bezeichnet c auch häufig als *erstes Integral* [*first integral*] der Differentialgleichung.

Diese Gleichung können wir nach $\dot{x}(t)$ auflösen:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2(c + F(x(t)))} \quad (7.170)$$

und haben auf diese Weise eine Gleichung gewonnen, die sich mit der Methode der Variablentrennung (s.o.) lösen lässt:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{2(c + F(x))}} dx = (t - t_0). \quad (7.171)$$

Sofern das Integral auf der linken Seite lösbar ist und sich das Ergebnis nach $x(t)$ auflösen lässt, haben wir die Lösung zu obiger Differentialgleichung gefunden. Die zweite Integrationskonstante ist t_0 .

Kapitel 8

Parametrisierte Räume

Im Folgenden betrachten wir Kurven, Flächen und allgemeiner Teilräume im \mathbb{R}^n . Dazu zählen auch die speziell für die Physik und Mathematik wichtigen Kegelschnitte. Außerdem behandeln wir allgemeinere Koordinatensysteme, die man als Reparametrisierungen des \mathbb{R}^n auffassen kann. Das Kapitel ist eine Einführung in die Methoden der Differentialgeometrie und dient als Vorbereitung für das nächste Kapitel, in dem Integrale über Flächen und Volumina behandelt werden. In Kap. 10 werden einige der Konzepte zur Differentialgeometrie noch weiter vertieft.

Große Teile dieses Kapitels sind dem Skript „Einführung in die Methoden der Theoretischen Physik“ [6] entlehnt. Zum besseren Verständnis (hoffentlich) verwende ich in den folgenden Kapiteln meist den Vektorpfeil zur Kennzeichnung von Vektoren, auch wenn es sich um Vektoren im \mathbb{R}^n handelt.

8.1 Parametrisierte Wege im \mathbb{R}^n

Das Konzept eines parametrisierten Weges wurde schon kurz in Abschnitt 5.3.3 eingeführt. Hier betrachten wir einige allgemeine Eigenschaften solcher Wege oder Bahnkurven.

8.1.1 Die Parametrisierung von Wegen

Ein parametrisierter Weg (oder, falls die Parametrisierung sich auf die Zeit bezieht, eine parametrisierte Bahnkurve) ist eine Abbildung von einem Intervall in den \mathbb{R}^n :

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad t \in I \mapsto \gamma(t) = \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (8.1)$$

Eine physikalische oder mathematische Interpretation des Parameters t besteht zunächst nicht, obwohl dieser Parameter in der Physik häufig die Rolle der Zeit spielt (d.h., wir geben an, an welchem Raumpunkt $\vec{x}(t)$ sich ein Körper zu einem bestimmten

Zeitpunkt t befindet). In diesem Fall bezeichnet man den parametrisierten Weg auch als Bahnkurve oder Trajektorie. In der Mathematik wählt man für t oft die sogenannte Bogenlänge. Auf diese spezielle Parametrisierung kommen wir noch zu sprechen.

Bezieht man sich nur auf die Punktmenge, aus denen ein parametrisierter Weg besteht, spricht man häufig einfach von einer *Kurve*. In diesem Sinne bezeichnet ein Kreis eine Kurve, z.B. charakterisiert durch die Punktmenge, welche der Bedingung

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (8.2)$$

genügt, wohingegen die Darstellung

$$\vec{x}(t) = (R \cos 2\pi t, R \sin 2\pi t) \quad t \in [0, 1) \quad (8.3)$$

einer parametrisierten Kreiskurve entspricht.

Eine andere Parametrisierung derselben Kurve entspricht anderen Funktionen $x_i(t')$. Dabei sollte sich t' als bijektive Funktion von t ausdrücken lassen.

Beispiel: Die Bahnkurve einer Helix im \mathbb{R}^3 entlang der z -Achse lässt sich durch folgende Abbildung beschreiben:

$$t \rightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, \alpha t). \quad (8.4)$$

r , ω und α sind feste Parameter zur Charakterisierung der Helix. So ist r der Radius der Helix (in der Projektion auf die xy -Ebene), ω legt den Parameterbereich T fest, der einem Umlauf der Helix entspricht ($T = 2\pi/\omega$), und α charakterisiert (zusammen mit ω) die so genannte *Ganghöhe* h , um welche die Helix bei einem Umlauf zunimmt ($h = \alpha T = 2\pi\alpha/\omega$). Eine solche Bahnkurve ergibt sich beispielsweise für ein geladenes Teilchen in einem konstanten Magnetfeld, das nur eine 3-Komponente hat.

Zur Notation: Im Folgenden bezeichne ich mit t meist den Parameter „Zeit“ und mit s die so genannte Bogenlänge (siehe Gl.8.11).

8.1.2 Der Tangentialvektor - Die Geschwindigkeit

Die Ableitung eines Weges $\vec{x}(t)$ nach dem Parameter t liefert einen Tangentialvektor an die Kurve am Punkte $\vec{x}(t)$. Handelt es sich bei dem Parameter t um die physikalische Zeit und bezeichnet $\vec{x}(t)$ die Bahnkurve eines Teilchens, so ist dieser Tangentialvektor der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{\vec{x}}(t) \quad (8.5)$$

bzw.

$$(v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)). \quad (8.6)$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist zu jedem Zeitpunkt tangential zur räumlichen Trajektorie. Da die Geschwindigkeit im Laufe der Zeit verschiedene Werte annehmen kann, entspricht sie im mathematischen Sinne ebenfalls einer Bahnkurve bzw. Trajektorie, allerdings nicht im gewöhnlichen Ortsraum, sondern im Raum der Geschwindigkeiten.

Die Geschwindigkeit ist eine gerichtete Größe und daher ein Vektor. Es besteht allerdings ein grundlegender Unterschied in der Interpretation des Vektors \vec{x} zur Beschreibung des Orts eines Teilchens und \vec{v} zur Beschreibung seiner Geschwindigkeit. Es gibt zunächst keinen Grund, weshalb der physikalische Raum, in dem sich ein Teilchen bewegt, ein Vektorraum sein sollte. Beispielsweise könnte sich das Teilchen auch auf der Oberfläche einer Kugel oder einer allgemeinen Mannigfaltigkeit bewegen (wie es beispielsweise in der allgemeinen Relativitätstheorie der Fall ist). Auf einer solchen Mannigfaltigkeit muss (zumindest lokal, d.h. in der Umgebung von jedem Punkt) ein Koordinatensystem definiert sein, das ganz allgemein einem Ausschnitt (einer offenen Menge) des \mathbb{R}^n entspricht. Doch das macht diese Mannigfaltigkeit noch nicht zu einem Vektorraum. So ist meist weder eine Addition von Raumpunkten noch die Multiplikation eines Raumpunkts mit einer reellen Zahl definiert. Der \mathbb{R}^n dient in diesem Fall lediglich als Koordinatensystem zur Beschreibung der Raumpunkte.

Bei der Geschwindigkeit (bzw. bei einem Tangentialvektor) ist es jedoch anders: Geschwindigkeiten kann man addieren und auch mit reellen Zahlen multiplizieren. Geschwindigkeiten sind also Vektoren im eigentlichen Sinne. Bei einer allgemeinen Mannigfaltigkeit drückt sich das dadurch aus, dass die Geschwindigkeit nicht ein Element der Mannigfaltigkeit selber ist, sondern zum Tangentialraum an einem bestimmten Punkt der Mannigfaltigkeit gehört. Dieser Tangentialraum ist immer ein Vektorraum.

Allgemein ist der Betrag des Tangentialvektors

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)}. \quad (8.7)$$

Für das Beispiel der Helix erhalten wir die Geschwindigkeit durch Ableitung von Gl. 8.4 nach der Zeit:

$$\vec{v}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t, \alpha). \quad (8.8)$$

Für den Betrag der Geschwindigkeit folgt:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{r^2\omega^2 \sin^2 \omega t + r^2\omega^2 \cos^2 \omega t + \alpha^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + \alpha^2}. \quad (8.9)$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist für die angegebene Parameterdarstellung (t entspricht der Zeit) der Helix zeitlich konstant. Die Trajektorie wird also mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, allerdings ändert die Geschwindigkeit ständig ihre Richtung.

Bei einer Parametrisierungsänderung

$$t \longrightarrow t' = t'(t)$$

ändert sich der Betrag des Tangentialvektors, nicht aber seine Richtung:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \longrightarrow \frac{d\vec{x}(t')}{dt'} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \frac{dt}{dt'}. \quad (8.10)$$

Durch eine geeignete Parametrisierung kann man daher erreichen, dass der Tangentialvektor immer den Betrag 1 hat. Eine Parametrisierung $\vec{x}(s)$ einer Kurve, sodass

$$\left| \frac{d\vec{x}(s)}{ds} \right| = 1, \quad (8.11)$$

bezeichnet man als *Bogenlängenparametrisierung*. Der Parameter s entspricht in diesem Fall der Bogenlänge der Kurve, wie wir in Kap. 9.2 zeigen werden.

8.1.3 Die Beschleunigung

Die Beschleunigung eines Teilchens ist gleich der Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit (es folgen verschiedene Notationen für die Beschleunigung):

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}(t) \quad (8.12)$$

bzw.

$$(a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)) = \left(\frac{dv_1(t)}{dt}, \frac{dv_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dv_n(t)}{dt} \right). \quad (8.13)$$

Auch die Beschleunigung ist Element eines Vektorraums.

Für die Beschleunigung der Helix-Kurve erhalten wir:

$$\vec{a}(t) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t, 0). \quad (8.14)$$

Die Beschleunigung hat in diesem Fall keine 3-Komponente, da die Bahnkurve in 3-Richtung einer konstanten Bewegung entspricht. Der Betrag der Beschleunigung,

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{r^2\omega^4 \cos^2 \omega t + r^2\omega^4 \sin^2 \omega t} = r\omega^2, \quad (8.15)$$

ist bei der gegebenen Parametrisierung ebenfalls konstant.

Das Skalarprodukt von Geschwindigkeit und Beschleunigung ergibt für die Helix:

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = r^2\omega^3 \sin \omega t \cos \omega t - r^2\omega^3 \cos \omega t \sin \omega t = 0. \quad (8.16)$$

Weder die Geschwindigkeit noch die Beschleunigung verschwinden, daher bedeutet dieses Ergebnis, dass die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist. Generell gilt:

$$\frac{d[\vec{v}(t)]^2}{dt} = 2\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t), \quad (8.17)$$

und da bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag die linke Seite verschwindet, muss auch die rechte Seite null sein. Falls \vec{a} und \vec{v} selbst nicht null sind, müssen sie senkrecht zueinander orientiert sein.

Bei der Bogenlängenparametrisierung (d.h., $|\vec{x}(s)'| = 1$) sind Beschleunigung und Tangentenvektor also immer senkrecht zueinander. In diesem Fall bezeichnet man die Beschleunigung auch als *Krümmungsvektor* der Kurve im Punkte $\vec{x}(s)$. Der Betrag des Krümmungsvektors ist die *Krümmung*,

$$\kappa(s) = \left| \frac{d^2 \vec{x}(s)}{ds^2} \right|, \quad (8.18)$$

und ihr reziproker Wert

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \quad (8.19)$$

heißt *Krümmungsradius* der Kurve im Punkte $\vec{x}(s)$. Für eine allgemeine Parametrisierung $\vec{x}(t)$ der Kurve gilt

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t))(\vec{a}(t) \cdot \vec{a}(t)) - (\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t))^2}}{(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t))^{3/2}}. \quad (8.20)$$

Für unsere Helix erhalten wir als Krümmungsradius

$$\rho = \frac{r^2 \omega^2 + \alpha^2}{r \omega^2}. \quad (8.21)$$

Ohne Ganghöhe ($\alpha = 0$) finden wir das für eine Kreisbahn zu erwartende Ergebnis: $\rho = r$. Durch die Ganghöhe wird der Krümmungsradius der Helix etwas größer.

8.1.4 Das mitgeführte Dreibein

Kurven im \mathbb{R}^3 besitzen im Allgemeinen (die Einschränkungen werden gleich offensichtlich) in jedem ihrer Punkte ein durch die Geometrie ausgezeichnetes Koordinatensystem, das man auch als *mitgeführtes Dreibein* bezeichnet. Dies kann beispielsweise ein Beobachter, der sich entlang der Kurve bewegt, als Koordinatensystem verwenden.

Zwei geometrisch ausgezeichnete Vektoren einer Bahnkurve kennen wir bereits: den Geschwindigkeitsvektor (allgemeiner Tangentialvektor) $\vec{v}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$. Auch wenn beide Vektoren von der gewählten Parametrisierung der Kurve abhängen, ist die Ebene, die durch die beiden Vektoren aufgespannt wird, parametrisierungsunabhängig. Außerdem ist der Geschwindigkeitsvektor immer tangential zu einer Kurve, seine Richtung ist also ebenfalls parametrisierungsunabhängig. Dividieren wir den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} durch seinen Betrag, erhalten wir einen Einheitsvektor

$$\vec{e}_v(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}, \quad (8.22)$$

der an jedem Punkt tangential zur Kurve ist. Dieser Vektor ist der erste Vektor unseres Dreibeins. Notwendig (und hinreichend) für seine Existenz ist, dass der Geschwindigkeitsvektor nicht null ist. Dies lässt sich durch eine geeignete Parametrisierung der Kurve immer erreichen. In der Bogenlängenparametrisierung hat der Tangentialvektor bereits den Betrag 1 und entspricht somit dem ersten Vektor des Dreibeins.

Für den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$ hängen sowohl der Betrag als auch die Richtung von der Parametrisierung der Kurve ab. Wir können jedoch den Beschleunigungsvektor immer in einen Anteil parallel zur Tangente, \vec{a}_{\parallel} , und einen Anteil senkrecht zur Tangente, \vec{a}_{\perp} , aufspalten. Die Komponente parallel zur Tangente erhalten wir durch das Skalarprodukt mit \vec{e}_v und es gilt:

$$\vec{a}_{\parallel} = (\vec{e}_v \cdot \vec{a}) \vec{e}_v = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \quad (8.23)$$

Diese Komponente beschreibt die Änderung des Betrags der Geschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit konstant, steht \vec{a} senkrecht auf \vec{v} und dieser Anteil verschwindet.

Den senkrechten Anteil der Beschleunigung erhalten wir, indem wir den parallelen Anteil von \vec{a} subtrahieren:

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = \vec{a} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{1}{|\vec{v}|^2} \left((\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{a} - (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} \right). \quad (8.24)$$

Dieser Anteil beschreibt das Maß der Richtungsänderung der Kurve. Als zweiten Vektor unseres Dreibeins wählen wir den Einheitsvektor, der in die Richtung von \vec{a}_{\perp} zeigt:

$$\vec{e}_a(t) = \frac{\vec{a}(t)_{\perp}}{|\vec{a}(t)_{\perp}|}. \quad (8.25)$$

Diesen Vektor bezeichnet man auch als *Hauptnormalenvektor*. In der Bogenlängenparametrisierung ist

$$\vec{e}_a(s) = \frac{\vec{a}(s)}{|\vec{a}(s)|}. \quad (8.26)$$

Damit $\vec{e}_a(t)$ eindeutig gegeben ist, muss die Kurve in dem Punkt $\vec{x}(t)$ ihre Richtung ändern. Für eine Gerade (bzw. Ausschnitte einer Geraden) ist dieser Vektor nicht mehr eindeutig definierbar.

Die von den beiden Vektoren $\vec{e}_v(t)$ und $\vec{e}_a(t)$ (bzw. äquivalent $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$) aufgespannte Ebene bezeichnet man als *Schmiegeebene* an die Kurve im Punkte $\vec{x}(t)$.

Als dritten Vektor des ausgezeichneten Dreibeins wählen wir einen Einheitsvektor, der senkrecht auf $\vec{v}(t)$ und senkrecht auf $\vec{a}(t)$ steht. Diesen erhalten wir aus dem Kreuzprodukt:

$$\vec{e}_n(t) = \vec{e}_v(t) \times \vec{e}_a(t) = \frac{\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)|}. \quad (8.27)$$

Man bezeichnet $\vec{e}_n(t)$ auch als *Binormalenvektor* der Kurve im Punkte $\vec{x}(t)$.

Die drei Vektoren $(\vec{e}_v(t), \vec{e}_a(t), \vec{e}_n(t))$ (Tangentenvektor, Hauptnormalenvektor, Binormalenvektor) bilden zu jedem Zeitpunkt t ein kartesisches Koordinatensystem (es handelt sich um drei Einheitsvektoren, die jeweils senkrecht aufeinander stehen), das durch die Richtung und die Krümmung der Kurve ausgezeichnet ist.

8.2 Flächen

Eine Abbildung von einem Ausschnitt des \mathbb{R}^2 (beispielsweise einem Rechteck oder einer Kreisfläche) in den \mathbb{R}^n beschreibt eine Fläche (ähnlich wie eine Kurve einer Abbildung von einem Ausschnitt des \mathbb{R} in den \mathbb{R}^n entspricht). Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Parametergebiet, beschrieben durch Koordinaten (u, v) , so ist eine Fläche im \mathbb{R}^n gegeben durch:

$$(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \vec{x}(u, v) \in \mathbb{R}^n, \quad (8.28)$$

bzw. ausgedrückt in Koordinaten:

$$(u, v) \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_n(u, v)). \quad (8.29)$$

Diese Beschreibung einer Fläche bezeichnet man wiederum als eine *Parameterdarstellung* der Fläche.

Als Beispiel betrachten wir die Kugeloberfläche im \mathbb{R}^3 . Eine Kugel lässt sich durch die Bedingung

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = R^2 \quad (8.30)$$

charakterisieren. Eine solche Beschreibung einer Fläche bezeichnet man als implizite Beschreibung. Wir gehen in Abschnitt 8.4 noch genauer auf implizite Beschreibungen ein.

Diese Bedingung können wir nach jeder der Koordinaten auflösen, beispielsweise nach x^3 :

$$x_3 = \pm \sqrt{R^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2}. \quad (8.31)$$

Wir wählen nun x_1 und x_2 als unabhängige Parameter, setzen also $x_1 = u$ und $x_2 = v$, und erhalten:

$$x_1(u, v) = u \quad x_2(u, v) = v \quad x_3(u, v) = \pm \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}. \quad (8.32)$$

Das positive Vorzeichen beschreibt die „nördliche“ Halbkugel, das negative Vorzeichen die südliche. Die Parameter (u, v) sind durch die Bedingung $u^2 + v^2 < R^2$ eingeschränkt. Das Parametergebiet im \mathbb{R}^2 ist also eine (offene) Kreisscheibe. Allerdings werden die Punkte am Äquator durch diese Darstellung nicht beschrieben.

Wir können eine Kugeloberfläche aber auch durch zwei Winkel charakterisieren. Dazu überzeugen wir uns zunächst, dass sich jeder Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ im \mathbb{R}^3

durch seinen Abstand r vom Nullpunkt, dem Winkel θ zur z -Achse und den Winkel φ zwischen der Projektion auf die xy -Ebene und der x -Achse beschreiben lässt:

$$(x_1, x_2, x_3) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta). \quad (8.33)$$

Es handelt sich hierbei um eine andere Beschreibung der Punkte des \mathbb{R}^3 . Solche Koordinatentransformationen werden uns in Abschnitt 8.6 noch beschäftigen. Im vorliegenden Fall genügt es, dass die Kugeloberfläche durch konstantes r gekennzeichnet ist. Wir erhalten daher für die Beschreibung der Kugeloberfläche:

$$(\varphi, \theta) \rightarrow (x_1(\varphi, \theta), x_2(\varphi, \theta), x_3(\varphi, \theta)) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta). \quad (8.34)$$

Für die Parameter gilt $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$. Das Parametergebiet ist in diesem Fall ein Rechteck. Ganz anschaulich entspricht φ dem Längengrad auf der Erdoberfläche (aufgefasst als Kugelfläche) und θ dem Breitengrad (allerdings mit dem Wert π am Äquator).

Damit es sich allgemein um eine reguläre Fläche handelt, verlangen wir nicht nur, dass die Funktionen $x_i(u, v)$ stetig und hinreichend oft differenzierbar sind, sondern wir verlangen auch, dass die Parametrisierung der Fläche in folgendem Sinne nicht entartet ist: An jedem beliebigen Punkt $\vec{x}(u_0, v_0)$ auf der Fläche sollen sich die Kurven $\vec{x}(u, v_0)$ (aufgefasst als Kurve mit Kurvenparameter u) und $\vec{x}(u_0, v)$ (Kurvenparameter v) unter einem nicht-verschwindenden Winkel schneiden. Konkret bedeutet dies: Die beiden Tangentialvektoren

$$\vec{f}_u = \left. \frac{\partial \vec{x}(u, v_0)}{\partial u} \right|_{u=u_0} \quad \text{und} \quad \vec{f}_v = \left. \frac{\partial \vec{x}(u_0, v)}{\partial v} \right|_{v=v_0} \quad (8.35)$$

sollen jeweils von null verschieden und linear unabhängig sein.

Im \mathbb{R}^3 sind diese beiden Bedingungen genau dann erfüllt, wenn

$$\vec{f}_n(u, v) := \vec{f}_u \times \vec{f}_v = \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v} \quad (8.36)$$

für alle Werte $(u, v) \in U$ von null verschieden ist. $\vec{f}_n(u, v)$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der Fläche am Punkte $\vec{x}(u, v)$ steht. Diesen Vektor bezeichnet man auch als *Normalvektor*.

Am Beispiel der Kugeloberfläche in der Parametrisierung von Gl. 8.32 erkennt man, dass diese Bedingungen für alle (u, v) erfüllt sind, für die $u^2 + v^2 < R^2$. Wenn wir Punkte auf dem Äquator der Kugeloberfläche beschreiben wollen, sollten wir nicht nach x_3 auflösen, sondern eher nach x_1 oder x_2 . Auch bei der zweiten Parametrisierung der Kugeloberfläche (Gl. 8.34) gibt es „singuläre“ Stellen: $\theta = 0$ und $\theta = \pi$. Man spricht in solchen Fällen auch von *Koordinatensingularitäten*: Die beschriebene Fläche selbst ist an diesen Stellen vollkommen regulär, aber das Koordinatensystem ist an diesen Stellen nicht mehr definiert.

Da die Parametrisierung der Fläche nicht entartet sein soll, können wir den Normalvektor auch durch seinen Betrag dividieren und erhalten den auf 1 normierten Normalvektor:

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\left(\frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v} \right)}{\left| \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v} \right|}. \quad (8.37)$$

8.3 Parameterdarstellung d -dimensionaler Räume im \mathbb{R}^n

Die Konzepte der vergangenen Abschnitte können wir folgendermaßen verallgemeinern: ein d -dimensionaler Raum, eingebettet im \mathbb{R}^n (zunächst verlangen wir noch $d < n$, später betrachten wir auch den Fall $d = n$), besitzt folgende Parameterdarstellung:

$$(u_1, u_2, \dots, u_d) \rightarrow \vec{x}(u_1, u_2, \dots, u_d), \quad (8.38)$$

wobei jede Komponente x_i ($i = 1, \dots, n$) eine (stetige und genügend oft differenzierbare) Funktion der Parameter $\{u_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, d$) ist. Jeder Punkt p auf diesem d -dimensionalen Raum soll eindeutig durch seine Koordinaten $\{u_\alpha\}$ mit $\vec{x}(u_1, \dots, u_d) \simeq p$ bestimmt sein. Statt von einem d -dimensionalen Raum spricht man auch manchmal von einer d -dimensionalen Mannigfaltigkeit. (Mannigfaltigkeiten lassen sich auch allgemeiner definieren, ohne dass man auf die Einbettung der Mannigfaltigkeit in einen \mathbb{R}^n Bezug nehmen muss. Das soll hier aber nicht geschehen.)

Zu jeder der Komponenten u_α können wir die Kurve $\gamma_\alpha \simeq \vec{x}(u_\alpha)$ betrachten, die man erhält, wenn man alle anderen Komponenten $\{u_\beta\}, \beta \neq \alpha$ festhält. Durch jeden Punkt des d -dimensionalen Raumes (festgelegt durch die Koordinaten $\{u_\alpha\}$, wobei dieser Punkt nicht zu einer Koordinatensingularität gehören soll) finden wir daher d ausgezeichnete Kurven, die sich in diesem Punkt schneiden. Zu jeder dieser Kurven können wir den Tangentialvektor berechnen:

$$\vec{f}_\alpha(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial \vec{x}(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_\alpha}. \quad (8.39)$$

Dieser Tangentialvektor ist natürlich eine Funktion der Koordinaten des Punktes, bei dem der Tangentialvektor berechnet wird. Wenn der Punkt p , der im \mathbb{R}^n durch den Vektor $\vec{x}(u^1, \dots, u^d)$ dargestellt wird, nicht zu einer Koordinatensingularität gehört, sind die d Tangentialvektoren $\vec{f}_\alpha(p)$ alle von null verschieden und linear unabhängig. Sie spannen somit einen d -dimensionalen Vektorraum auf, den so genannten *Tangentenraum* an die Mannigfaltigkeit im Punkte p .

Man sollte an dieser Stelle beachten, dass der Tangentialraum im Allgemeinen kein linearer Teilraum des \mathbb{R}^n im üblichen Sinne ist. Das wäre nur der Fall, wenn der

Punkt p gerade dem Nullpunkt des \mathbb{R}^n entspricht. Man kann einen Tangentialraum im obigen Sinne als einen *affinen Teilraum* des \mathbb{R}^n auffassen, bei dem der Nullpunkt entsprechend verschoben ist. Besser ist es jedoch, den Tangentialraum überhaupt nicht als Teilraum des \mathbb{R}^n zu interpretieren, sondern einfach als einen d -dimensionalen Vektorraum, der sich für jeden Punkt p einer Mannigfaltigkeit definieren lässt.

8.4 Charakterisierung durch Bedingungen – Implizite Funktionen

Oftmals ist es nicht leicht, eine geeignete Parameterdarstellung einer Fläche zu finden. Insbesondere ist es für viele Flächen überhaupt nicht möglich, sie durch eine Abbildung der im letzten Abschnitt genannten Art überall und frei von Singularitäten oder Entartungen der Parametrisierung zu definieren. Die Kugeloberfläche ist dafür ein gutes Beispiel.

Statt einer Parametrisierung ist es manchmal einfacher, eine Fläche durch eine geeignete Bedingung zu beschreiben. Im \mathbb{R}^3 lässt sich eine solche Bedingung häufig in der Form

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (8.40)$$

schreiben. Für die Kugeloberfläche im \mathbb{R}^3 gilt beispielsweise

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - R^2, \quad (8.41)$$

was auf die Gleichung

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = R^2. \quad (8.42)$$

führt.

Es erhebt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen sich eine Gleichung der Form $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ beispielsweise nach x_3 auflösen lässt, sodass wir die Fläche auch durch $u_1 = x_1$ und $u_2 = x_2$ charakterisieren können: $(u_1, u_2, x_3(u_1, u_2))$. In diesem Fall wird die Fläche also durch eine „Höhenfunktion“ $x_3(u_1, u_2)$ beschrieben.

Der Satz zu impliziten Funktionen (den wir gleich noch allgemeiner formulieren werden) besagt, dass dies bei allen Punkten (x_1, x_2, x_3) möglich ist, bei denen $\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \neq 0$ ist. Betrachten wir dazu nochmals das Beispiel der Kugeloberfläche: Die Bedingung $\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0$ führt auf die Gleichung $x_3 = 0$. Das sind gerade die Punkte auf dem „Äquator“ der Kugel. Tatsächlich ist in der unmittelbaren Umgebung dieser Punkte x_3 keine eindeutige Funktion mehr von den Koordinaten x_1 und x_2 .

Allgemein bedeutet die Bedingung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, dass die Fläche durch eine Äquipotentialfläche von f beschrieben wird. $\partial f / \partial x_3 = 0$ bedeutet, dass der Gradient an die entsprechende Äquipotentialfläche (und damit der Normalvektor zur Fläche

selbst) senkrecht zur x_3 -Koordinate steht. Damit kann aber die Fläche an dieser Stelle nicht mehr durch die x_1 - und x_2 -Koordinaten beschrieben werden. Anders ausgedrückt: An solchen Stellen hat die Höhenfunktion $x_3(x_1, x_2)$ die Steigung unendlich.

Ist in einem Gebiet $\partial f / \partial x_3 \neq 0$, kann man die Bedingung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ nach der Koordinate x_3 auflösen und die Fläche in der Form $(u, v, \hat{f}(u, v))$ beschreiben. In den Bereichen, in denen die partielle Ableitung verschwindet, bricht diese Darstellung zusammen. Dort lässt sich die Gleichung aber meist nach einer anderen Koordinate auflösen.

Ganz allgemein beschreiben die Parameter (ob dies bestimmte Koordinaten sind, die man durch Auflösung der restlichen Koordinaten nach diesen Koordinaten erhalten hat, oder auch andere Parameter) eine sogenannte *Karte*. Wenn es für jeden Punkt der Fläche eine geeignete Karte gibt, sodass die Fläche in der Umgebung dieses Punktes frei von Koordinatensingularitäten beschrieben werden kann, so bezeichnet man die Menge dieser Karten auch als einen *Atlas*. Aus der Beschreibung der Kugeloberfläche durch Gl. (8.42) lassen sich beispielsweise sechs besondere Karten finden, und jeder Punkt der Kugeloberfläche liegt in mindestens einer dieser Karten. Diese sechs Karten erhält man, indem man Gl. (8.42) nach jeweils einer der Koordinaten x_i ($i = 1, 2, 3$) auflöst und dann noch die beiden Vorzeichen der Wurzel berücksichtigt. Jede der Karten beschreibt eine Halbkugel.

Auch Kurven bzw. Wege lassen sich durch Bedingungen beschreiben. Beispielsweise erhält man im Allgemeinen eindimensionale Linien, wenn man zwei Flächen schneidet, also zwei Bedingungen an die Koordinaten stellt:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (8.43)$$

Zu einer Parameterdarstellung gelangt man in diesem Fall, indem man beide Bedingungen nach einem Parameter, beispielsweise nach $t = x_1$ auflöst:

$$\gamma(t) = (t, x_2(t), x_3(t)). \quad (8.44)$$

Ganz allgemein beantwortet der *Satz zu impliziten Funktionen* die Frage, wann sich eine d -dimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n durch beispielsweise die ersten d Koordinaten beschreiben lässt:

Satz zu impliziten Funktionen: Es seien $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $i = 1, \dots, n - d$) jeweils einmal stetig ableitbare Funktionen über einem Teilgebiet des \mathbb{R}^n . Weiterhin sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, der den Bedingungen $f_i(x_0) = 0$ ($i = 1, \dots, n - d$) genügt. Falls an der Stelle x_0 die Determinante

$$\left| \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} \quad j = d + 1, d + 2, \dots, n \quad (8.45)$$

nicht verschwindet, dann gibt es eine Umgebung U_0 von x_0 , sodass sich die Bedingungen $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ zu $x_j = x_j(x_1, \dots, x_d)$ auflösen lassen, und

$$x = (u_1, \dots, u_d, x_{d+1}(u_1, \dots, u_d), \dots, x_n(u_1, \dots, u_d)) \quad (8.46)$$

eine lokale Parametrisierung der d -dimensionalen Untermannigfaltigkeit in der Umgebung von $x_0 \in U_0$ darstellt.

Ein Beispiel bilden auch die im nächsten Abschnitt behandelten Kegelschnitte: Hierbei wird ein Doppelkegel mit einer Ebene geschnitten (es geht also um die Schnittmenge von zwei Flächen und somit um spezielle Kurven, die sich alle als Kurven in einer Ebene darstellen lassen).

8.5 Kegelschnitte

Gleichsam als Anwendung einiger der in diesem Kapitel eingeführten Konzepte wollen wir eine wichtige Klasse von Kurven betrachten, die man als *Kegelschnitte* [*conal sections*] bezeichnet. Diese Kurven erhält man als Schnittkurven aus der Mantelfläche eines Doppelkegels im \mathbb{R}^3 mit einer Ebene. Neben den Ellipsen und Hyperbeln erhält man als Grenzfälle noch Kreise und Parabeln (sowie streng genommen noch einzelne Punkte sowie sich schneidende Geraden). Alle diese Kurven können beispielsweise bei der Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld eines anderen Körpers (das so genannte *Kepler-Problem*) auftreten.

Ein Doppelkegel (der Einfachheit halber mit Steigung 1) lässt sich durch folgende Bedingung beschreiben:

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad (8.47)$$

bzw. in der Parameterdarstellung:

$$x(u, v) = u \quad y(u, v) = v \quad z(u, v) = \pm\sqrt{u^2 + v^2}. \quad (8.48)$$

(Wir verwenden hier die Komponentenschreibweise (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3) , da die Indexschreibweise in konkreten Formeln manchmal verwirrend sein kann.) Eine vollkommen andere aber äquivalente Parameterdarstellung wäre die folgende ($r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$):

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi \quad y(r, \varphi) = r \sin \varphi \quad z(r, \varphi) = r. \quad (8.49)$$

Eine beliebige Ebene durch den Nullpunkt können wir durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad a_1x + a_2y + a_3z = 0, \quad (8.50)$$

wobei \vec{a} ein beliebiger (von Null verschiedener) Vektor ist. Die durch obige Gleichung beschriebene Ebene besteht aus allen Vektoren, die auf \vec{a} senkrecht stehen. Soll die

Ebene nicht durch den Nullpunkt sondern durch den Punkt $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ verlaufen, folgt:

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (8.51)$$

Als allgemeine Darstellung einer Ebene erhalten wir somit:

$$a_1x + a_2y + a_3z = b. \quad (8.52)$$

Diese Gleichung ist noch überbestimmt. Sie enthält vier freie Parameter, zur Charakterisierung einer allgemeinen Ebene sind jedoch nur drei Parameter notwendig. Für $b \neq 0$ können wir obige Gleichung noch durch b dividieren und finden, dass eine allgemeine Ebene sogar durch die Bedingung

$$a'_1x + a'_2y + a'_3z = 1 \quad (8.53)$$

beschrieben wird. Ist $b = 0$, geht die Ebene also durch den Nullpunkt, können wir durch ein nicht-verschwindendes a_i dividieren, d.h., einen der Koeffizienten vor x, y oder z normieren.

Wir betrachten zunächst den Fall $a_3 \neq 0$ (das bedeutet, die Ebene liegt nicht parallel zur 3-Achse); dann können wir für die Ebene auch schreiben

$$z = a_1x + a_2y + b. \quad (8.54)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir noch $a_2 = 0$ und schreiben $a_1 = a$:

$$z = ax + b. \quad (8.55)$$

Die Ebene ist in diesem Fall parallel zur 2-Achse. Dies bedeutet keine Einschränkung, da das Problem ohnehin symmetrisch unter Drehungen um die 3-Achse ist.

Einsetzen in die Kegelgleichung (8.47) liefert:

$$x^2 + y^2 = (ax + b)^2, \quad (8.56)$$

bzw.

$$(1 - a^2)x^2 - 2abx + y^2 = b^2. \quad (8.57)$$

Wir haben immer noch zwei Bestimmungsgleichungen: Gleichung 8.55 erlaubt es uns, die Koordinate z durch x auszudrücken, und Gleichung 8.57 erlaubt es uns, y durch x auszudrücken. Wir erhalten also eine Kurve im \mathbb{R}^3 , wobei wir x als Kurvenparameter verwenden. Die Parameterdarstellung $\vec{x}(t)$ dieser Kurve wäre somit:

$$x(t) = t \quad y(t) = \pm\sqrt{b^2 - (1 - a^2)t^2 + 2abt} \quad z(t) = at + b. \quad (8.58)$$

Im Folgenden betrachten wir nur die Projektionen dieser Kurve auf die 1-2-Ebene. An den qualitativen Eigenschaften der Lösungen ändert sich dadurch nichts.

Allgemein können wir folgende Fälle unterscheiden:

1. *Kreise:*

Der Spezialfall $a = 0$ (waagerechte Ebene) führt auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 = b^2. \quad (8.59)$$

Dies ist die Kreisgleichung. Für $b = 0$ erhalten wir als Lösung nur den Punkt $(0, 0, 0)$.

2. *Ellipsen:*

Die Bedingung $a^2 < 1$ führt auf eine Gleichung der Form ($\alpha > 0$):

$$\alpha(x - \gamma)^2 + y^2 = \beta^2. \quad (8.60)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit Zentrum $(\gamma, 0)$.

3. *Parabeln:*

Für $a^2 = 1$ erhalten wir:

$$y^2 = b^2 \pm 2bx. \quad (8.61)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel.

4. *Hyperbeln:* Für $a^2 > 1$ folgt eine Gleichung der Form ($\alpha > 0$):

$$-\alpha(x - \gamma)^2 + y^2 = \beta^2. \quad (8.62)$$

Dies entspricht einer Hyperbelgleichung.

Wir müssen uns nun noch überlegen, welche Gleichung wir für $a_3 = a_2 = 0$ erhalten. In diesem Fall lautet die Gleichung für die Ebene

$$ax = b \quad (8.63)$$

Einsetzen in die Kegelgleichung 8.47 liefert:

$$\frac{b^2}{a^2} + y^2 = z^2 \quad \text{oder} \quad z^2 - y^2 = \gamma^2. \quad (8.64)$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, die sich asymptotisch den Geraden $z = \pm y$ annähert. Für $b = 0$ erhalten wir diese beiden sich schneidenden Geraden als Lösung.

8.6 Koordinatensysteme

Wir haben schon mehrfach erwähnt, dass man die Punkte des \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 nicht nur als Vektoren auffassen kann, die sich bezüglich einer Basis des Vektorraums in Komponenten zerlegen lassen, sondern dass man sie auch allgemeiner durch Koordinaten

beschreiben kann, die mit der Eigenschaft des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 als Vektorraum nichts mehr zu tun haben. Beispielsweise lässt sich die Summe zweier Vektoren im Allgemeinen auch nicht mehr als einfache Summe dieser Koordinaten ausdrücken. Außerdem ist der *Parameterbereich* dieser Koordinaten (der Wertebereich, den diese Koordinaten zur eindeutigen Beschreibung von Punkten annehmen können) nicht immer gleich dem \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 , sondern nur gleich einer Teilmenge.

Strenggenommen fasst man den \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 in diesem Fall nicht mehr als Vektorraum auf, sondern als so genannte Mannigfaltigkeit. Das macht sich oft auch daran bemerkbar, dass die allgemeinen Koordinaten für bestimmte Punkte nicht mehr eindeutig sind oder singulär werden. Wir betrachten zunächst einige bekannte Beispiele für Koordinaten im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

8.6.1 Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2

In zwei Dimensionen können wir einen Punkt durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und den Winkel φ zwischen der Verbindungslinie zum Nullpunkt und der x -Achse beschreiben. Das führt auf die Darstellung eines Punktes in so genannten *Polarkoordinaten*:

$$(x_1, x_2) \simeq (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (8.65)$$

Die Komponenten $\{x_i\}$ lassen sich somit durch r und φ ausdrücken:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad x_2 = r \sin \varphi. \quad (8.66)$$

Diese Bedingungen sind umkehrbar, d.h., r und φ lassen sich durch x^1 und x^2 ausdrücken:

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \quad \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}. \quad (8.67)$$

Der Nullpunkt $(0, 0)$ ist ein singulärer Punkt der Polarkoordinaten, da in diesem Punkt φ nicht eindeutig durch x_i gegeben ist. Streng genommen gelten die Polarkoordinaten also nur für den \mathbb{R}^2 ohne den Punkt $\{(0, 0)\}$.

Die Koordinaten (r, φ) nehmen folgende Werte an: $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Der Parameterbereich $U \in \mathbb{R}^2$ der Koordinaten ist also ein Streifen (Breite 2π) oberhalb der positiven reellen Achse.

8.6.2 Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3

Übertragen wir die Polarkoordinaten des \mathbb{R}^2 auf den \mathbb{R}^3 , erhalten wir *Zylinderkoordinaten*:

$$(x_1, x_2, x_3) \simeq (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z). \quad (8.68)$$

Die alten Koordinaten x_i lassen sich also durch die neuen Koordinaten ausdrücken:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad x_2 = r \sin \varphi \quad x_3 = z, \quad (8.69)$$

ebenso lassen sich die neuen Koordinaten durch die alten Koordinaten ausdrücken:

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \quad \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1} \quad z = x_3. \quad (8.70)$$

Die Zylinderkoordinaten sind eindeutig sofern $r \neq 0$, also außer auf der z -Achse, wo der Winkel φ nicht festliegt.

Der Parameterbereich für r und φ ist gleich ihrem Bereich für Polarkoordinaten, z kann beliebige reelle Werte annehmen.

8.6.3 Kugelkoordinaten

Wie schon mehrfach erwähnt, lässt sich ein Punkt im \mathbb{R}^3 auch durch seinen Abstand r vom Ursprung sowie zwei Winkel charakterisieren. Der Winkel θ entspricht dem Winkel zwischen der Verbindungslinie des Punkts zum Ursprung und der z -Achse, und der Winkel φ entspricht dem Winkel zwischen der Projektion dieser Verbindungslinie auf die xy -Ebene und der x -Achse. Dann gilt:

$$(x_1, x_2, x_3) \simeq (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta). \quad (8.71)$$

Auch diese Beziehungen lassen sich umkehren:

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2} \quad \varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1} \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}}{x_3}. \quad (8.72)$$

Beide Winkel sind für $r = 0$ nicht definiert. Außerdem ist φ nicht definiert für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$. Damit sind Kugelkoordinaten auf der gesamten z -Achse nicht wohl definiert.

Die Definitionsbereiche für die Parameter sind: $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$.

8.6.4 Allgemeine Koordinatentransformationen

Eine Koordinatentransformation auf dem \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass sich jeder Punkt $p \simeq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ durch die Koordinaten (u_1, u_2, \dots, u_n) ausdrücken lässt. Es gilt somit:

$$\vec{x} \simeq (x_1, x_2, \dots, x_n) \simeq (x_1(u_1, u_2, \dots, u_n), x_2(u_1, u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, u_2, \dots, u_n)). \quad (8.73)$$

Jede Komponente x_i ist also eine Funktion der Koordinaten $\{u_i\}$:

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (8.74)$$

Umgekehrt soll sich auch jede Koordinate u_i als Funktion der $\{x_i\}$ schreiben lassen:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8.75)$$

Eine Koordinatentransformation soll also bijektiv sein und daher eine eindeutige inverse Abbildung besitzen. Punkte, an denen dies nicht möglich ist, bezeichnet man als singuläre Punkte der Koordinatentransformation. In vielen Fällen wird man nur einen bestimmten Ausschnitt des \mathbb{R}^n (beispielsweise den \mathbb{R}^n ohne gewisse Punkte, Linien oder Flächen) durch die neuen Koordinaten eindeutig ausdrücken können. Die folgenden Überlegungen gelten immer nur für reguläre Punkte p , in deren Umgebung das Koordinatensystem frei von Singularitäten ist.

In jedem regulären Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ schneiden sich n Kurven γ_i , die man erhält, indem man die Koordinaten $\{u_j\}$ ($j \neq i$) festhält und $\vec{x}(u_i)$ nur noch als Funktion des einen Parameters u_i auffasst. Zu jeder dieser Kurven können wir im Punkte p den Tangentialvektor bilden:

$$\vec{f}_i(p) = \frac{\partial \vec{x}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i}. \quad (8.76)$$

In regulären Punkten p sind diese n Vektoren von null verschieden und linear unabhängig. Sie spannen also einen n -dimensionalen Vektorraum auf. Nach den Überlegungen der vorherigen Abschnitte handelt es sich bei diesem Vektorraum strenggenommen um den Tangentialraum im Punkte p . Es ist der „Raum der Geschwindigkeiten“, mit denen der Punkt p durchlaufen werden kann.

Wir verwenden in der Newton'schen Mechanik gerne den Raum \mathbb{R}^n als den Raum der möglichen Lagen von Punkten. Dabei haben wir willkürlich einen Ursprung (der dem Nullvektor entspricht) festgelegt. Einen flachen Raum ohne Auszeichnung eines Nullpunkts bezeichnet man als affinen euklidischen Raum.

Dieser ist natürlich verschieden von dem Vektorraum \mathbb{R}^n , der an jedem Punkt p als Tangentialraum (Raum der Geschwindigkeiten) konstruiert werden kann. Auch wenn eine Identifikation oft vorgenommen wird, sollte man sich der Unterscheidung bewusst sein. Die Physik ist in diesem Fall übrigens „genauer“ als die Mathematik: Während die Koordinaten von Raumpunkten meist die Dimension einer Länge haben, haben Geschwindigkeiten die Dimension [Länge/Zeit]. Die beiden Konzepte werden daher deutlicher unterschieden.

Kapitel 9

Mehrfachintegrale

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Integralen über Kurven, Flächen und allgemeinen Räumen. Ziel sind die Integralsätze von Stokes und Gauß. Streng genommen ist hierzu in der Analysis eine Einführung in die Maßtheorie notwendig, die ich jedoch auf ein Minimum reduzieren werde. Infinitesimale Flächen- und Volumenelemente lassen sich auch aus einer gewissen Anschauung heraus erklären, und die teilweise sehr aufwendigen mathematischen Sätze in diesem Zusammenhang können wir hier ohnehin nicht beweisen. Trotzdem sollen im ersten Abschnitt einige Grundlagen behandelt werden, insbesondere auch, weil im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie solche Konzepte von Relevanz werden.

9.1 Elementare Einführung in die Maßtheorie

9.1.1 Messbare Mengen – σ -Algebren

Bei der Definition des Integrals haben wir einem Intervall $[a, b]$ ($b \geq a$) ein *Maß* [*measure*] zugeordnet, nämlich seine Länge: $\Delta([a, b]) = b - a$. Dieses Konzept soll im Folgenden auf mehrdimensionale Räume verallgemeinert werden. Die erste Frage, die sich dabei ergibt, ist, welchen Mengen man überhaupt ein Maß zuschreiben kann. Viele der Erörterungen aus diesem Abschnitt stammen aus [14].

Wir können im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitstheorie die Problematik verdeutlichen: Gegeben sei eine Dartscheibe und wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Gebiet auf der Dartscheibe zu treffen. (Wir gehen von einem ungeübten Dartspieler aus, der zwar die Scheibe immer trifft, ansonsten aber gleichverteilt wirft). Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten (mathematischen) Punkt (x, y) zu treffen, muss gleich null sein, denn andernfalls wäre die Wahrscheinlichkeit, irgendeinen der überabzählbar vielen Punkte der Dartscheibe zu treffen, unendlich. Aber ist es sinnvoll, jeder beliebigen Teilmenge der Dartscheibe eine Wahrscheinlich-

keit zuzuschreiben, diese Menge „zu treffen“?

Es zeigt sich, dass es Mengen gibt, denen man kein Maß zuschreiben kann (auch nicht das Maß null). Ein Beispiel ist die Menge der Äquivalenzklassen von reellen Zahlen modulo rationalen Zahlen (zwei reelle Zahlen sind in diesem Fall äquivalent, wenn ihre Differenz eine rationale Zahl ist). Um solche Mengen ausschließen zu können, definiert man zunächst die „Menge der messbaren Mengen“.

Zur Definition von Mengen, denen man sinnvollerweise ein Maß zuschreiben kann (eventuell natürlich auch das Maß 0 oder auch das Maß ∞), definieren wir zunächst eine sogenannte σ -Algebra (gesprochen „Sigma-Algebra“).

Definition: Eine σ -Algebra einer Menge Ω ist eine Menge Σ von Teilmengen aus Ω (also $\Sigma \subset P(\Omega)$), sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die leere Menge ist Element von Σ : $\emptyset \in \Sigma$.
2. Zu jedem Element $A \in \Sigma$ ist auch das Komplement von A (als Teilmenge von Ω) Element von Σ : $A \in \Sigma \Rightarrow (\Omega - A) \in \Sigma$.
3. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare (bzw. abzählbar unendliche) Folge von Elementen aus Σ , dann ist auch deren Vereinigung in Σ :

$$A_n \in \Sigma \implies \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \in \Sigma. \quad (9.1)$$

Aus diesen Axiomen folgt sofort, dass auch die Menge Ω selbst ein Element von Σ ist: $\Omega \in \Sigma$. Von je zwei Elementen $A, B \in \Sigma$ ist auch deren Durchschnitt in Σ , da der Durchschnitt gleich dem Komplement der Vereinigung der Komplemente von A und B ist: $A \cap B = \Omega - (\Omega - A) \cup (\Omega - B)$. Dasselbe gilt für jede abzählbar unendliche Schnittmenge von Elementen aus Σ : Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbar (unendliche) Folge von Elementen aus Σ , dann ist auch $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A_n = (\Omega - B_n)$ eine abzählbar (unendliche) Folge von Elementen aus Σ , deren Vereinigung ist ebenfalls in Σ , und das Komplement dieser Vereinigung ist die Schnittmenge der (B_n) . Und natürlich sind auch Komplemente von zwei Elementen A und B , z.B. $A - B$, wieder in Σ .

Dadurch, dass auch Komplemente eines Elements von Σ wieder in Σ sind, sind σ -Algebren allgemeiner als Topologien, obwohl die beiden Definitionen (vgl. 3.7) sehr ähnlich sind. Falls Ω auch ein topologischer Raum ist (beispielsweise \mathbb{R}^n oder jeder metrische Raum), bezeichnet man die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen enthält, als *Borel-Algebra*. Eine Menge Ω mit einer σ -Algebra bezeichnet man als *messbaren Raum*, die Elemente von Σ nennt man *messbare Mengen*, und falls Ω eine Topologie hat und die σ -Algebra die Borel-Algebra ist, bezeichnet man die Teilmengen von Ω , die Elemente von Σ sind, als *Borel-messbar*.

Falls (Y, Σ') ein messbarer Raum ist und $f : \Omega \rightarrow Y$ eine Abbildung, sodass alle Urbilder von Elementen aus Σ' ebenfalls messbar sind (also $f^{-1}(S) \in \Sigma$ für alle $S \in \Sigma'$), dann bezeichnet man f als *messbar*. Falls (Ω, Σ) ein messbarer Raum ist und (M, T) ein topologischer Raum (vgl. 3.7), dann bezeichnet man eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow M$ auch als messbar, wenn das Urbild von jeder offenen Menge messbar ist. Ist Y ein topologischer Raum und Σ' die Borel-Algebra zu der definierten Topologie, sind die beiden Definitionen äquivalent.

9.1.2 Maße

Bisher haben wir nur definiert, welche Mengen wir als messbar bezeichnen wollen (nämlich die Elemente einer σ -Algebra). Nun definieren wir ein (positives) *Maß* für solche Mengen. Dabei lassen wir auch explizit das Maß ∞ (beispielsweise für die gesamte reelle Achse) zu. Wir bezeichnen mit $[0, \infty]$ die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen einschließlich des „Elements“ ∞ .

Definition: Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum mit der σ -Algebra Σ , dann bezeichnet eine Abbildung $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ ein (positives) Maß auf Ω , wenn gilt:

M1: $\mu(\emptyset) = 0$,

M2: Für jede abzählbare (oder abzählbar unendliche) Folge $\{A_n\}$ von Elementen aus Σ , die paarweise disjunkt sind (also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$), gilt

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad (9.2)$$

(Bei endlichen Folgen erstreckt sich die Vereinigung bzw. die Summe entsprechend nur über endlich viele Mengen bzw. Terme.)

Aus dieser Definition folgt unmittelbar: Sei $A \subset B$ (beides Elemente aus Σ) gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$. Beweis: B lässt sich als Vereinigung der beiden disjunkten Mengen A und $B - A$ schreiben und das Maß einer messbaren Menge kann nicht negativ sein.

Manchmal möchte man Aussagen über Ω treffen, die „fast überall“ [*almost everywhere*] gelten. Damit ist gemeint, dass die Punkte $z \in \Omega$, bei denen die Aussage falsch ist, eine Menge vom Maß null bilden. Beispielsweise können wir sagen, dass eine Funktion über Ω „fast überall“ verschwindet. Das bedeutet, die Menge $\{z \in \Omega | f(z) \neq 0\}$ hat das Maß null, oder $\mu(\{z \in \Omega | f(z) \neq 0\}) = 0$.

9.1.3 Wahrscheinlichkeitsmaße

Erfüllt ein Maß zusätzlich noch die Eigenschaft

M3: $\mu(\Omega) = 1$,

so bezeichnet man das Maß als *normiert* [*normalized*]. Den Raum (Ω, Σ, μ) nennt man einen *Wahrscheinlichkeitsraum* [*probability space*]. Ω ist der Raum der *Elementarereignisse* [*elementary events*], Σ die Menge der möglichen *Ereignisse* [*events*], denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann, und μ ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion [*probability function*].

Man beachte hier, dass Ereignisse auch Mengen von Elementarereignissen sein können. Beispielsweise spricht man von einem Ereignis, wenn bei einem Dartwurf ein bestimmtes Feld (das aus unendlich vielen Punkten besteht und damit die Vereinigung unendlich vieler Elementarereignisse ist) getroffen wird, oder wenn bei einem Wurf mit zwei Würfeln die Gesamtaugenanzahl 7 erreicht wird. Bei diskreten (und erst recht bei endlichen) Mengen Ω sind Ereignisse beliebige Elemente der Potenzmenge, also $\Sigma = P(\Omega)$.

Eine Abbildung von $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $X^{-1}(U)$ für jede offene Menge $U \in \mathbb{R}$ messbar ist (also ein Element von Σ), bezeichnet man als *Zufallsvariable* [*random variable*]. Jede Zufallsvariable definiert eine *Verteilungsfunktion* auf den reellen Zahlen:

$$P_X(x) = \mu(X^{-1}[-\infty, x]) = \mu(\{a \in \Omega | X(a) \leq x\}). \quad (9.3)$$

Der reellen Variablen x wird also das Maß der Menge von Elementen aus Ω zugeordnet, die unter der Abbildung X auf Werte kleiner oder gleich x abgebildet werden. $P_X(x)$ ist eine monoton steigende Funktion, die für $x \rightarrow -\infty$ gegen den Wert 0 und für $x \rightarrow +\infty$ gegen den Wert 1 geht. Die Ableitung von $P_X(x)$ nach x definiert eine *Wahrscheinlichkeitsdichte* [*probability density*] zu der Zufallsvariablen X .

$$w_X(x) = \frac{dP_X(x)}{dx}. \quad (9.4)$$

9.1.4 Integrale

Zur Definition eines Integrals über eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (oder auch \mathbb{C}) betrachten wir zunächst sogenannte *Treppenfunktionen* [*step functions*]. (Allgemein kann das Bild von f ein beliebiger Banach-Raum sein, also ein normierter, bezüglich der Norm vollständiger Vektorraum, siehe S. 56, wir schränken uns hier jedoch auf reellwertige bzw. komplexwertige Funktionen ein.)

Eine Funktion $f_T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion über Ω , wenn die Bildmenge von f_T nur endlich viele Werte $x_i \in \mathbb{R}$ umfasst (bzw. die Urbilder $f_T^{-1}(x)$ für alle außer endlich vielen Werten von x die leere Menge bilden), und $f_T^{-1}(x_i) = A_i$ eine messbare Menge in Ω ist. Die (endliche) Menge dieser Urbilder, $\{A_i\}$, besteht aus disjunkten Elementen ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$) und $\bigcup_i A_i = \Omega$. Eine solche Menge von

Teilmengen bezeichnet man auch als eine (endliche) *Partition* von Ω . Für eine solche Treppenfunktion f_T definieren wir

$$\int_{\Omega} f_T d\mu = \sum_i f_T(A_i)\mu(A_i). \quad (9.5)$$

Man beachte, dass f_T auf der Menge A_i einen konstanten Wert annimmt, insofern ist $f_T(A_i) = x_i$ wohl definiert. Falls die Funktion f_T nur auf einer Teilmenge von Ω definiert sein sollte, kann man alle folgenden Überlegungen natürlich auf diese Teilmenge einschränken.

Zu einer beliebigen stückweise stetigen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kann man immer eine Folge aus Treppenfunktionen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ finden, die fast überall gleichmäßig auf Ω gegen f konvergiert. Von zwei solchen Folgen (f_n) und (g_n) , die fast überall gegen dieselbe Funktion konvergieren, ist $|f_n - g_n|$ eine Folge, die fast überall gegen 0 konvergiert. Daher bilden die Integrale über $|f_n - g_n|$ eine Nullfolge und man kann zeigen, dass die Integrale über (f_n) und (g_n) gegen denselben Wert konvergieren. Diesen Wert bezeichnet man als das Integral über f :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu. \quad (9.6)$$

Oftmals schreiben wir für die linke Seite auch

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x). \quad (9.7)$$

Vergleicht man die genannten Schritte nochmals mit der Definition des einfachen Integrals (Abschnitt 6.1), sieht man, dass die allgemeine Maßtheorie eine Verallgemeinerung der einfachen Definition des Integrals erlaubt.

9.1.5 Mehrfachintegrale - Der Satz von Fubini

Im Allgemeinen werden wir in höheren Dimensionen das *Quadermaß* verwenden (es sei $b_i \geq a_i$):

$$\mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n \Delta x_i \quad (9.8)$$

mit $\Delta x_i = b_i - a_i$. Das Maß verschwindet, wenn eines (oder mehrere) der Intervalle zu einem Punkt degeneriert (also $a_i = b_i$). Daher spielt es auch keine Rolle, ob wir einige (oder alle) der oberen bzw. unteren Grenzen der Intervalle durch offene Abschlüsse ersetzen; die Maße bleiben dieselben.

Das Quadermaß ist ein Beispiel für ein sogenanntes *Produktmaß* [*product measure*]. Es seien Ω_1 und Ω_2 zwei Räume mit den jeweiligen σ -Algebren Σ_1 und Σ_2 und es gebe Maße $\mu_1 : \Sigma_1 \rightarrow [0, \infty]$ und $\mu_2 : \Sigma_2 \rightarrow [0, \infty]$. Dann können wir auf $\Omega_{\text{ges}} = \Omega_1 \times \Omega_2$

eine σ -Algebra definieren, indem wir $\Sigma_{\text{ges}} = \{(A_1, A_2)\}$ mit $A_i \in \Sigma_i$ setzen. Auf Σ_{ges} definieren wir dann das Produktmaß:

$$\mu_{\text{ges}}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2. \quad (9.9)$$

Wir betrachten nun eine Funktion (der Einfachheit halber wählen wir wieder die reellen Zahlen als Zielmenge)

$$f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (9.10)$$

Es gilt der *Satz von Fubini*: Falls f bezüglich des Produktmaßes auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ integrierbar ist (und das Integral über $|f|$ endlich), dann ist auch $f(\cdot, y) : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ für fast alle $y \in \Omega_2$ bezüglich μ_1 integrierbar,¹ und ebenso ist $f(x, \cdot) : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ für fast alle $x \in \Omega_1$ bezüglich μ_2 integrierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) \, d\mu_{\text{ges}}(x, y) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) \, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Beim Satz von Fubini wird vorausgesetzt, dass f bezüglich des Produktmaßes auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ integrierbar ist, dann spielt die Reihenfolge der Integrationen keine Rolle. Eine Verallgemeinerung ist der *Satz von Tonelli*: Falls eines der beiden Integrale auf der rechten Seite von Gl. 9.11 für $|f|$ existiert, existiert auch das andere Integral für $|f|$ und für f gilt obige Gleichung.

In dem hier betrachteten Fall sind die Integrationen über Ω_1 und Ω_2 unabhängig. In vielen praktischen Beispielen ist das nicht der Fall. Insbesondere gilt dies bei kartesischen Koordinatensystemen nur, wenn die Integration insgesamt über einen Quader erfolgt. Hängen hingegen die Integrationsgrenzen für eine Variable von der anderen Variablen ab, gilt die Vertauschbarkeit der Integrale natürlich nicht mehr. Dies ist ein Grund, weshalb man in solchen Fällen oftmals zu anderen Koordinatensystemen übergeht, bezüglich derer die Integrationsgrenzen unabhängig werden.

9.1.6 Beispiele für Maße

In diesem Abschnitt sollen einige Beispiele für bekannte Maße angegeben werden.

Die Gauß-Verteilung

Wir hatten in Abschnitt 9.1.3 angegeben, wie man von einer Zufallsvariablen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ) zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte

¹Zur Notation: $f(\cdot, y)$ bezeichnet die Abbildung f bei festgehaltenem Argument $y \in \Omega_2$, die somit zu einer Abbildung auf Ω_1 wird; entsprechend ist $f(x, \cdot)$ bei festgehaltenem $x \in \Omega_1$ als Abbildung auf Ω_2 zu verstehen.

$w_X(x)$ gelangt. Während μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über der (abstrakten) Menge Ω ist, handelt es sich bei $w_X(x)$ um eine Wahrscheinlichkeitsdichte über den reellen Zahlen und das zugehörige Maß ist:

$$dP_X(x) = w_X(x) dx. \quad (9.12)$$

Eine bekannte Wahrscheinlichkeitsdichte ist die *Gauß-Verteilung* [*Gaussian distribution*] (auch *Normalverteilung* [*normal distribution*]):

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right). \quad (9.13)$$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1. \quad (9.14)$$

Die beiden Parameter \bar{x} (der *Mittelwert* [*mean value*] der Verteilung) und σ^2 (die *Varianz* [*variance*]) legen die Gauß-Verteilung eindeutig fest. Den Parameter σ bezeichnet man auch als die *Standardabweichung* [*standard deviation*] der Gauß-Verteilung.

Die mehrdimensionale Gauß-Verteilung hat die Form

$$w(x_1, \dots, x_n) = \frac{(\det A)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i) A_{ij} (x_j - \bar{x}_j)\right), \quad (9.15)$$

und das zugehörige Maß ist

$$dP_{\text{Gauss}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{(\det A)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i) A_{ij} (x_j - \bar{x}_j)\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (9.16)$$

Wie bei allen Wahrscheinlichkeitsdichten erhält man die Erwartungswerte [*expectation values*] von einer Funktion der Zufallsvariablen $f(x)$ durch

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x) dx, \quad (9.17)$$

speziell den Mittelwert und die Varianz:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x w(x) dx \quad \sigma^2 = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x})^2 w(x) dx. \quad (9.18)$$

Die Gleichverteilung über einem Intervall

In vielen Computersprachen werden sogenannte *Pseudo-Zufallszahlgeneratoren* angeboten. Da es sich in Wirklichkeit um einen vordefinierten Algorithmus handelt, sind die Zahlen nicht in irgendeinem Sinne „wirklich“ zufällig; dies ist der Grund für das

Präfix „Pseudo“. Oft liefert dieser Zufallszahlgenerator gleichverteilte Zahlen im Intervall $(0, 1]$. Das bedeutet jede Zahl in diesem Intervall (bei den Algorithmen handelt es sich immer um endlich viele Möglichkeiten, da die Rechengenauigkeit endlich ist) hat dieselbe Wahrscheinlichkeit.

In unserem obigen Formalismus würde man die Situation durch folgende Wahrscheinlichkeitsdichte beschreiben:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, 1] \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases} . \quad (9.19)$$

Das zugehörige Integrationsmaß ist $w(x) dx$. Die Verteilungsfunktion $P(x)$ (die manchmal auch *kumulative Wahrscheinlichkeit* genannt wird), hat die Form:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \in (0, 1] \\ 1 & x > 1 \end{cases} . \quad (9.20)$$

Das Dirac-Maß

Das Dirac-Maß spielt in der Physik eine besondere Rolle, wenn man den idealisierten Fall einer *Punktladung* oder *Punktmasse* beschreiben möchte. Ganz allgemein kann man (kontinuierliche) Ladungs- und Masseverteilungen durch eine Dichtefunktion $\rho_q(x)$ oder $\rho_m(x)$ darstellen, wobei x beispielsweise einen Punkt im \mathbb{R}^3 darstellt. Die Gesamtladung Q bzw. Gesamtmasse M ist dann

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_q(x) d^3x \quad , \quad M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_m(x) d^3x . \quad (9.21)$$

Im Idealfall einer Punktladung bzw. Punktmasse würde der Träger von $\rho(x)$ zu einem Punkt (z.B. x_0) schrumpfen, das Integral über diesen Punkt sollte aber immer noch die Ladung bzw. Masse ergeben. Das ist mit den üblichen Maßen (dargestellt durch Verteilungsfunktionen) nicht möglich. Für einen vorgegebenen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ist das *Dirac-Maß* definiert als (für alle $A \subset \mathbb{R}^3$ messbar):

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (9.22)$$

Das Integral über eine (stückweise stetige) Funktion $f(x)$ ist in diesem Fall einfach $f(x_0)$. Statt μ_{x_0} schreibt man manchmal auch $\delta(x - x_0) dx$. Man beachte jedoch, dass $\delta(x)$ keine gewöhnliche Funktion ist, sondern nur durch das Integral definiert werden kann. Eine punktförmige Ladungs- bzw. Massenverteilung würde dann durch $Q\delta(x - x_0)$ bzw. $M\delta(x - x_0)$ beschrieben.

Eine kurze Zusatzbemerkung zur δ -Funktion (das Thema wird in der Elektrodynamik ausgiebiger behandelt). Betrachten wir eine Funktion

$$\Delta_\epsilon(x - x_0) = \begin{cases} 0 & |x - x_0| > \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & |x - x_0| \leq \epsilon \end{cases}. \quad (9.23)$$

Diese Funktion beschreibt ein Rechteck mit Grundseite 2ϵ und Höhe $1/2\epsilon$ (also der Fläche 1). Sei nun eine (glatte) Funktion $f(x)$ gegeben, die in der Nähe von x_0 durch ihre Taylor-Reihe angenähert werden kann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (9.24)$$

dann ist das Integral über das Produkt von $f(x)$ mit der Rechteckfunktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Delta_\epsilon(x) dx = f(x_0) + \frac{4}{3}f''(x_0)\epsilon^2 + \dots \quad (9.25)$$

Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir also $f(x_0)$. Dieser Grenzwert lässt sich zwar für die Folge von Integralen bilden, nicht aber für die Rechteckfunktion $\Delta_\epsilon(x - x_0)$. Der Grenzwert wäre zwar 0 an allen Stellen $x \neq x_0$, doch an der Stelle x_0 ist er nicht definiert. Man kann sich $\delta(x - x_0)$ als den Grenzwert dieser Folge vorstellen, allerdings sollte man es immer als Grenzwerte der Integrale und nicht als Grenzwert der Funktionen interpretieren.

Das Dirac-Maß tritt auch auf, wenn man den hier eingeführten Formalismus auf diskrete (beispielsweise endliche) Mengen Ω anwenden möchte. Sei Ω beispielsweise die Menge der Elementarereignisse bei einem Wurf mit einem normalen Würfel. Ein Elementarereignis wäre somit eine bestimmte Augenzahl. Alle Elementarereignisse sollen gleich wahrscheinlich sein (mit Wahrscheinlichkeit $1/6$). Als Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir nun die Augenzahl selbst. Dann ist $P_X(x)$ eine Treppenfunktion, die für alle $x < 1$ den Wert 0 hat, bei $x = 1$ auf den Wert $1/6$ springt, bei $x = 2$ auf den Wert $2/6$ usw. bis sie schließlich bei $x = 6$ den Wert 1 annimmt (es wird mit Sicherheit eine Zahl kleiner oder gleich 6 gewürfelt). Diesen Wert behält sie für alle Werte $x > 6$.

Was ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $w_X(x)$? Formal war dies die Ableitung von $P_X(x)$ (Gl. 9.4). Da umgekehrt $P_X(x)$ durch das Integral über $w_X(x)$ von $-\infty$ bis x gegeben ist, sollte dieses Integral an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ jeweils um den Wert $1/6$ wachsen. Mit der δ -Funktion kann man dies in der Form

$$d\mu(x) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^6 \delta(x - n) dx \quad (9.26)$$

schreiben. Das Beispiel macht auch deutlich, dass man im Zusammenhang mit der Maßtheorie (oder der Theorie verallgemeinerter Funktionen) für die Ableitung einer Funktion, die an einer Stelle einen Sprung um Δf macht, an dieser Stelle die δ -Funktion (mit Faktor Δf) erhält.

Maße in Parameterräumen

Da wir uns in den kommenden Abschnitten ausführlich mit Integralen über parametrisierte Räume beschäftigen werden, soll hier nur ein kurzer Abriss der Idee erfolgen. Oftmals ist es sinnvoll, allgemeine Flächen oder Räume durch andere Koordinaten als kartesische Koordinatensysteme zu beschreiben. Im Zusammenhang mit Integralen ist dies besonders dann angebracht, wenn durch die neuen Koordinaten die Integrationsgrenzen unabhängig voneinander werden (im Parametergebiet also über einen verallgemeinerten Quader integriert wird). Allerdings muss man einem Quader im Parametergebiet nun das Volumen des Gebietes zuordnen, das durch diesen Quader beschrieben wird.

Als Beispiel betrachten wir Polarkoordinaten in der Ebene. Möchte man beispielsweise über eine Kreisfläche integrieren, wird das Integral über die x - und y -Koordinate (also Integral in der xy -Ebene) wegen der krummlinigen Integrationsgrenzen recht kompliziert. Beschreibt man jedoch jeden Punkt in der Ebene durch seinen Abstand r vom Ursprung und seinen Winkel φ relativ zur positiven x -Achse (entgegen dem Uhrzeigersinn), wird die Integration über die Kreisfläche zu einer Integration über den Quader $[0, r] \times [0, 2\pi)$.

Das Flächenelement im Parameterraum $dr d\varphi$ entspricht jedoch nicht der Fläche des durch die Parameter $r \in [r, r + dr]$ und $\varphi \in [\varphi, \varphi + d\varphi]$ beschriebenen Gebiets. Statt dessen sieht man leicht, dass die Fläche durch

$$d\mu(r, \varphi) = r dr d\varphi \quad (9.27)$$

beschrieben wird. Dies wäre das Integrationsmaß in Polarkoordinaten. Die allgemeine Konstruktion solcher Maße in Parameterräumen wird in den folgenden Abschnitten beschrieben.

9.2 Kurvenintegrale

Kurvenintegrale lassen sich grundsätzlich sowohl über skalare Felder als auch Vektorfelder ausführen. Dabei sind (etwas vereinfacht ausgedrückt) Skalarfelder einkomponentige Felder, deren Funktionswert sich bei einem Koordinatenwechsel des Raums, über dem die Felder definiert sind, nicht ändert. Ein Vektorfeld besitzt mehrere Komponenten, die sich bei einem Koordinatenwechsel ebenso wie die Komponenten eines Vektors transformieren (siehe auch Abschnitt 10.1).

Beim Kurvenintegral über Vektorfelder interessiert besonders der Fall, bei dem die Komponente des Vektorfelds in Tangentialrichtung aufintegriert wird. Dies ist beispielsweise bei der Berechnung der Arbeit der Fall.

9.2.1 Die Bogenlänge

Als einfachstes Beispiel für eine Kurvenintegration über ein Skalarfeld betrachten wir zunächst die Bogenlänge [*arc length*] einer Kurve. Das Skalarfeld ist in diesem Fall identisch 1.

Gegeben sei eine Kurve $\gamma \simeq \vec{x}(t)$ in ihrer Parameterdarstellung. Wir wollen die Länge der Kurve zwischen zwei Punkten $\vec{x}(t_0)$ und $\vec{x}(t_1)$ bestimmen. Für zwei infinitesimal benachbarte Punkte $\vec{x}(t + dt)$ und $\vec{x}(t)$ auf der Kurve gilt:

$$\Delta \vec{s} = (\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)) = \frac{d\vec{x}}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2), \quad (9.28)$$

bzw.

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{x}}{dt} dt. \quad (9.29)$$

Für den Betrag dieses Elements folgt:

$$ds = \sqrt{d\vec{s} \cdot d\vec{s}} = \sqrt{\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}} dt. \quad (9.30)$$

Die Bogenlänge ergibt sich aus der Integration über die Bogenlängenelemente:

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right| dt. \quad (9.31)$$

Nun handelt es sich um ein gewöhnliches Integral über das Argument t . Das Maß für eine Integration entlang der Kurve $x(t)$ über den Parameter t ist somit $d\mu(t) = \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt$.

Für die Bogenlängenparametrisierung ist der Betrag des Tangentialvektors eins und man erkennt, dass die Länge der Kurve genau der Differenz im Kurvenparameter entspricht. Daher auch die Bezeichnung *Bogenlängenparametrisierung*.

Beispiel: Eine Funktion $f(x)$ lässt sich auch als Graph (d.h., als Kurve) in der xy -Ebene darstellen: $y = f(x)$. Wählen wir x als den Parameter dieser Kurve, so können wir in der Parameterdarstellung für diesen Graph auch schreiben:

$$\vec{x}(t) = (t, f(t)). \quad (9.32)$$

Damit folgt für das Bogenlängenelement:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{1 + f'(t)^2} dt. \quad (9.33)$$

Die Länge der Kurve ergibt sich somit zu:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt. \quad (9.34)$$

Dieses Ergebnis hatten wir schon in Kapitel 6.3.2 abgeleitet.

9.2.2 Kurvenintegration über skalare Felder

Wir betrachten nun ein skalares Feld $U(\vec{x})$ über dem \mathbb{R}^3 und eine Kurve γ in der Parameterdarstellung $\gamma(t) = \vec{x}(t)$. Für die Integration folgt:

$$I = \int_{\gamma} \Phi(\vec{x}) \, ds = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\vec{x}(t)) \left| \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right| dt. \quad (9.35)$$

Dieses Integral entspricht wiederum einem gewöhnlichen Integral über den Kurvenparameter t .

9.2.3 Berechnung der Arbeit

Auch die Arbeit hatten wir schon als Kurvenintegral dargestellt (Abschnitt 6.3.1).

$$W = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (9.36)$$

Ist der Weg γ durch eine allgemeine Kurvenparametrisierung gegeben, so können wir wieder

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt \quad (9.37)$$

schreiben und erhalten:

$$W = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right] dt. \quad (9.38)$$

9.2.4 Integration über Gradientenfelder

Viele Kräfte lassen sich als sogenannte *Gradientenfelder* schreiben, d.h., es gibt ein Potenzial $U(\vec{x})$, dessen (negativer) Gradient gleich der Kraft \vec{F} ist. In diesem Fall erhalten wir für die Arbeit:

$$W = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\vec{\nabla} U(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right] dt. \quad (9.39)$$

Da jedoch

$$\frac{dU(\vec{x}(t))}{dt} = \vec{\nabla} U(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}, \quad (9.40)$$

folgt:

$$W = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dU(\vec{x}(t))}{dt} dt = U(\vec{x}(t_0)) - U(\vec{x}(t_1)). \quad (9.41)$$

Ist die Kraft also ein Gradientenfeld, hängt die Arbeit, die bei einer Verschiebung gegen diese Kraft geleistet werden muss, nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.

Es gilt aber auch der umgekehrte Sachverhalt: Sei $\vec{F}(\vec{x})$ ein Vektorfeld, für das jedes Wegintegral unabhängig von der Form des Weges nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt; dann ist \vec{F} ein Gradientenfeld. Das zugehörige skalare Feld (das Potenzial) lässt sich explizit über ein Wegintegral konstruieren:

$$U(\vec{x}) = - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = - \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt . \quad (9.42)$$

Hierbei beschreibt $x(t)$ einen (beliebigen) Weg, der bei $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ beginnt und bei $\vec{x} = \vec{x}(t_1)$ endet. U ist bis auf eine Integrationskonstante (die durch die Wahl des Anfangspunktes des Weges festgelegt werden kann) eindeutig.

Damit erhebt sich die Frage, wie man für ein gegebenes Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ entscheiden kann, ob es sich als ein Gradientenfeld $\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(\vec{x})$ schreiben lässt. Zu zeigen wäre, dass Wegintegrale nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen, also vom Weg selbst unabhängig sind, oder aber, dass alle Integrale entlang geschlossener Wege verschwinden. Dieser Beweis ist im Allgemeinen recht schwierig. Wir hatten jedoch schon gezeigt (Abschnitt 5.4.3), dass die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0 . \quad (9.43)$$

Lässt sich also ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ als Gradientenfeld schreiben, verschwindet die Rotation dieses Kraftfeldes. In einem einfach wegzusammenhängenden Raumgebiet (siehe Abschnitt 9.3.4) gilt auch das Umgekehrte: Jedes Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, lässt sich als Gradientenfeld schreiben. Für jedes rotationsfreie Kraftfeld in einem einfach wegzusammenhängenden Raumgebiet verschwindet das Integral über geschlossene Wege.

9.3 Flächenintegrale und Stokes'scher Satz

9.3.1 Flächenelement und Flächenintegral im \mathbb{R}^3

Es soll nun beschrieben werden, wie man ein Skalarfeld bzw. ein Vektorfeld über eine Fläche \mathcal{F} integriert. Die Fläche \mathcal{F} sei durch eine Parameterdarstellung definiert: $(u, v) \ni U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Das Bild dieser Abbildung beschreibt gerade die Fläche. Der Einfachheit halber sei der Wertebereich U von (u, v) das Quadrat $0 \leq u, v \leq 1$. Das ist keine wesentliche Einschränkung (allerdings sollte der Parameterbereich für die Fläche ein Rechteck darstellen).

Als nächsten Schritt benötigen wir ein Maß auf der Fläche. Ähnlich wie schon beim Tangentialvektor entlang einer Kurve sollte dieses Flächenelement auch die Orientierung der Fläche an einem Punkt beschreiben, sodass man beispielsweise über den Fluss eines Vektorfeldes durch die Fläche integrieren kann. Sein Betrag sollte proportional zum Flächeninhalt sein, und die Orientierung einer Fläche im dreidimensionalen

Raum lässt sich am einfachsten durch einen Vektor senkrecht zu der Fläche beschreiben. (Die allgemeine Theorie der Integration von Tensorfeldern über d -dimensionale Teilräume im \mathbb{R}^n ist Gegenstand der Theorie der Differentialformen, die hier nicht behandelt wird.) Wir definieren:

$$d\vec{f} = \left(\frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v} \right) du dv . \quad (9.44)$$

Offensichtlich sind

$$d\vec{x}_u = \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u} du \quad \text{und} \quad d\vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v} dv \quad (9.45)$$

die Wegstrecken jeweils entlang der Linien $\vec{x}(u, v = \text{const.})$ bzw. $\vec{x}(u = \text{const.}, v)$. $d\vec{x}_u$ und $d\vec{x}_v$ spannen ein Parallelogramm auf, dessen Fläche durch

$$|d\vec{f}| = |d\vec{x}_u \times d\vec{x}_v| \quad (9.46)$$

gegeben ist. Der Vektor $d\vec{f}$ steht senkrecht auf diesem Parallelogramm und zeigt (bei geeigneter Wahl der Reihenfolge von u und v) nach außen. Im Grenzfall $du, dv \rightarrow 0$ nähert sich die Fläche des Parallelogramms immer mehr dem Flächeninhalt der Fläche an, die zwischen den Punkten $\vec{x}(u, v), \vec{x}(u + du, v), \vec{x}(u, v + dv), \vec{x}(u + du, v + dv)$ liegt. Daher ist $d\vec{f}$ das gesuchte Flächenelement.

Wir definieren nun das Flächenintegral über ein skalares Feld über die Fläche \mathcal{F} als

$$\int_{\mathcal{F}} \Phi(\vec{x}) |d\vec{f}| := \int_0^1 \int_0^1 \Phi(\vec{x}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v} \right| du dv . \quad (9.47)$$

Nun handelt es sich um ein gewöhnliches Integral über zwei Variable u und v .

Entsprechend definierten wir den *Fluss* eines Vektorfeldes \vec{F} durch eine Fläche \mathcal{F} als

$$\int_{\mathcal{F}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{f} := \int_0^1 \int_0^1 \left[\vec{F}(\vec{x}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v} \right) \right] du dv . \quad (9.48)$$

Wir projizieren also an jedem Punkt der Fläche den Vektor \vec{F} auf das Flächenelement $d\vec{f}$ und bilden anschließend das Integral über u und v .

9.3.2 Beispiel: Die Kugeloberfläche

Als Beispiel betrachten wir die Oberfläche einer Kugel vom Radius R . Als Parametrisierung wählen wir die beiden Winkel $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ der Kugelkoordinaten. Die Kugeloberfläche wird dann beschrieben durch:

$$(\theta, \varphi) \mapsto \vec{x}(\theta, \varphi) = R(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) . \quad (9.49)$$

Für das Flächenelement an einem Punkt $\vec{x}(\theta, \varphi)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} &= R(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta) \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} &= R(-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0) \\ \implies \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right) &= R^2(\cos \varphi \sin^2 \theta, \sin \varphi \sin^2 \theta, \sin \theta \cos \theta) \\ &= R^2 \sin \theta \vec{n} \quad \text{mit } \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.\end{aligned}$$

Am Punkt $\vec{x}(\theta, \varphi)$ ist \vec{n} ein Einheitsvektor, der radial nach außen zeigt, und das Flächenelement ist somit:

$$d\vec{f}(\theta, \varphi) = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{n}. \quad (9.50)$$

Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche ergibt sich damit zu:

$$A = \int_{\mathcal{O}} |d\vec{f}| = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) = 4\pi R^2. \quad (9.51)$$

9.3.3 Der Stokes'sche Satz

Wir hatten für kartesische Koordinaten die Rotation eines Vektorfeldes durch folgende Vorschrift definiert (Summenkonvention!, siehe S. 59):

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j F_k, \quad (9.52)$$

bzw.

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \simeq \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}, \quad (9.53)$$

mit $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Man bezeichnet die Rotation eines Vektorfeldes auch als seine *Wirbel-dichte*. Zur Rechtfertigung dieser Bezeichnung beweisen wir zunächst den Stokes'schen Satz.

Satz von Stokes: Sei \vec{F} ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld im \mathbb{R}^3 und \mathcal{F} eine (differenzierbare) Fläche im \mathbb{R}^3 mit Rand $\partial\mathcal{F}$, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{f} = \int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} \cdot d\vec{x}. \quad (9.54)$$

Das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes ist also gleich dem Integral des Vektorfeldes über den Rand der Fläche.

Zum Beweis benutzen wir folgende Relation:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right), \quad (9.55)$$

die zunächst bewiesen wird:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) &= \sum_{ijklm} \epsilon_{ijk} (\partial_j F_k) \epsilon_{ilm} \frac{\partial x_l}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial v} \\ &= \sum_{jklm} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (\partial_j F_k) \frac{\partial x_l}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial v} \\ &= \sum_{jk} \left((\partial_j F_k) \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} - (\partial_j F_k) \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial F_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial F_k}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial u} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(F_k \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(F_k \frac{\partial x_k}{\partial u} \right) \right). \end{aligned}$$

Beim ersten Schritt haben wir die Identität (Gl. 5.78) für das Produkt von ϵ -Symbolen verwendet. Beim letzten Schritt wurde um die zweifachen Ableitungen von x_k erweitert; bildet man in der letzten Zeile die jeweiligen Ableitungen nach der Produktregel, heben sich die zweifachen Ableitungen von x_k weg.

Mit diesem Satz und der Definition des Flächenintegrals erhalten wir also

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{f} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right) \right] du dv \\ &= \int_0^1 \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) \Big|_{u=0}^{u=1} dv - \int_0^1 \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right) \Big|_{v=0}^{v=1} du. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht nun ein Integral über den Rand des Rechtecks, das den Wertebereich von (u, v) bildet. Dieses Rechteck wird auf den Rand der Fläche $(\partial \mathcal{F})$ abgebildet (siehe Abb. 9.1). Daher steht auf der rechten Seite gerade ein Linienintegral über die Funktion \vec{F} über den Rand der Fläche \mathcal{F} . Damit ist der Stokes'sche Satz bewiesen.

Eine spezielle Form des Stokes'schen Satzes sieht man, wenn man die Rotation eines Vektorfeldes über das Rechteck $[0, a] \times [0, b]$ in der $x_1 x_2$ -Ebene integriert. Dann erhält man

$$\int \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = \int F_1 \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} dx_1 - \int F_2 \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2. \quad (9.56)$$

Auf der rechten Seite steht gerade das Integral über den Rand des Rechtecks.

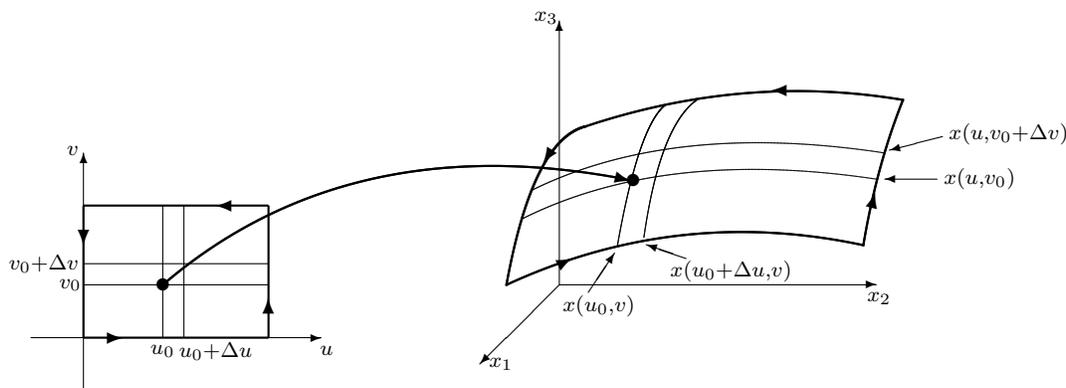


Abbildung 9.1: Der Parameterbereich (links) wird auf eine Fläche im \mathbb{R}^3 abgebildet, der Rand des Parameterbereichs auf den Rand der Fläche. Beim Stokes'schen Satz wird bewiesen, dass das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes, ausgedrückt durch ein Integral über die Parameterfläche, gleich dem Integral über das Vektorfeld auf dem Rand der Fläche ist. Dieses Integral entspricht im Parameterraum einem Integral über den Rand des Rechtecks. Die Pfeile im rechten Bild deuten auf Koordinatenkurven zu jeweils konstanten Werten von u bzw. von v . Diese Kurven sind die Bilder der eingezeichneten Koordinatenlinien durch die Punkte (u_0, v_0) und $(u_0 + \Delta u_0, v_0 + \Delta v_0)$ im Parameterraum.

Wir wollen nun die Vorstellung von der Rotation eines Vektorfeldes als eine Wirbeldichte konkretisieren. Das Integral eines Vektorfeldes entlang eines geschlossenen Weges γ entspricht der Wirbelstärke dieses Vektorfeldes entlang dieses Weges. Wir wählen nun diesen Weg in einer Fläche senkrecht zu einem Normalenvektor \vec{n} . Außerdem sei dieser Weg sehr kurz und umschlieÙe eine Fläche mit Flächeninhalt Δf . Dann gilt nach dem Stokes'schen Satz:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{x}}{\Delta f}, \quad (9.57)$$

d.h. die Rotation, projiziert auf den Einheitsvektor \vec{n} , ist gleich der Wirbelstärke entlang des Weges γ dividiert durch die Fläche, die von γ umrandet wird, im Grenzfalle verschwindender Fläche – also gleich der Wirbeldichte. Man beachte, dass es sich hierbei um eine *Flächendichte* handelt, d.h., das Integral von $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ über eine Fläche ergibt die Wirbelstärke.

Diese Definition der Rotation eines Vektorfeldes hat eine geometrische Interpretation und ist somit unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Damit können wir die Rotation eines Vektorfeldes auch in verallgemeinerten Koordinatensystemen angeben.

9.3.4 Der Satz von Poincaré

Wir hatten gezeigt, dass für ein Gradientenfeld $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$ die Rotation verschwindet und dass Wegintegrale über geschlossene Wege immer den Wert null haben:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi \implies \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \text{und} \quad \oint \vec{F} \cdot d\vec{f} = 0. \quad (9.58)$$

Wir können nun die Frage umkehren: Unter welchen Bedingungen können wir aus der Tatsache, dass die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet, darauf schließen, dass es sich um ein Gradientenfeld handelt bzw. dass die Integrale über geschlossene Wege verschwinden (was dann gleichbedeutend ist zu der Aussage, dass Wegintegrale immer nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen und nicht vom Weg selbst)? Diese Frage können wir nun mit Hilfe des Stokes'schen Satzes beantworten. Der Stokes'sche Satz gilt für Flächen \mathcal{F} mit einem Rand $\partial\mathcal{F}$. Der Rand einer Fläche bildet immer einen geschlossenen Weg. Falls die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet, verschwindet auch das Integral über alle geschlossenen Wege, die sich als Rand einer Fläche darstellen lassen.

Es gibt jedoch unter bestimmten Bedingungen geschlossene Wege, die nicht der Rand einer (regulären) Fläche sind. Betrachten wir als Beispiel die Ebene ohne den Ursprung: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Ein Weg, der sich einmal um den Ursprung herumwindet, ist kein Rand einer Kreisscheibe, denn der Ursprung ist nicht Teil des Raumes. In diesem Fall kann die Rotation eines Vektorfeldes verschwinden, aber das Integral über einen geschlossenen Weg um den Ursprung ist von null verschieden. Ein Beispiel ist das Vektorfeld (im \mathbb{R}^2):

$$\vec{F}(x) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, +\frac{x}{x^2 + y^2} \right). \quad (9.59)$$

Der Definitionsbereich dieses Vektorfeldes ist $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, da das Vektorfeld am Ursprung nicht definiert ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Rotation dieses Vektorfeldes (die nun nur aus der Komponente $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$ besteht) verschwindet:

$$\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0. \quad (9.60)$$

Wir berechnen nun das Integral über dieses Vektorfeld entlang eines geschlossenen Weges um den Ursprung (beispielsweise entlang eines Kreises vom Radius R , parametrisiert durch $x(\varphi) = R(\cos \varphi, \sin \varphi)$ mit dem Tangentialvektor $\frac{dx}{d\varphi} = R(-\sin \varphi, \cos \varphi)$). Wir erhalten

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} (-\sin \varphi, +\cos \varphi) \cdot R(-\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi = 2\pi. \quad (9.61)$$

Obwohl die Rotation des Vektorfeldes verschwindet, ist das Integral über dieses Vektorfeld (projiziert auf die Tangentialrichtung des Weges) entlang eines geschlossenen

Weges um den Ursprung nicht null. (Man beachte aber, dass das Integral unabhängig von R ist.) Der Stokes'sche Satz ist hier nicht anwendbar, weil der geschlossene Weg nicht der Rand einer wohl definierten Fläche ist.

Man bezeichnet Gebiete im \mathbb{R}^n als *einfach wegzusammenhängend*, wenn sich jeder geschlossene Weg als Rand einer wohl definierten Fläche interpretieren lässt. Anders ausgedrückt, ein Gebiet heißt einfach wegzusammenhängend, wenn sich jeder geschlossener Weg stetig zu einem Punkt zusammenziehen lässt. Damit können wir nun den *Satz von Poincaré* formulieren: In einem einfach wegzusammenhängenden Gebiet ist ein rotationsfreies Vektorfeld immer ein Gradientenfeld.

9.3.5 Das eindimensionale Integral als Flächenintegral

Wir hatten das Integral ursprünglich eingeführt als die Fläche F unter einer Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$:

$$F = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.62)$$

Nun haben wir in diesem Kapitel beschrieben, wie man Flächenintegrale über einem zweidimensionalen Parameterraum behandelt. Wie hängen diese beiden Konzepte zusammen?

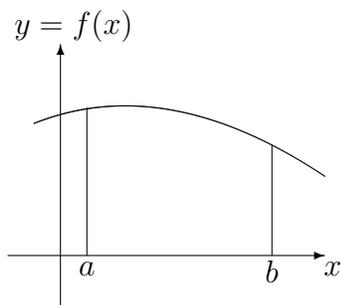


Abbildung 9.2: Das Integral über eine Funktion über einem Intervall ist gleich der Fläche unter dieser Funktion. Dieses Integral lässt sich auch als 2-dimensionales Integral schreiben, wobei die zu integrierende Funktion $\phi(x, y) = 1$ ist, aber die Grenze in y -Richtung jeweils von 0 bis $f(x)$ zu wählen ist.

Wenn wir den 2-dimensionalen Raum der Punkte (x, y) als Parameterraum für ein Flächenintegral auffassen, können wir zunächst das Flächenelement angeben: $df = dx dy$ (das Kreuzprodukt wird zum normalen Produkt, da die Koordinaten senkrecht zueinander sind und es interessiert nur der Betrag, da wir über die Funktion $\phi(x, y) = 1$ integrieren wollen). Wir müssen allerdings berücksichtigen, dass die Grenzen für die y -Integration nun immer von 0 bis zum Wert $y = f(x)$ laufen. Damit erhalten wir für die Fläche:

$$F = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b dx f(x), \quad (9.63)$$

also das uns schon bekannte Ergebnis. Man beachte, dass nun in jedem Fall das Integral über y zuerst auszuführen ist, da die obere Grenze dieses Integrals noch eine Funktion von x ist.

9.4 Volumenintegrale und der Satz von Gauß

9.4.1 Volumenelement und Volumenintegration

Während ein Linienelement $d\vec{x}$ und ein Flächenelement $d\vec{f}$ im \mathbb{R}^3 gerichtete (vektorielle) Größen sind, ist ein Volumenelement im \mathbb{R}^3 eine (pseudo-) skalare Größe. Daher betrachten wir auch nur Volumenintegrale über Skalarfelder. Bildet man das Volumenintegral über ein Vektorfeld, so erhält man einen Vektor, d.h., das Integral ist für jede Komponente gesondert zu bilden.

Das kartesische Volumenelement im \mathbb{R}^3 ist $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$. Will man jedoch über ein Volumen $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ integrieren, so ist es oft schwierig, die Integrationsgrenzen an $\{x_i\}$ zu berücksichtigen, da – mit Ausnahme der Integration über einen Quader – die Integrationsgrenzen von den Integrationsvariablen abhängen können.

Daher ist es meist sinnvoll, eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zu finden, die einen Quader $(u_1, u_2, u_3) \in [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ auf das Volumen \mathcal{V} abbildet, wobei der Rand des Quaders auf den Rand des Volumens – d.h. die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ – abgebildet wird.

Das Volumen des von den drei infinitesimalen Vektoren

$$d\vec{x}_{u_i} = \frac{\partial \vec{x}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} du_i \quad (9.64)$$

aufgespannten Parallelepipeds ist

$$dV = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_3} \right) \right| du_1 du_2 du_3 . \quad (9.65)$$

Dieses Volumen definiert somit das Maß, das wir dem Quader $[u_1, u_1 + du_1] \times [u_2, u_2 + du_2] \times [u_3, u_3 + du_3]$ im Parameterraum zuschreiben müssen.

Der Faktor lässt sich als Betrag der Determinante einer Matrix schreiben und wird als *Jacobi-Determinante* bezeichnet:

$$J = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \left| \det \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_3} \right) \right| . \quad (9.66)$$

Die Jacobi-Determinante $J = |\partial x_i / \partial u_j|$ (genauer, der Betrag dieser Determinante) gibt allgemein in n Dimensionen das Volumenelement für einen Wechsel der Koordinaten von kartesischen Koordinaten $\{x_i\}$ zu verallgemeinerten Koordinaten $\{u_i\}$ an.

Wir erhalten also:

$$\int_{\mathcal{V}} \Phi(\vec{x}) d^3x = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \Phi(\vec{x}(u_1, u_2, u_3)) J du_1 du_2 du_3 . \quad (9.67)$$

Der Vorteil einer solchen Transformation $\vec{x} \rightarrow \vec{u}$ besteht darin, dass nun die Integrationsgrenzen unabhängig von den Integrationsparametern oder aber einfache Funktionen dieser Integrationsparameter sind.

9.4.2 Beispiel: Die Kugel vom Radius R

Wir betrachten als Beispiel die Integration über das Volumen einer Kugel vom Radius R . Als Parameter wählen wir den Betrag eines Vektors $r \in [0, R]$, sowie die beiden Winkel $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, die wir schon bei der Beschreibung der Kugeloberfläche benutzt haben. Wir erhalten somit als Parametrisierung der Kugel:

$$(r, \theta, \varphi) \longrightarrow \vec{x}(r, \theta, \varphi) = r(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \quad (9.68)$$

mit den angegebenen Bereichsgrenzen. Das neue Volumenelement bzw. die Jakobi-Determinante J lässt sich leicht berechnen, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \vec{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \quad (9.69)$$

ist, und

$$\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right) = r^2 \sin \theta \vec{n} . \quad (9.70)$$

Damit folgt

$$J = \vec{n} \cdot (r^2 \sin \theta) \vec{n} = r^2 \sin \theta . \quad (9.71)$$

Wir erhalten somit als neues Volumenelement

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi . \quad (9.72)$$

Für das Volumen folgt daher:

$$V = \int_{\mathcal{V}} dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} R^3 . \quad (9.73)$$

9.4.3 Der Satz von Gauß – Die Divergenz als Quellendichte

Der Gauß'sche Satz besagt, dass das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes gleich dem Integral über die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ über das Vektorfeld selber ist:

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d^3x = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{F} \cdot d\vec{f} . \quad (9.74)$$

Der Beweis erfolgt ähnlich, wie der Beweis des Stokes'schen Satzes. Wir gehen von folgender Identität aus, die hier nicht bewiesen werden soll, aber durch direktes Nachrechnen „leicht“ (das bedeutet „mit einem gewissen Aufwand aber ohne besondere

technischen Raffinessen“) überprüfbar ist:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}(u_1, u_2, u_3)) \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_3} \right) \right] = \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \left[\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_3} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial u_3} \left[\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nun setzen wir diese Identität in das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes ein und erhalten ein Oberflächenintegral, parametrisiert durch den Rand des Quaders von (u_1, u_2, u_3) , über das Vektorfeld.

Für einen gewöhnlichen Quader im \mathbb{R}^3 (definiert durch die Grenzen $x_1 \in [0, a]$, $x_2 \in [0, b]$, $x_3 \in [0, c]$) sieht man die Identität unmittelbar:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ = \int F_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} dx_2 dx_3 + \int F_2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} dx_1 dx_3 + \int F_3 \Big|_{x_3=0}^{x_3=c} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite wird immer über die gegenüberliegenden Flächen bei einem Würfel integriert, jeweils mit umgekehrtem Vorzeichen, was zum Ausdruck bringt, dass der Normalenvektor der einen Seite die umgekehrte Orientierung zum Normalenvektor der gegenüberliegenden Seite hat.

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes können wir der Divergenz eines Vektorfeldes auch die Interpretation einer sogenannten *Quellendichte* geben. Es gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{F} \cdot d\vec{f}. \quad (9.75)$$

Das Integral über die geschlossene Oberfläche eines Volumens über ein Vektorfeld ergibt aber gerade den Gesamtfluss dieses Vektorfeldes durch diese Oberfläche, also die „Gesamtzahl der Quellen“ des Vektorfeldes innerhalb des Volumens. Die Divergenz ist daher die Quellendichte. In diesem Fall handelt es sich um eine Volumendichte.

9.5 Die Kontinuitätsgleichung

Die angegebenen Integralsätze ermöglichen oft den Übergang zwischen einer lokalen Aussage, die an jedem Raumpunkt erfüllt sein muss, und einer globalen Aussage, die für beliebige Volumina oder Flächen erfüllt sein muss. Als Beispiel betrachten wir die Kontinuitätsgleichung für elektrische Ladungen.

$\rho(\vec{x}, t)$ beschreibe eine elektrische Ladungsdichte bzw. eine Ladungsverteilung zum Zeitpunkt t . D.h.

$$Q_{\mathcal{V}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}, t) d^3x \quad (9.76)$$

ist die Gesamtladung in einem Volumen \mathcal{V} zum Zeitpunkt t . Wir fragen uns nun nach der Ladungsänderung in diesem Volumen, d.h.

$$\frac{d}{dt}Q_{\mathcal{V}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\vec{x}, t) d^3x . \quad (9.77)$$

Es ist kein Prozess in der Natur bekannt, der die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems verändert, d.h., Ladung ist eine Erhaltungsgröße. Die Ladungsänderung in einem Volumen muss mit einem Ladungsfluss durch die Oberfläche des Volumens verbunden sein. Den Ladungsfluss drücken wir durch die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ aus. Die Stromdichte zu einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$, die sich am Punkte \vec{x} mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x})$ bewegt, ist

$$\vec{j}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x})\rho(\vec{x}) . \quad (9.78)$$

Der Fluss an Ladung durch eine geschlossene Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ pro Zeiteinheit ist:

$$\frac{d}{dt}Q_{\mathcal{V}}(t) = - \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{x}) \cdot d\vec{f} . \quad (9.79)$$

Das negative Vorzeichen gibt an, dass \dot{Q} die Änderung der Ladungsmenge in \mathcal{V} ist. Fließt beispielsweise Ladung aus \mathcal{V} ab, so ist \dot{Q} negativ. Der Strom ist nach außen gerichtet, d.h., das Integral über die Stromdichte gibt die nach außen abfließende Ladungsmenge an, die gleich dem negativen der Ladungsänderung im Inneren ist. Wir erhalten also die Aussage:

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\vec{x}, t) d^3x = - \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{x}) \cdot d\vec{f} . \quad (9.80)$$

Das Volumenintegral über die zeitliche Änderung von ρ ist gleich dem Oberflächenintegral über den Strom. Diese Aussage gilt für jedes Volumen \mathcal{V} . Nach dem Gauß'schen Satz gilt aber auch

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\vec{x}, t) d^3x = - \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x})) d^3x . \quad (9.81)$$

Da auch diese Aussage für jedes Volumen \mathcal{V} gilt, können wir \mathcal{V} beliebig um einen Punkt konzentrieren und gelangen so zu einer *lokalen* Aussage:

$$\dot{\rho}(\vec{x}, t) = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) . \quad (9.82)$$

Diese Gleichung bezeichnet man als *Kontinuitätsgleichung* [continuity equation]. Abgeleitet haben wir sie aus einer Art Bilanzgleichung (für die Ladung) in einem beliebigen Volumen \mathcal{V} . Ganz ähnliche Bilanzgleichungen (in diesem Fall für den Impuls und die Energie) nutzt man in der Hydrodynamik zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung bzw. der Navier-Stokes-Gleichung.

Kapitel 10

Elementare Konzepte der Differentialgeometrie

Dieses Kapitel soll einige der Konzepte der letzten Kapitel unter einem geometrischen Gesichtspunkt vertiefen. Allgemein befasst sich die Differentialgeometrie mit geometrischen Strukturen auf Mannigfaltigkeiten. Dabei werden Mannigfaltigkeiten sehr allgemein als topologische Räume definiert, die lokal *Karten* besitzen, d.h., die sich lokal bijektiv mit Teilmengen des \mathbb{R}^n (oder bei komplexen Mannigfaltigkeiten des \mathbb{C}^n) identifizieren lassen. Diese Teilmengen des \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) bilden dann den Parameterraum, durch den die Mannigfaltigkeit parametrisiert wird. Durch die Festlegung einer sogenannten Metrik kann man Weglängen, Abstände und Winkel definieren und somit Geometrie betreiben. Durch die Art, wie überlappende Karten miteinander in Verbindung stehen, kann man sogar globale Eigenschaften solcher Mannigfaltigkeiten untersuchen.

Zunächst betrachte ich in den \mathbb{R}^n *eingebettete* Mannigfaltigkeiten, die ihre Metrik (und damit die Definition von Abständen) durch den einbettenden Raum erhalten. Dies ist eine Fortsetzung der Konzepte aus Kapitel 8.

In einem zweiten Schritt sollen krummlinige Koordinaten des \mathbb{R}^n betrachtet werden. In gewisser Hinsicht handelt es sich um eine Reparametrisierung des \mathbb{R}^n bzw. eine Einbettung des \mathbb{R}^n in sich selbst. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass der zugrundeliegende Raum immer noch der euklidische (flache) \mathbb{R}^n mit dem kanonischen Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_i x_i y_i$ ist, wobei sich die Koordinaten x_i, y_i auf kartesische Orthonormalkoordinaten beziehen. Das Ziel dieses Abschnitts ist die Darstellung von Differentialoperatoren, insbesondere des Laplace-Operators, in krummlinigen Koordinaten. Eine Verallgemeinerung von Differentialoperatoren auf nicht flache Mannigfaltigkeiten geht über diese elementare Einführung weit hinaus und wird hier nicht betrachtet. Viele der hier behandelten Konzepte lassen sich aber leicht verallgemeinern.

10.1 Indexnotation und Einstein'sche Summenkonvention

Wenn man mit krummlinigen Koordinatensystemen (oder allgemein in nicht kartesischen Koordinatensystemen) arbeitet, ist eine Notation hilfreich, die insbesondere in der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie allgemein verwendet wird: Die Stellung der Indizes gibt an, um welche Art von geometrischer Größe es sich handelt.

Zur Motivation der folgenden Konzepte betrachten wir einen Vektorraum V (Dimension n) und einen Vektor $\vec{x} \in V$ (in diesem Abschnitt werde ich Vektoren durch den Vektorpfeil kennzeichnen, um eine Verwechslung mit Koordinaten zu vermeiden). Wir können in V eine Basis, also n linear unabhängige Vektoren $\{\vec{f}_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, n$), definieren und den Vektor \vec{x} nach dieser Basis entwickeln:

$$\vec{x} = \sum_{\alpha=1}^n x^\alpha \vec{f}_\alpha. \quad (10.1)$$

(Aus Gründen, die gleich offensichtlich werden, wurde der Index an den Koordinaten oben, der Index an den Basisvektoren unten geschrieben.)

Unter einer allgemeinen Basistransformation $\{\vec{f}_\alpha\} \rightarrow \{\vec{f}'_\alpha\}$, also der Wahl eines neuen Satzes von Basisvektoren, ändern sich auch die Koordinaten des Vektors \vec{x} , wobei der Vektor selbst unverändert bleibt:

$$\vec{x} = \sum_{\alpha=1}^n x'^\alpha \vec{f}'_\alpha. \quad (10.2)$$

Jede Basistransformation lässt sich eindeutig¹ durch eine lineare Abbildung $\Lambda : V \rightarrow V$ darstellen, d.h., die neue Basis lässt sich als Linearkombination der alten Basis schreiben:

$$\vec{f}'_\alpha \mapsto \vec{f}'_\alpha = \sum_{\beta=1}^n \Lambda_\alpha^\beta \vec{f}_\beta. \quad (10.3)$$

Da der Vektor \vec{x} unter der Basistransformation unverändert bleibt, müssen sich seine Koordinaten mit der inversen Abbildung transformieren:

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = \sum_{\beta=1}^n (\Lambda^{-1})_\beta^\alpha x^\beta \quad \text{mit} \quad \sum_{\gamma=1}^n (\Lambda^{-1})_\gamma^\alpha \Lambda_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha, \quad (10.4)$$

wobei δ_β^α das Kronecker-Delta-Symbol darstellt (vgl. Gl. 2.37: $\delta_\beta^\alpha = 0$ für $\alpha \neq \beta$ und $\delta_\beta^\alpha = 1$ für $\alpha = \beta$).

¹Für die Eindeutigkeit muss die Ausgangs- und Zielbasis nummeriert sein, ansonsten kann man immer noch Permutationen der Basisvektoren vornehmen, welche die Menge der Basisvektoren nicht ändert. Die Abbildung Λ ist eindeutig, sofern \vec{f}'_1 auf \vec{f}_1 , \vec{f}'_2 auf \vec{f}_2 und allgemein \vec{f}'_i auf \vec{f}_i abgebildet werden.

Man bezeichnet nun jeden Satz von indizierten Größen als *kovariant* bzw. als *kovarianten Vektor*, wenn sich seine Elemente bei einem Wechsel der Basisvektoren untereinander wie die Basisvektoren (also unter der Abbildung Λ) transformieren, und man bezeichnet diesen Satz von Größen als *kontravariant* bzw. *kontravarianten Vektor*, wenn sich seine Elemente wie die Koordinaten eines Vektors (also mit Λ^{-1}) transformieren. Kovariante Indizes schreibt man nach unten, kontravariante Indizes nach oben. Diese Konvention gilt auch allgemeiner für geometrische Objekte mit mehreren Indizes (Tensoren). Wichtig ist, dass die geometrischen Objekte selbst von der Wahl der Koordinatensysteme unabhängig sind, ihre Komponenten in einem bestimmten Koordinatensystem aber natürlich von diesem Koordinatensystem abhängen.

Diese Notation hat den Vorteil, dass in bei geometrischen Größen (die also nicht vom Koordinatensystem bzw. der gewählten Basis abhängen) immer über einen Index summiert wird, der auf derselben Seite einer Gleichung einmal oben und einmal unten auftritt. Man kann sich in diesem Fall das Summenzeichen sogar sparen, wenn man die *Einstein'sche Summenkonvention* berücksichtigt: Über doppelt auftretende Indizes, einmal oben und einmal unten, ist immer zu summieren. Dies wird in den kommenden Abschnitten verwendet. Allgemein kann ein Index auf einer Seite einer Gleichung entweder doppelt auftreten (dann einmal oben und einmal unten und es wird über ihn summiert) oder einfach (entweder oben oder unten), dann sollte derselbe Index auf der anderen Seite der Gleichung an derselben Stelle (oben bzw. unten) auftreten.

10.2 Verallgemeinertes Skalarprodukt und metrischer Tensor

In den nächsten Abschnitten (bis zur Einführung von Differentialoperatoren) wird nicht zwischen einer Einbettung einer Kurve, Fläche oder allgemeiner eines d -dimensionalen Raumes in den \mathbb{R}^n (also $d < n$) und einer Reparametrisierung des \mathbb{R}^n (also $d = n$) unterschieden. Daher betrachten wir im Folgenden Einbettungen der Form:

$$(u^1, \dots, u^d) \mapsto \vec{x}(u^1, \dots, u^d), \quad (10.5)$$

wobei wir neben $d < n$ (der Einbettung eines parametrisierten Teilraums) auch den Fall $d = n$ zulassen (eine Koordinatentransformation). Man beachte, dass die Indizes an den Koordinaten nun oben platziert sind.

Die Parameterdarstellung definiert in einem Punkt $p \simeq \vec{x}(u^1, \dots, u^d)$ auf der Mannigfaltigkeit, der durch die Koordinaten (u^1, \dots, u^d) charakterisiert wird, d linear unabhängige Tangentialvektoren:

$$\vec{f}_\alpha(p) = \frac{\partial \vec{x}(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^\alpha}. \quad (10.6)$$

(Man beachte, dass es sich bei dem Index α auf der linken Seite um einen Index handelt, der die verschiedenen Vektoren durchnummeriert, wohingegen auf der rechten Seite nach der Koordinate u^α abgeleitet wird.) Die Ableitung nach einer Koordinate mit oben stehendem Index ergibt einen Ausdruck, bei dem der Index unten steht. Dies folgt aus Gl. 5.48: Dort ist \vec{h} ein Vektor, dessen Koordinaten sich kontravariant transformieren. Damit das Produkt mit dem Gradienten eine invariante (skalare) Größe ergibt, müssen sich die Komponenten des Gradienten (die sich aus den Ableitungen nach den Koordinaten ergeben) kovariant transformieren. Das rechtfertigt die Notation $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha$. Anders ausgedrückt: Damit die Identität

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad (10.7)$$

auch bei einem Koordinatenwechsel richtig bleibt, muss sich $\{\partial/\partial u^\alpha\}$ invers zu $\{u^\alpha\}$ transformieren.

Die Tangentialvektoren $\{\vec{f}_\alpha\}$ sind im Allgemeinen weder Einheitsvektoren noch orthogonal. Wir können natürlich diese Vektoren noch durch ihren Betrag dividieren und auch zur Konstruktion eines Orthonormalsystems verwenden (ähnlich, wie wir dies beim begleitenden Dreibein schon gemacht haben). In den meisten Fällen ist es aber einfacher, direkt mit den Vektoren $\vec{f}_\alpha(p)$ als Basisvektoren des Tangentialraums im Punkte p zu rechnen. Wenn wir allerdings Vektoren in diesem Tangentialraum durch ihre Komponenten bezüglich der Basis $\{\vec{f}_\alpha(p)\}$ ausdrücken, müssen wir bei der Berechnung des Skalarprodukts (wie es durch den einbettenden \mathbb{R}^n definiert ist) vorsichtig sein: Seien \vec{x} und \vec{y} zwei Vektoren im Tangentialraum des Punktes p . Diese beiden Vektoren lassen sich bezüglich der Tangentialvektoren $\{\vec{f}_\alpha\}$ zerlegen:

$$\vec{x} = x^\alpha \vec{f}_\alpha \quad \vec{y} = y^\beta \vec{f}_\beta. \quad (10.8)$$

(Die Koordinaten von Vektoren haben die Indizes oben und in beiden Fällen ist nach der Einstein'schen Summenkonvention über die Indizes zu summieren.)

Das Skalarprodukt zwischen diesen Vektoren im einbettenden Raum \mathbb{R}^n ist:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(x^\alpha \vec{f}_\alpha(p)\right) \cdot \left(y^\beta \vec{f}_\beta(p)\right) = x^\alpha y^\beta (\vec{f}_\alpha \cdot \vec{f}_\beta) = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \quad (10.9)$$

Wir können also das Skalarprodukt durch die Komponenten der Vektoren bezüglich der Basis $\{\vec{f}_\alpha\}$ ausdrücken, müssen dabei aber die symmetrische Matrix

$$g_{\alpha\beta} = \vec{f}_\alpha \cdot \vec{f}_\beta = \frac{\partial \vec{x}(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{x}(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^\beta} \quad (10.10)$$

berücksichtigen. Gleichung 10.9 bezeichnet man als ein verallgemeinertes Skalarprodukt und die (symmetrische) Matrix $g_{\alpha\beta}$ als *Metrik*. Wie wir noch sehen werden, erlaubt $g_{\alpha\beta}(p)$ die Berechnung von Längen und Abständen auf der Mannigfaltigkeit.

Da die Tangentialvektoren $\vec{f}_\alpha(p)$ vom Punkt p abhängen, an dem sie berechnet werden, hängen auch die Elemente des Skalarprodukts von diesem Punkt p ab: $g_{\alpha\beta}(p)$. Man spricht in diesem Fall vom *metrischen Feld*. Da das Skalarprodukt in jedem Punkt ein Tensor (2. Stufe – die Matrix hat zwei kovariante Indizes) ist, spricht man auch vom *metrischen Tensor* bzw. *metrischen Feldtensor*.

10.3 Reziproke bzw. duale Basis

Wie erhalten wir die Komponenten x^α eines Vektors \vec{x} bezüglich der Basis $\{\vec{f}_\alpha\}$? Im Fall der Standardbasis $\{\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}$ konnten wir den Vektor \vec{x} einfach mit einem Basisvektor multiplizieren und erhielten $x^i = \vec{e}^i \cdot \vec{x}$. Bei der Standardbasis muss nicht zwischen unten und oben stehenden Indizes unterschieden werden, bzw. $\vec{e}_i = \vec{e}^i$. Ich werde zwar in diesem Kapitel auch bezüglich der kartesischen Koordinaten weitgehend diese Unterscheidung treffen, allerdings wird an manchen Stellen ohne Begründung der Index zu den kartesischen Koordinaten manchmal scheinbar willkürlich oben bzw. unten gesetzt, ohne dass ich immer explizit eine Begründung angebe.

Um die Komponenten eines Vektors in einer allgemeinen Basis ähnlich berechnen zu können, definiert man die sogenannte *duale Basis* bzw. *reziproke Basis*. (Streng genommen sollte man zwischen der dualen Basis, die eine Basis im sogenannten Dualraum V^* zu dem Vektorraum V ist, und der reziproken Basis, die bei einem gegebenen Skalarprodukt das entsprechende Gegenstück im Vektorraum V ist, unterscheiden. Für praktische Rechnungen ist dieser Unterschied aber nicht relevant.)

Für die reziproke Basis $\{\vec{f}^\alpha\}$ soll gelten:

$$\vec{f}^\alpha \cdot \vec{f}_\beta = \delta_\beta^\alpha. \quad (10.11)$$

Bei der reziproken Basis steht der Index oben. Tatsächlich muss sich die reziproke Basis kontravariant transformieren, wenn die gewöhnliche Basis kovariant transformiert wird, sodass die Beziehungen 10.11 erhalten bleiben. Offenbar gilt:

$$\vec{f}^\alpha \cdot \vec{x} = \vec{f}^\alpha \cdot (x^\beta \vec{f}_\beta) = x^\beta (\vec{f}^\alpha \cdot \vec{f}_\beta) = x^\beta \delta_\beta^\alpha = x^\alpha. \quad (10.12)$$

Anschaulich steht der Vektor \vec{f}^α senkrecht auf allen Basisvektoren $\{\vec{f}_\beta\}$ für $\beta \neq \alpha$ und hat mit \vec{f}_α das Skalarprodukt 1. Damit wird auch deutlich, dass beispielsweise eine Streckung von \vec{f}_α zur Folge hat, dass \vec{f}^α entsprechend gestaucht werden muss. Im \mathbb{R}^3 kann man mithilfe des Kreuzprodukts die reziproke Basis leicht konstruieren:

$$\vec{f}^\alpha = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\vec{f}_\beta \times \vec{f}_\gamma}{\vec{f}_1 \cdot (\vec{f}_2 \times \vec{f}_3)}. \quad (10.13)$$

($\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ entspricht dem gewöhnlichen Levi-Civita-Symbol – Gl. 2.40 – und über doppelt auftretende Indizes auf der rechten Seite ist wieder zu summieren; daher auch der

Faktor $1/2$: jeder Term auf der rechten Seite tritt zweimal auf.) Wir können allgemein die reziproken Basisvektoren auch in der Form

$$\vec{f}^\alpha = g^{\alpha\beta} \vec{f}_\beta \quad (10.14)$$

schreiben, wobei $g^{\alpha\beta} = \vec{f}^\alpha \cdot \vec{f}^\beta$ die inverse Matrix zu $g_{\alpha\beta}$ ist:

$$g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha. \quad (10.15)$$

Da die reziproke Basis ebenfalls eine Basis des Vektorraums V ist, können wir einen Vektor \vec{x} auch nach der reziproken Basis entwickeln:

$$\vec{x} = x_\alpha \vec{f}^\alpha, \quad (10.16)$$

und die (nun kovarianten) Koordinaten x_α erhalten wir aus den kontravarianten Koordinaten durch

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \quad (10.17)$$

und umgekehrt:

$$x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta. \quad (10.18)$$

Wir sehen daher, dass man mit der Metrik $g_{\alpha\beta}$ bzw. ihrem Inversen $g^{\alpha\beta}$ die Indizes von Vektoren rauf- bzw. runterziehen kann.

10.4 Intrinsische Bedeutung der Metrik

Wir wollen nun einen Aspekt der Metrik ansprechen, der anschaulich weniger den Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit betrifft als die Mannigfaltigkeit selber. Er rechtfertigt die Bezeichnung *Metrik* als „Abstandsmesser“.

Wir betrachten auf dem eingebetteten d -dimensionalen Raum zwei Punkte $p \simeq \vec{x}(u^1, \dots, u^d)$ und $p' \simeq \vec{x}(u'^1, \dots, u'^d)$, die nahe beieinander liegen sollen. Der Abstand zwischen diesen beiden Punkten,

$$ds = \sqrt{(\vec{x}(u'^1, \dots, u'^d) - \vec{x}(u^1, \dots, u^d))^2}$$

soll also klein sein. In diesem Fall erwarten wir, dass auch die Koordinaten, durch welche die beiden Punkte beschrieben werden, nahe beieinander liegen (sofern nicht eine Koordinatensingularität vorliegt):

$$(u'^1, \dots, u'^d) = (u^1 + du^1, \dots, u^d + du^d).$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} \vec{x}(u'^1, \dots, u'^d) - \vec{x}(u^1, \dots, u^d) &= \vec{x}(u^1 + du^1, \dots, u^d + du^d) - \vec{x}(u^1, \dots, u^d) \\ &= \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \vec{x}(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^\alpha} du^\alpha + O((du^i)^2). \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen nach den Parametern sind gerade die Basisvektoren im Tangentialraum:

$$\vec{f}_\alpha(p) = \frac{\partial \vec{x}(u^1, \dots, u^d)}{\partial u^\alpha}.$$

Für den „infinitesimalen“ Abstand ds erhalten wir somit:

$$ds = \sqrt{\left(\sum_{\alpha=1}^d \vec{f}_\alpha(p) du^\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta=1}^d \vec{f}_\beta(p) du^\beta \right)} = \sqrt{g_{\alpha\beta}(p) du^\alpha du^\beta}. \quad (10.19)$$

Mithilfe des metrischen Feldes können wir also an jedem Punkt (u^1, \dots, u^d) unserer Karte bestimmen, welchen Abstand zwei eng beieinander liegende Punkte in Wirklichkeit haben. Das metrische Feld ist ein „orts- und richtungsabhängiger Kartenmaßstab“.

Ist ein parametrisierter Weg auf der Mannigfaltigkeit durch $(u^1(t), \dots, u^d(t))$ gegeben ($t \in [t_0, t_1]$), kann man seine Länge durch

$$L = \int ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha\beta}(p) \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt}} dt \quad (10.20)$$

berechnen. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten bezeichnet man als *Geodäte*. Sie ersetzt für allgemeine gekrümmte Mannigfaltigkeiten das Konzept der Geraden im euklidischen (flachen) Raum (vgl. Gl. 9.31).

In der allgemeinen Relativitätstheorie gibt man oft den metrischen Feldtensor in der Form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (10.21)$$

an. Dabei bezeichnet ds^2 das Quadrat des physikalischen Abstands zwischen zwei (physikalisch eng benachbarten) Ereignissen, den man mit tatsächlichen Maßstäben oder Uhren ausmessen kann. du^α bezeichnet die Differenz in der Koordinate u^α , durch welche man die beiden Ereignisse in einer Karte ausdrückt. Das metrische Feld gibt die Beziehung zwischen dem physikalischen Abstand und den Koordinatenabständen zweier Ereignisse an.

10.5 Jacobi-Determinanten und Metrik

In diesem Abschnitt soll eine Identität bewiesen werden, die in den vergangenen Abschnitten mehrfach für Spezialfälle aufgetreten ist, die aber allgemein gilt. Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem im \mathbb{R}^n (die Komponenten von Punkten sind $\{x^i\}$) und wir wechseln zu einem krummlinigen Koordinatensystem (mit Komponenten $\{u^i\}$). Dann müssen wir in einem Volumenintegral die Jacobi-Determinante dieser Variablentransformation berücksichtigen (vgl. Gl. 9.66). Die Tangentialvektoren in einem Punkt p sind:

$$\vec{f}(p)_\alpha = \frac{\partial \vec{x}(\{u\})}{\partial u^\alpha}. \quad (10.22)$$

Diese Tangentialvektoren spannen (sofern keine Koordinatensingularität vorliegt) ein n -dimensionales Volumen auf und es gilt:

$$dV = \text{Vol} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^n} \right) du_1 du_2 \cdots du_n. \quad (10.23)$$

Das Volumen ist aber gerade die Determinante der Matrix zu den n -Tangentialvektoren:

$$\text{Vol} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^n} \right) = \det J \quad (10.24)$$

mit

$$J = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^n} \right). \quad (10.25)$$

Die Matrixelemente von J sind:

$$J_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}. \quad (10.26)$$

Für die Matrixelemente der transponierten Matrix gilt:

$$(J^T)_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial u^i}. \quad (10.27)$$

(Hier wurde, etwas unmotiviert, ausgenutzt, dass $x^i = x_i$ für kartesischen Koordinaten; für andere Koordinaten ist auch die transponierte Matrix eine andere.)

Wir bilden nun das Produkt der Matrizen J^T und J :

$$(J^T \cdot J)_{ij} = \sum_k (J^T)_{ik} J_j^k = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial u^i} \frac{\partial x^k}{\partial u^j} = \vec{f}(p)_i \cdot \vec{f}(p)_j = g(p)_{ij}. \quad (10.28)$$

Das Produkt der Jacobi-Matrix J mit ihrer Transponierten ist somit gleich der Metrik im Tangentialraum am Punkt p .

Die Determinante einer Matrix ist gleich der Determinante ihrer Transponierten und die Determinante des Produkts zweier Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten. Damit folgt:

$$(\det J)^2 = \det g \quad \text{oder} \quad \det J = +\sqrt{\det g}. \quad (10.29)$$

Das Volumenelement für krummlinige Koordinaten ist also gleich der Wurzel aus der Determinante der Metrik. Diese Beziehung gilt ganz allgemein (nicht nur für Koordinatentransformationen).

10.6 Drei Beispiele

In diesem Abschnitt sollen die Konzepte der vergangenen Abschnitte anhand von drei Beispielen verdeutlicht werden: Polarkoordinaten in zwei Dimensionen, Kugelkoordinaten in drei Dimensionen und die Kugeloberfläche als Beispiel für eine eingebettete Mannigfaltigkeit.

10.6.1 Polarkoordinaten

Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene sei durch seinen Abstand r vom Nullpunkt und den Winkel φ zur x -Achse charakterisiert, also $p \simeq \vec{x}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Die Polarkoordinaten definieren durch den Punkt p zwei ausgezeichnete Kurven:

$$\gamma_1(\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (r \text{ fest}) \quad \gamma_2(r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (\varphi \text{ fest}). \quad (10.30)$$

$\gamma_1(\varphi)$ beschreibt einen Kreis vom Radius r um den Nullpunkt, und $\gamma_2(r)$ beschreibt einen Strahl, der sich radial vom Nullpunkt nach unendlich erstreckt und zur positiven x -Achse den Neigungswinkel φ hat. Diese beiden Kurven haben in p jeweils die Tangentialvektoren:

$$\vec{f}_\varphi(p) = \frac{\partial \vec{x}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad (10.31)$$

$$\vec{f}_r(p) = \frac{\partial \vec{x}(r)}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (10.32)$$

Die Notation $\vec{f}_\varphi(p)$ bzw. $\vec{f}_r(p)$ soll andeuten, dass diese beiden Vektoren im Allgemeinen von dem Punkt p , ausgedrückt durch seine Koordinaten r und φ , abhängen.

Wir können uns leicht davon überzeugen, dass diese beiden Vektoren orthogonal sind. Normieren wir die beiden Vektoren noch auf die Länge eins, so erhalten wir ein *Orthonormalsystem* von Basisvektoren für den Tangentialraum im Punkte p :

$$\vec{e}_\varphi(p) = (-\sin \varphi, \cos \varphi) \quad \vec{e}_r(p) = (\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (10.33)$$

Wollen wir jedoch Vektoren im Tangentialraum durch die Komponenten bezüglich \vec{f}_r und \vec{f}_φ ausdrücken, so müssen wir das verallgemeinerte Skalarprodukt verwenden:

$$g(p) \simeq \begin{pmatrix} g_{\varphi\varphi}(p) & g_{r\varphi}(p) \\ g_{\varphi r}(p) & g_{rr}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.34)$$

Die inverse Matrix hat die Komponenten

$$g(p)^{-1} \simeq \begin{pmatrix} g^{\varphi\varphi}(p) & g^{r\varphi}(p) \\ g^{\varphi r}(p) & g^{rr}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.35)$$

Die zu $\vec{f}_\varphi, \vec{f}_r$ (Gl. 10.31, 10.32) reziproke Basis ist

$$\vec{f}^\varphi(p) = \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi, r \cos \varphi \right) \quad \vec{f}^r(p) = (\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (10.36)$$

Schließlich erhalten wir für das Volumenelement in Polarkoordinaten (vgl. Gl. 9.27):

$$dV = \sqrt{\det g} \, dr \, d\varphi = r \, dr \, d\varphi. \quad (10.37)$$

10.6.2 Kugelkoordinaten

Im \mathbb{R}^3 sind Kugelkoordinaten durch folgende Parametrisierung gegeben:

$$\vec{x}(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta). \quad (10.38)$$

Die Parameterbereiche sind $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wie schon erwähnt, sind die Ränder $r = 0$ und $\theta = 0, \pi$ Koordinatensingularitäten.

Die durch die Koordinaten bestimmte Basis des Tangentialraums bei einem Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ besteht aus den drei Vektoren:

$$\begin{aligned} \vec{f}_r(p) &= \frac{\partial \vec{x}(r, \varphi, \theta)}{\partial r} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \\ \vec{f}_\varphi(p) &= \frac{\partial \vec{x}(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi \sin \theta, 0) \\ \vec{f}_\theta(p) &= \frac{\partial \vec{x}(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, -r \sin \theta). \end{aligned}$$

Auch in Kugelkoordinaten sind die drei Tangentialvektoren zu den Parametern r , φ und θ orthogonal. Für die Komponenten des metrischen Tensors erhalten wir:

$$g = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{r\theta} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\varphi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (10.39)$$

und das Volumenelement ist:

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \quad (10.40)$$

10.6.3 Die Kugeloberfläche

Die beiden bisherigen Beispiele bezogen sich auf Koordinatentransformationen, nun wollen wir mit der Kugeloberfläche noch ein Beispiel für die Einbettung einer Fläche in den \mathbb{R}^3 betrachten. Eine mögliche Beschreibung der Kugeloberfläche folgt aus den Kugelkoordinaten, wobei wir nun den Radius R nicht mehr als Koordinate sondern als festen Parameter interpretieren. Die Koordinaten der Kugeloberfläche sind somit die beiden Winkel (φ, θ) . Die beiden Basisvektoren für den Tangentialraum an einem Punkt auf der Kugeloberfläche (ausgedrückt durch seine Koordinaten (φ, θ)) sind daher:

$$\begin{aligned} \vec{f}_\varphi(p) &= \frac{\partial \vec{x}(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \sin \theta, 0) \\ \vec{f}_\theta(p) &= \frac{\partial \vec{x}(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \theta). \end{aligned}$$

Die Komponenten des metrischen Tensors bezüglich dieser Basisvektoren des Tangentialraums lauten:

$$g = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}. \quad (10.41)$$

Das „Volumenelement“ (das nun der Betrag eines Flächenelements ist) für eine Integration über die Kugeloberfläche (nun zu festem R) ist

$$df = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (10.42)$$

Wir können die Kugeloberfläche auch durch die Koordinaten beschreiben, die wir durch Auflösen von der impliziten Gleichung

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2 \quad (10.43)$$

nach einer Komponente erhalten. Wir wählen die Parameterdarstellung für die „nördliche“ Hemisphäre:

$$(u, v) \rightarrow (u, v, +\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}). \quad (10.44)$$

Die beiden Tangentialvektoren an den Punkt p (gekennzeichnet durch die Koordinaten (u, v)) sind:

$$\begin{aligned} \vec{f}_u(p) &= \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right) \\ \vec{f}_v(p) &= \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v} = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right). \end{aligned}$$

Nun sind die beiden durch das Koordinatensystem definierten Basisvektoren im Allgemeinen weder Einheitsvektoren noch orthogonal und wir erhalten für die Metrik:

$$g = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} & \frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2} \\ \frac{vu}{R^2 - u^2 - v^2} & 1 + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}. \quad (10.45)$$

Offensichtlich sind die Elemente dieser Metrik für $u^2 + v^2 = R^2$ – also auf dem Äquator – nicht mehr definiert (bzw. gehen gegen unendlich). Dies ist ein typisches Beispiel für eine Koordinatensingularität, denn der Äquator ist natürlich keine singuläre Punktmenge der Kugeloberfläche, sondern das gewählte Koordinatensystem ist dort nicht mehr sinnvoll.

Das „Volumen“-element in diesen Koordinaten ist

$$df = \sqrt{\det g} \, du \, dv = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2}{R^2}}} \, du \, dv. \quad (10.46)$$

10.7 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Wir betrachten im Folgenden speziell den \mathbb{R}^3 (bzw. bei Polarkoordinaten auch den \mathbb{R}^2) und führen einen Wechsel der Koordinaten durch:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}(u^1, u^2, u^3). \quad (10.47)$$

Auch hier können wir an jedem Punkt p , charakterisiert durch seine Koordinaten (u^1, u^2, u^3) , die „Tangentialvektoren“ bilden:

$$\vec{f}(p)_\alpha = \frac{\partial \vec{x}(u^1, u^2, u^3)}{\partial u^\alpha}. \quad (10.48)$$

Die Bedingung, dass ein Koordinatenwechsel bijektiv sein soll, bedeutet wiederum, dass das von den Tangentialvektoren aufgespannte Parallelepipid nicht entartet sein soll. Mit anderen Worten: Die Jakobi-Determinante (vgl. Gl. 10.24) ist nicht null. Da die Jakobi-Determinante gleich der Wurzel aus der Determinante der Metrik ist (Gl. 10.29), bedeutet dies gleichzeitig, dass die Determinante der Metrik von null verschieden sein muss.

Wenn man es mit Vektorfeldern in krummlinigen Koordinaten zu tun hat, muss man sich entscheiden, bezüglich welcher Basisvektoren man die Komponenten der Vektoren ausdrücken möchte. Bei einem kovarianten Vektorfeld bietet sich die kovariante Basis $\{\vec{f}_\alpha\}$ an, bei einem kontravarianten Vektor (beispielsweise dem Gradientenfeld zu einem Skalarfeld) sollte man die reziproke (bzw. duale) Basis wählen. In vielen Fällen wird das auch so gehandhabt.

Leider hat sich bei orthogonalen Basisvektoren $\{\vec{f}_\alpha\}$ (wenn also $g_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$ gilt – dazu zählen die meisten der gängigen Koordinatensysteme wie Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten) die Konvention eingebürgert, eine orthonormierte Basis $\{\vec{e}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}\vec{f}_\alpha\}$ zu wählen. Der Vorteil ist, dass man nicht zwischen der Basis und ihrer reziproken Basis unterscheiden muss (bei orthonormalen Basisvektoren sind die beiden Basen gleich), der Nachteil ist jedoch, dass die Ausdrücke nicht mehr manifest ko- bzw. kontravariant sind, was man schon an der Definition der normierten Basisvektoren erkennt (hier tritt auf einer Seite der Index α dreimal auf und es wird nirgendwo summiert).

Wir werden nur den Gradienten und die Divergenz für krummlinige Koordinaten berechnen, mehr oder weniger um das Prinzip zu verdeutlichen. Die Rotation wird man als Physiker selten in krummlinigen Koordinaten ausdrücken, außerdem findet man die Formeln in verschiedenen Formelsammlungen. Der Laplace-Operator tritt jedoch in der Physik häufig in krummlinigen Koordinaten auf.

10.7.1 Reziproke Basis in krummlinigen Koordinaten

Zu der kovarianten Basis $\{\vec{f}(p)_\alpha\}$ können wir wieder die reziproke Basis $\{\vec{f}(p)^\alpha\}$ über die Bedingungen Gl. 10.11 bestimmen.

Nun besitzen die reziproken Basisvektoren allerdings noch eine weitere geometrische Bedeutung. Da die Abbildung $(x^1, x^2, x^3) \rightarrow (u^1, u^2, u^3)$ bijektiv sein soll (zumindest an den Stellen, wo die krummlinigen Koordinaten wohl definiert sind) gilt: (vgl. Gl. 10.7):

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} = \delta_\beta^\alpha. \quad (10.49)$$

Hier steht das Skalarprodukt von \vec{f}_β , dessen i -te Komponente $\partial x^i / \partial u^\beta$ ist, und einem Vektor, dessen i -te Komponente $\partial u^\alpha / \partial x^i$ ist. Offenbar handelt es sich bei diesem Vektor um den reziproken Basisvektor \vec{f}^α . Damit erhalten wir die Beziehung

$$\vec{f}^\alpha = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^2}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3} \right) = \vec{\nabla} u^\alpha, \quad (10.50)$$

der reziproke Basisvektor ist also der Gradient der Koordinatenfunktion u^α . Dieser Gradient steht senkrecht auf der „Äquipotentialfläche“ von u^α (also dem 2-dimensionalen Unterraum von \mathbb{R}^3 , auf dem u^α konstant ist) und damit senkrecht auf den anderen beiden Tangentialvektoren (diese erhält man durch Ableitung von $\vec{x}(u^1, \dots, u^3)$ nach u^β bei festgehaltenem u^α).

Man beachte auch, dass bei orthogonalen Basisvektoren die normierten Basisvektoren $\{\vec{e}^\alpha\}$ (wie schon erwähnt, spielt es hier keine Rolle, ob der Index oben oder unten steht) über die Beziehung $\vec{e}^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \vec{f}^\alpha$ mit der reziproken Basis in Beziehung steht.

10.7.2 Der Gradient in krummlinigen Koordinaten

Bisher haben wir den Gradient einer skalaren Funktion $\Phi(\vec{x}(x^1, x^2, x^3))$ in kartesischen Koordinaten betrachtet und es galt:

$$\vec{\nabla} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right) \quad \text{bzw.} \quad (\vec{\nabla} \Phi)_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \partial_i \Phi. \quad (10.51)$$

Nun führen wir allgemeine Koordinaten $\{u^\alpha\}$ ein und betrachten das skalare Feld als Funktion dieser Koordinaten. Als Funktion der Koordinaten handelt es sich natürlich um eine andere Funktionsvorschrift, daher verwende ich das Symbol $\hat{\Phi}(u^1, u^2, u^3)$, aber für einen festen Punkt (in kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3)) soll der Funktionswert natürlich derselbe sein. Das bedeutet:

$$\hat{\Phi}(u^1(x^1, x^2, x^3), u^2(x^1, x^2, x^3), u^3(x^1, x^2, x^3)) = \Phi(x^1, x^2, x^3), \quad (10.52)$$

wobei $u^\alpha(x^1, x^2, x^3)$ die Koordinate u^α aufgefasst als Funktion der kartesischen Koordinaten $\{x^i\}$ ist. Die Tatsache, dass in der Physik oft nicht zwischen diesen beiden Funktionen unterschieden wird (und daher dasselbe Symbol verwendet wird), führt häufig zu Missverständnissen.

Für den Gradienten gilt nun:

$$\vec{\nabla}\Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \vec{e}^i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \vec{e}^i = \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial u^\alpha} \vec{f}^\alpha. \quad (10.53)$$

($\{\vec{e}^i\}$ ist die Standardbasis im \mathbb{R}^3 .) Man beachte, dass dies eine Entwicklung des Gradienten nach der reziproken Basis ist (die, da der Gradient ein kontravarianter Vektor ist, auch die angemessene Basis ist).

Bezüglich der orthonormalen Basis bei orthogonalen krummlinigen Koordinaten gilt:

$$\vec{\nabla}\Phi = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial u^\alpha} \vec{e}^\alpha, \quad (10.54)$$

wobei

$$h_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = |\vec{f}_\alpha| = |\vec{f}^\alpha|^{-1}. \quad (10.55)$$

Diese Koeffizienten findet man oft in Formelsammlungen für die Komponenten des Gradienten in krummlinigen Koordinaten.

10.7.3 * Divergenz in krummlinigen Koordinaten

Betrachten wir nun Ableitungen von Vektorfeldern in krummlinigen Koordinaten müssen wir berücksichtigen, dass nicht nur die Felder selbst sondern auch die Basisvektoren von dem jeweiligen Punkt p abhängen.

Zunächst untersuchen wir, wie sich die Basisvektoren \vec{f}_α verändern, wenn man sie nach einer Koordinate ableitet. Wir definieren

$$\frac{\partial\vec{f}_\alpha(p)}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(p) \vec{f}_\gamma(p) \quad (10.56)$$

(über γ ist zu summieren). Dies bringt lediglich zum Ausdruck, dass bei krummlinigen Koordinaten die Änderung eines Basisvektors \vec{f}_α nach einer Koordinate u^β wiederum ein Vektor ist und sich somit als Linearkombination der Basis schreiben lässt. Die Symbole $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ bezeichnet man als *Christoffel-Symbole*.²

²Hier ist wichtig, dass wir es nicht mit einer Einbettung ($d < n$) sondern einer Koordinatentransformation ($d = n$) zu tun haben. Andernfalls muss die Ableitung eines Tangentenvektors nach einer Koordinate nicht unbedingt wieder im Tangentialraum liegen, sondern kann auch Komponenten senkrecht dazu haben, wie wir es schon bei der Beschleunigung einer Kurve gesehen haben. Die Projektion des Vektors $\partial\vec{f}_\alpha/\partial u^\beta$ auf den Tangentialraum lässt sich wiederum durch die Christoffel-Symbole aus-

Für die weiteren Überlegungen ist die Unterscheidung zwischen der Angabe des Feldes in kartesischen Koordinaten und in krummlinigen Koordinaten besonders wichtig, daher verwende ich folgende Notation: \vec{E} ist das Vektorfeld, das noch unabhängig von der Wahl der Koordinaten einem Punkt des \mathbb{R}^3 einen Vektor zuordnet. $E^i = E_i$ (Symbole i, j, k etc.) bezieht sich auf die Komponenten des Vektorfeldes in kartesischen Koordinaten $\{x^i = x_i\}$ mit der Basis $\{\vec{e}_i = \vec{e}^i\}$, d.h. $E^i = E^i(x^1, x^2, x^3)$ etc. Entsprechend bezeichnet E^α (Symbole α, β, γ etc.) eine Komponente des Vektorfeldes bezüglich der Basis \vec{f}_α und aufgefasst als Funktion der Koordinaten $\{u^\alpha\}$ (hier ist die Stellung der Indizes natürlich wichtig).

Für die Berechnung der Divergenz in krummlinigen Koordinaten müssen wir die (kartesische) Komponente E^i zunächst in krummlinigen Koordinaten ausdrücken. Da $E_i = \vec{E} \cdot \vec{e}_i$, drücken wir zunächst den kartesischen Basisvektor \vec{e}_i in krummlinigen Koordinaten aus. Es gilt

$$\vec{f}_\alpha = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \vec{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \vec{e}_i = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \vec{f}_\alpha. \quad (10.57)$$

(Wegen $\sum_i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta} = \delta_\beta^\alpha$ sind die beiden Matrizen $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ und $\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}$ gerade invers zueinander.) Damit folgt

$$E_i = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} (\vec{E} \cdot \vec{f}_\alpha) = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} E_\alpha. \quad (10.58)$$

Die Divergenz ist nun:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} E_\alpha \right) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_i^2} E_\alpha + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial E_\alpha}{\partial u^\beta} \right) = \Delta u^\alpha E_\alpha + g^{\alpha\beta} \partial_\beta E_\alpha. \quad (10.59)$$

Man beachte, dass für den Ausdruck Δu^α die Koordinate hier als Funktion der kartesischen Koordinaten $\{x_i\}$ aufzufassen ist und somit

$$\Delta u^\alpha = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u^\alpha(x_1, x_2, x_3) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(u^1, u^2, u^3)} \quad (10.60)$$

ist. Außerdem handelt es sich in Gl. 10.59 bei den Komponenten des Vektorfeldes um die Komponenten bezüglich der reziproken Basis (der Index α steht unten). Diese können wir aber mithilfe der Metrik „hochziehen“:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \partial_\beta E^\beta + (\Delta u^\alpha g_{\alpha\beta}) E^\beta. \quad (10.61)$$

Der Faktor $\Delta u^\alpha g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha$ lässt sich durch die Christoffel-Symbole ausdrücken.

drücken. Die durch die Einbettung gegebenen Komponenten senkrecht zum Tangentialraum werden durch die sogenannte *zweite Fundamentalform* beschrieben. (Die erste Fundamentalform ist die Metrik.)

10.7.4 Der Laplace-Operator

Für den Laplace-Operator gebe ich eine einfache Ableitung an, die nur in krummlinigen Koordinaten eines flachen Raums (also \mathbb{R}^n) möglich ist, nicht in verallgemeinerten Koordinatensystemen auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten. Das skalare Feld $\Phi(p)$ ist für einen Punkt p im \mathbb{R}^3 definiert; dieser Wert ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Ausgedrückt in Koordinaten gilt daher wieder

$$\hat{\Phi}(u^1(\{x^i\}), u^2(\{x^i\}), u^3(\{x^i\})) = \Phi(x^1, x^2, x^3). \quad (10.62)$$

Für den Laplace-Operator erhalten wir:

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial u^\alpha} \right) = \Delta u^\alpha \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial u^\alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}. \quad (10.63)$$

(Man vergleiche die ähnliche Herleitung bei der Divergenz.) Auch hier ist Δu^α der Laplace-Operator der Koordinatenfunktion u^α , aufgefasst als Funktion der kartesischen Koordinaten. Nach Berechnung dieser Funktion ersetzt man die kartesischen Koordinaten durch die verallgemeinerten Koordinaten (vgl. Gl. 10.60).

10.7.5 Gradient und Laplace-Operator in bekannten Koordinaten

Für die schon früher behandelten Beispiele (vgl. Abschnitt 10.6) sollen explizit der Gradient und der Laplace-Operator angegeben werden.

2-dimensionale Polarkoordinaten

Die Koordinaten sind $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan y/x$. Damit folgt (vgl. Gl. 10.35):

$$\Delta r = \frac{1}{r} \quad \Delta \varphi = 0 \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{\varphi\varphi} & g^{\varphi r} \\ g^{r\varphi} & g^{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.64)$$

Der Gradient ist (ausgedrückt bezüglich der Orthonormalbasis):

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \varphi} (-\sin \varphi, \cos \varphi) + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} (\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (10.65)$$

und für den Laplace-Operator erhalten wir:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \varphi^2}. \quad (10.66)$$

Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten (r, φ, z) sind ähnlich wie Polarkoordinaten, lediglich die dritte Komponente z kommt „trivial“ hinzu:

Gradient:

$$\vec{\nabla}\hat{\Phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\varphi} (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r} (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial z} (0, 0, 1). \quad (10.67)$$

Laplace-Operator:

$$\Delta\hat{\Phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial z^2}. \quad (10.68)$$

Kugelkoordinaten

Nun gilt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (10.69)$$

Eine etwas längere Rechnung ergibt:

$$\Delta r = \frac{2}{r} \quad \Delta\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \Delta\varphi = 0. \quad (10.70)$$

Mit der Metrik (Gl. 10.39; wegen der Orthogonalität hat die inverse Metrik auf der Diagonalen die Kehrwerte der Metrik) folgt:

Gradient:

$$\vec{\nabla}\hat{\Phi} = \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (10.71)$$

mit den normierten Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta) \\ \vec{e}_\theta &= (\cos\varphi \cos\theta, \sin\varphi \cos\theta, -\sin\theta) \\ \vec{e}_\varphi &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0). \end{aligned}$$

Laplace-Operator:

$$\Delta\hat{\Phi} = \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\varphi^2} \quad (10.72)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\varphi^2}. \quad (10.73)$$

Kapitel 11

* Komplexe Funktionen und Fourier-Transformation

Dieses Kapitel ist eine elementare Einführung in die Theorie analytischer Funktionen – kurz *Funktionentheorie*. Viele Beweise werden nur angedeutet. Außerdem werde ich am Ende auf Integraltransformationen, insbesondere die Fourier-Reihen und Fourier-Transformation, eingehen.

11.1 Analytische und holomorphe Funktionen

Wir hatten schon den Begriff der *reell-analytischen* Funktion eingeführt (siehe S. 137). Allgemein heißt eine Funktion *analytisch* in einer Umgebung U eines Punktes $z_0 \in U$, wenn sie sich in der Umgebung U als Potenzreihe schreiben lässt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (11.1)$$

Bei einer reell-analytischen Funktion ist $U \subset \mathbb{R}$, bei einer komplex-analytischen Funktion ist $U \subset \mathbb{C}$.

Definition: Eine komplexwertige Funktion $f(z)$ auf einem Bereich der komplexen Ebene heißt *holomorph* [*holomorphic*] an einem Punkt z , wenn die Ableitung $f'(z)$ der Funktion am Punkt z , definiert durch

$$f(z + h) = f(z) + f'(z) \cdot h + o(h),$$

eindeutig ist. Ist eine Funktion $f(z)$ in allen Punkten einer offenen Umgebung D in der komplexen Ebene holomorph, so bezeichnet man die Funktion als holomorph auf D .

Komplexe Zahlen $z = x + iy$ lassen sich als Elemente der Zahlenebene \mathbb{R}^2 interpretieren. Daher kann man eine komplexe Funktion auch als zweikomponentige

Funktion auf dem \mathbb{R}^2 darstellen: $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Umgekehrt ist aber nicht jede zweikomponentige Funktion auf dem \mathbb{R}^2 holomorph. Die Bedingung der Eindeutigkeit der Ableitung ist sehr einschränkend.

Wir betrachten eine beliebige, einmal stetig differenzierbare zweikomponentige Funktion auf dem \mathbb{R}^2 , also $(u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren die Ableitung nach der allgemeinen Vorschrift:

$$(u(x + h_1, y + h_2), v(x + h_1, y + h_2)) \quad (11.2)$$

$$= (u(x, y), v(x, y)) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2, \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 \right) + o(h)$$

$$= (u(x, y), v(x, y)) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h). \quad (11.3)$$

Nun kommt die entscheidende Einschränkung: Der in h_i lineare Ausdruck soll sich als (komplexes) Produkt aus der komplexen Zahl der Ableitung $f'(z) = (a(x, y), b(x, y))$ mit der komplexen Zahl $h = (h_1, h_2)$ schreiben lassen. Damit muss gelten:

$$f'(z) \cdot h = (ah_1 - bh_2, ah_2 + bh_1) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich mit Gl. 11.3 erkennen wir, dass dies nur möglich ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (11.4)$$

Man bezeichnet diese beiden Gleichungen als *Cauchy-Gleichungen* oder auch als *Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen*. Es handelt sich um Bedingungen an die Ableitungen einer 2-komponentigen Funktion auf dem \mathbb{R}^2 . Sind diese Bedingungen erfüllt, ist die Funktion holomorph.

Etwas anders ausgedrückt kann man auch sagen, dass die 2×2 Matrix der ersten Ableitung einer Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Matrixdarstellung einer komplexen Zahl entspricht (vgl. 4.10), wenn die Cauchy-Gleichungen erfüllt sind.

Aufgrund der Cauchy-Gleichungen erfüllen die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ beide die zweidimensionale Laplace-Gleichung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) \equiv \Delta u(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta v(x, y) = 0. \quad (11.5)$$

Damit sind holomorphe Funktionen geeignete Kandidaten zur Lösung von zweidimensionalen Laplace-Gleichungen, wie sie beispielsweise in der Potenzialtheorie oder auch der Strömungslehre auftreten.

Als einfache Beispiele betrachten wir die Funktionen

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \quad (11.6)$$

$$f(z) = z^3 = x(x^2 - y^2) - 2xy^2 + i(y(x^2 - y^2) + 2x^2y) \quad (11.7)$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, sind sowohl die Real- als auch die Imaginärteile Lösungen der zweidimensionalen Laplace-Gleichung.

11.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

Eine komplexwertige stetige Funktion lässt sich entlang eines geschlossenen Weges integrieren. Ein geschlossener Weg $\gamma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $t \mapsto z(t)$ ist dabei wiederum eine Abbildung von einem (reellwertigen) Intervall (das wir der Einfachheit halber gleich dem Intervall $[0, 2\pi]$ gewählt haben) in die komplexen Zahlen, sodass $z(0) = z(2\pi)$. Das Integral ist dann

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \left(f(z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (11.8)$$

Mit der Darstellung $f = u(x, y) + iv(x, y)$ und $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$ können wir explizit schreiben:

$$\int_0^{2\pi} \left(f(z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(u(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt \quad (11.9)$$

$$+ i \int_0^{2\pi} \left(u(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} + v(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} \right) dt \quad (11.10)$$

Auf der rechten Seite stehen nun zwei gewöhnliche Riemann'sche Integrale entlang geschlossener Wege. Diese Wege liegen zwar in der xy -Ebene, wir können aber trotzdem den Stokes'schen Satz aus Kapitel 9 anwenden, wenn wir uns die von dem Weg berandete Fläche ebenfalls als Fläche in der xy -Ebene vorstellen und das „Vektorfeld“ als ein Feld, dessen z -Komponente verschwindet und das nur von x und y abhängt. Die Rotation dieses Vektorfeldes hat somit nur eine z -Komponente, ist also parallel zum Normalvektor der Fläche in der xy -Ebene, über die beim Stokes'schen Satz integriert wird.

Für den Realteil ist das Vektorfeld, das entlang des geschlossenen Weges integriert wird, durch $\vec{F}_r = (u, -v)$ gegeben. Aufgrund der Cauchy-Gleichungen $\partial_y u = -\partial_x v$ verschwindet die Rotation dieses Feldes und damit auch der Realteil des Integrals. Für den Imaginärteil wählen wir $\vec{F}_i = (v, u)$. Wiederum folgt aus den Cauchy-Gleichungen $\partial_y v = \partial_x u$, dass die Rotation dieses Vektorfeldes verschwindet und damit auch der Imaginärteil des Integrals.

Integralsatz von Cauchy: Sei $f(z)$ eine in einem (einfach wegzusammenhängenden) Gebiet U holomorphe Funktion, $D \subset U$ und $\gamma = \partial D$ der Rand von D (der ganz in U liegen soll). Dann gilt

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (11.11)$$

Nun berechnen wir das Wegintegral um den Nullpunkt über die komplexe Funktion $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Für $n \geq 0$ ist $f(z)$ holomorph (sogar in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C}), sodass in diesem Fall das Integral nach dem Cauchy'schen Integralsatz verschwinden sollte. Da $f(z)$ außerhalb von $z = 0$ immer holomorph ist, können wir einen Weg um den Punkt $z = 0$ immer als Kreisweg mit Radius r wählen. Mit der Parametrisierung $z = z(\varphi) = re^{i\varphi}$ folgt $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$ und wir erhalten

$$\oint_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\varphi} ire^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \quad (11.12)$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (11.13)$$

Für $n \neq -1$ verschwindet das Integral über φ , da über ein Vielfaches der vollen Periode der Sinus- bzw. Kosinus-Funktion integriert wird.

Erste Integralgleichung von Cauchy: Sei wiederum $f(z)$ eine in einem (einfach wegzusammenhängenden) Gebiet U holomorphe Funktion und γ ein geschlossener Weg in U . z liege innerhalb des Gebiets, das von dem Weg umrandet wird. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z). \quad (11.14)$$

Liegt z außerhalb des Wegs γ , ist das Integral null (nach dem Integralsatz von Cauchy).

Zum Beweis verwenden wir die Tatsache, dass wir γ beliebig eng um den Punkt z zusammenziehen können. Da f stetig und holomorph sein soll, ist für einen solchen Weg $f(\zeta) = f(z)$ und damit folgt das Ergebnis aus der obigen Integralformel.

Leiten wir die beiden Seiten von Gl. 11.14 n -mal nach z ab, erhalten wir:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z). \quad (11.15)$$

Auf der linken Seite steht das Integral über eine holomorphe Funktion (ausgenommen am Punkt $\zeta = z$, dieser wird jedoch nicht angenommen, sofern der Weg außen herumläuft), rechts steht die n -te Ableitung der Funktion f . Damit ist gezeigt, dass

eine holomorphe Funktion beliebig viele Ableitungen besitzt. Da man z innerhalb des Bereichs, in dem f holomorph ist, beliebig wählen kann, ist $f(z)$ durch diese Integrale eindeutig definiert.

Damit erhalten wir folgende Äquivalenzen von Aussagen über eine Funktion in der Umgebung einer komplexen Zahl (aus [17]):

1. Eine Funktion ist einmal komplex differenzierbar.
2. Eine Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar.
3. Real- und Imaginärteil erfüllen die Cauchy-Gleichungen und sind einmal stetig reell-differenzierbar.
4. Die Funktion ist komplex-analytisch (d.h., sie lässt sich in eine komplexe Potenzreihe entwickeln).
5. Die Funktion ist stetig und das Wegintegral der Funktion über einen beliebigen geschlossenen zusammenziehbaren Weg verschwindet.
6. Die Funktionswerte innerhalb einer Kreisscheibe lassen sich aus den Funktionswerten auf dem Rand der Kreisscheibe nach dem Cauchy'schen Integralsatz bestimmen.

11.3 Analytische Fortsetzung

Aus den Abschlussbemerkungen des letzten Abschnitts ergibt sich, dass $f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung besitzt und in seinem Holomorphiebereich in der Umgebung eines Punktes z_0 durch

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (11.16)$$

dargestellt werden kann. Eine holomorphe Funktion ist also auch analytisch (manchmal betont man in diesem Fall *komplex-analytisch*). Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist mindestens so groß, wie der minimale Abstand von z_0 bis zu einem Randpunkt von U .

Es seien zwei Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ gegeben, $f_1(z)$ sei holomorph in dem Bereich U_1 und $f_2(z)$ sei holomorph in U_2 . Weiterhin sei $U_1 \cap U_2 = U$ eine nicht-leere offene Menge, und $f_1(z) = f_2(z)$ für $z \in U$, dann bezeichnet man f_2 als die analytische Fortsetzung von f_1 (und umgekehrt). Es gibt dann eine eindeutige Funktion $f(z)$, die in dem Gebiet $U_1 \cup U_2$ holomorph ist und in U_1 mit f_1 und in U_2 mit f_2 übereinstimmt. Diese Konstruktion erlaubt die analytische Fortsetzung von Funktionen, die zunächst nur in einem eingeschränkten Gebiet definiert sind, zu einem größeren Gebiet.

Da eine holomorphe Funktion in der Umgebung von regulären Punkten durch ihre Potenzreihenentwicklung eindeutig gegeben ist, kann man versuchen, durch geeignete Wahl von Punkten z_i , bei denen die Funktion holomorph ist, sodass sich jeweils Kreise um z_i mit den jeweiligen Konvergenzradien überschneiden, die Funktionen analytisch fortzusetzen. Oftmals geschieht dies auch durch Integraldarstellungen der Funktionen.

Bei manchen Punkten, an denen eine Funktion nicht holomorph ist, ist eine analytische Fortsetzung um diese Punkte herum möglich. Dabei kann es vorkommen, dass die Funktion in Bereichen, die sich überlappen, die aber entlang unterschiedlicher (nicht zusammenziehbarer) Wege durch analytische Fortsetzung entstanden sind, nicht dieselben Werte annehmen. Ein Beispiel ist die Wurzelfunktion $f(z) = z^{1/2}$, die bei $z = 0$ nicht holomorph (und damit dort auch nicht analytisch) ist. Die Zweideutigkeit des Vorzeichens der Wurzelfunktion hat zur Folge, dass eine analytische Fortsetzung um den Punkt $z = 0$ herum zum jeweils negativen Vorzeichen führt. Das erkennt man am deutlichsten, wenn man die Darstellung $z = re^{i\varphi}$ wählt, wodurch $f(z) = +\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ wird. Erst eine „Drehung“ um 4π ergibt wieder denselben Funktionswert.

In diesem Fall muss man die komplexe Ebene zu einer sogenannten *Riemann'schen Fläche* erweitern. Bei der Wurzelfunktion ist die zugehörige Riemann'sche Fläche die *doppelte Überlagerung* der komplexen Ebene. Bei der Logarithmus-Funktion $f(z) = \ln z$ gibt es sogar eine unendliche Überlagerung, da ein Punkt $z = re^{i\varphi}$ auf $f(z) = \ln r + i\varphi$ abgebildet wird und somit bei einem Umlauf in der komplexen Ebene $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ das Bild in einer neuen Ebene der Riemann'schen Fläche landet.

Besitzt eine Funktion mehrere Verzweigungsstellen dieser Art (z.B. $f(z) = \sqrt{z(z-1)(z+1)}$ mit den Verzweigungspunkten $z = 0, +1, -1$), kann die zugehörige Riemann'sche Fläche recht kompliziert werden.

11.4 Meromorphe Funktionen

Eine gebrochen rationale Funktion der Form

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^N b_n z^n} \quad (11.17)$$

ist überall in \mathbb{C} holomorph, außer bei den Nullstellen des Polynoms im Nenner sowie eventuell bei $z = \infty$. Funktionen dieser Art nennt man *meromorph*.

Allgemein bezeichnet man eine Funktion auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ als meromorph, wenn sie nur an isolierten Punkten nicht holomorph ist und an diesen isolierten Punkten Polstellen endlicher Ordnung besitzt. In der Umgebung eines solchen Punkts

z_0 besitzt die Funktion eine Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (11.18)$$

Eine solche Entwicklung bezeichnet man als *Laurent-Reihe*. N nennt man die Ordnung der Polstelle. Die Koeffizienten a_n erhält man durch die Integralformel:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = a_n, \quad (11.19)$$

wobei nun $n \geq -N$ auch negative Werte annehmen kann.

Ist $f(z)$ eine meromorphe Funktion in einem Bereich U , dann ist auch der Kehrwert $1/f(z)$ eine meromorphe Funktion in diesem Gebiet.

11.5 Integraltransformationen

Eine Abbildung $f \mapsto g$ von einer Funktion $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder beispielsweise auch \mathbb{R}^n) bezeichnet man als lineare Integraltransformation, wenn es eine Funktion $K(x, y)$ gibt, sodass

$$g(x) = \int K(x, y) f(y) dy. \quad (11.20)$$

$K(x, y)$ nennt man den *Kern* der Integraltransformation. Eine solche Transformation ist linear in dem Sinne, dass die Funktion $\alpha f_1 + \beta f_2$ auf die Funktion $\alpha g_1 + \beta g_2$ abgebildet wird, wobei g_i die Transformierte von f_i ist.

Lässt man für den Kern $K(x, y)$ nicht nur gewöhnliche (stückweise stetige) Funktionen zu (sodass die Riemann'schen bzw. Lebesgue'schen Integrale existieren), sondern sogenannte *verallgemeinerte Funktionen* (diese nennt man auch *Distributionen*), kann man jede lineare Abbildung auf einem Funktionenraum durch eine solche Integraltransformation darstellen. Distributionen sind durch ihre „Wirkung“ (im Sinne der Integraltransformation) auf eine Funktion f definiert. Beispielsweise ist die sogenannte δ -Funktion (die im strengen Sinne keine Funktion ist) definiert durch die Bedingung

$$f(x) = \int \delta(x - y) f(y) dy. \quad (11.21)$$

Eine Integraltransformation der Form 11.20 bezeichnet man als umkehrbar, wenn es eine (verallgemeinerte) Funktion $K^{-1}(x, y)$ gibt, sodass

$$f(y) = \int K^{-1}(y, x) g(x) dx. \quad (11.22)$$

oder allgemeiner

$$f(z) = \int dy \int dx K^{-1}(z, y) K(y, x) f(x) \quad (11.23)$$

für alle Funktionen $f(x)$ in dem Definitionsbereich der Integraltransformation. Durch Vergleich mit Gl. 11.21 kann man dies auch (symbolisch) in der Form

$$\delta(z - x) = \int K^{-1}(z, y)K(y, x) dy \quad (11.24)$$

schreiben.

11.5.1 Faltungen

Eine spezielle Form der linearen Integraltransformation ist die Faltung zweier Funktionen. Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Funktionen über dem \mathbb{R}^n , dann bezeichnet man die Funktion:

$$(f \star g)(y) = \int g(y - x)f(x) d^n x \quad (11.25)$$

als die *Faltung* von f mit g . (Es gibt auch Verallgemeinerungen für komplexwertige Funktionen.)

Faltungen spielen beispielsweise eine wichtige Rolle bei der Glättung von Funktionen oder von Datensätzen. Man stelle sich eine sehr schwankende bzw. verrauschte Datenreihe vor (beispielsweise die täglichen Niederschlagswerte in einer bestimmten Region). Interessiert ist man jedoch an einem Mittelwert für einen Monat oder einen längeren Zeitraum. Dann kann man für jeden Tag die mittlere Niederschlagsmenge der letzten 30 Tage berechnen und erhält so eine Kurve, die weitaus weniger schwankt als die täglichen Daten. Ein anderes Beispiel findet man bei der Chart-Analyse von Aktien, wo man oft den Wert der Aktie über die letzten 20, 28, 50, 100 oder 200 Tage mittelt. Man nennt das dann z.B. den GD 200 (Gleitender Durchschnitt über 200 Tage). Dabei wird der Mittelwert der Aktie für die letzten 200 Tage berechnet. Für Börsianer ist es von Interesse, ob dieser Mittelwert die Tageskurve von oben oder unten schneidet. In beiden Fällen wird die tatsächliche Datenfunktion $f(x)$ (die auch diskret sein kann, dann wird das Integral durch eine Summe ersetzt) mit einer Funktion $g(y)$ gefaltet, wobei $g(y)$ im Fall des GD 200 eine Funktion ist, die den Wert $1/200$ annimmt für $0 \leq y \leq 200$ und ansonsten den Wert 0 hat.

Etwas ausgefeiltere Glättungsverfahren verwenden beispielsweise eine Gaußfunktion. Wenn man an den durch ein Rauschen bedingten Schwankungen einer Funktion $f(x)$ innerhalb eines Bereichs $\Delta x < \sigma$ nicht interessiert ist, bildet man:

$$F_{\Delta x}(y) = \int g(x - y)f(x) dx \quad (11.26)$$

mit

$$g(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (11.27)$$

Durch diese Faltung wird die Funktion f zu der Funktion F geglättet. F enthält nahezu alle Information über das Verhalten von f auf „großen Skalen“ ($\Delta x \gg \sigma$), wohingegen

das Verhalten von f auf kleinen Skalen ($\Delta x \ll \sigma$) praktisch herausgefiltert wurde. Da die Gauß-Funktion glatt ist, gibt es zwischen diesen beiden Bereichen keinen scharfen Übergang.

11.6 Fourier-Reihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und einen festen Wert L , die sogenannte Periode. Eine solche Funktion lässt sich auch als Funktion auf dem Kreis (mit Umfang L oder Radius $L/2\pi$) interpretieren.

Periodische Funktionen lassen sich unter sehr allgemeinen Bedingungen nach Sinus- bzw. Kosinusfunktionen entwickeln. Diese Entwicklung bezeichnet man als Fourier-Reihe.

11.6.1 Die Entwicklungskoeffizienten

Spezielle periodische Funktionen mit der Periode L sind

$$\sin \frac{2\pi nx}{L} \quad \text{und} \quad \cos \frac{2\pi nx}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.28)$$

sowie auch die konstante Funktion. Die Zahl n kann dabei eine beliebige natürliche Zahl sein. Den Fall $f = \text{const.}$ erhält man auch, indem man für die Kosinusfunktionen den Wert $n = 0$ zulässt.

Der französische Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) entdeckte im Zusammenhang seinen Untersuchungen zur Ausbreitung von Wärme, dass man periodische Funktionen nach den oben angegebenen Sinus- und Kosinusfunktionen entwickeln kann. Wie sich später herausstellte, gilt dies für alle periodischen differenzierbaren Funktionen. Man kann die Differenzierbarkeit durch stückweise Stetigkeit ersetzen, allerdings gilt die Konvergenz nur noch „fast überall“ (an den Unstetigkeitsstellen kann es passieren, dass der genaue Funktionswert durch die Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen nicht angenommen wird).

Es gilt also für eine periodische Funktion (Periode L):

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{L} \right) \quad (11.29)$$

mit geeigneten Koeffizienten a_n und b_n (ich werde in Zukunft nicht immer betonen, dass solche Gleichungen im Folgenden nur immer „fast überall“ gelten; für differenzierbare Funktionen gelten sie sogar exakt).

Eine solche Darstellung wäre vergleichsweise nutzlos, könnte man die Koeffizienten $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ nicht auch leicht berechnen. Dazu einige Vorbemerkungen: Für

die Sinus- und Kosinusfunktionen gilt

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx = 0 \quad \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (11.30)$$

Es gilt noch allgemeiner:

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx &= \frac{L}{2} \delta_{mn} \\ \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx &= \frac{L}{2} \delta_{mn} \\ \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx &= 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (11.31)$$

wobei hier $\delta_{mn} = 1$ für $m = n$ und $\delta_{mn} = 0$ für $n \neq m$ das Kronecker-Delta-Symbol für unendliche viele Indizes darstellt. Zum Beweis kann man folgende Additionstheoreme der Winkelfunktionen ausnutzen:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Zusammen mit Gl. 11.30 erhält man daraus die obigen Relationen. Für $m = n$ erhält man in den oberen beiden Fällen die Quadrate von Sinus- bzw. Kosinusfunktionen (und aus den Additionstheoremen die Konstante $\cos 0 = 1$), sodass in diesem Fall das Integral gerade den Wert $L/2$ hat.

Mit Hilfe dieser Relationen finden wir folgende Gleichungen für die Koeffizienten in Gl. 11.29:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (11.33)$$

Anschaulich bedeuten die Koeffizienten a_n bzw. b_n , mit welcher Amplitude eine reine Kosinus- bzw. Sinusfunktion in einer allgemeinen periodischen Funktionen enthalten ist. In der Akustik (hier wäre x der Zeitparameter) entspricht die Fourier-Reihe der Zerlegung eines beliebigen (periodischen) Signals in harmonische Schwingungen (reine Töne). Die Schwingung zu $n = 1$ bezeichnet man dort als Grundton, und die Schwingungen zu höheren Werten von n als Obertöne oder Harmonische.

11.6.2 Der Vektorraum periodischer Funktionen

Periodische Funktionen lassen sich addieren oder mit einer reellen Zahl multiplizieren; das Ergebnis ist wieder eine periodische Funktion mit derselben Periode. Periodische Funktionen bilden also einen Vektorraum. Das gilt auch, wenn wir uns beispielsweise auf stetige oder differenzierbare periodische Funktionen einschränken.

Man kann Gleichung 11.29 als eine Zerlegung einer periodischen Funktion nach einer ausgezeichneten Basis in diesem Vektorraum interpretieren. Die Sinus- und Kosinusfunktionen bilden zu verschiedenen Werten von n die Basisvektoren (oder Basisfunktionen). Es gibt nun also unendlich viele linear unabhängige Basisvektoren; der Vektorraum der stetigen periodischen Funktionen ist demnach unendlich dimensional. (Auf einige mathematische Feinheiten in diesem Zusammenhang gehe ich gegen Ende des Abschnitts kurz ein.)

Wir können auf diesem Vektorraum auch ein Skalarprodukt definieren: Für je zwei periodische Funktionen f und g sei

$$(f, g) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)g(x) dx. \quad (11.34)$$

Zunächst ist offensichtlich, dass je zwei (integrierbaren periodischen) Funktionen auf diese Weise eine Zahl zugeordnet wird. Außerdem ist das Skalarprodukt symmetrisch, $(f, g) = (g, f)$, es ist positiv, $(f, f) \geq 0$ (und 0 nur für $f = 0$) und es ist bilinear, also linear in jedem seiner Argumente. Der Ausdruck in Gleichung 11.34 erfüllt also alle Bedingungen eines Skalarprodukts. Wie üblich, kann man eine Norm durch die Vorschrift

$$\|f\|^2 = (f, f) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)^2 dx \quad (11.35)$$

definieren. Gilt $\|f\| = 0$, so ist $f = 0$ bis auf eine Menge vom Maß 0 (also fast überall).

Die Gleichungen Gl. 11.31 bedeuten, dass die Basisfunktionen bezüglich des angegebenen Skalarprodukts orthogonal sind. Die Sinus- und Kosinusfunktionen sind sogar bezüglich dieses Skalarprodukts orthonormal. Soll auch die konstante Funktion bezüglich dieses Skalarprodukts normiert sein (und damit die gesamte Basis eine Orthonormalbasis), müssen wir für die konstante Funktion die Normierung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

wählen. Damit finden wir, dass die Funktionen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right\} \quad (\text{für } n = 1, 2, 3, \dots) \quad (11.36)$$

bezüglich des Skalarprodukts 11.34 eine Orthonormalbasis für stetige periodische Funktionen der Periode L bilden.

Die Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten (Gl. 11.33) haben ebenfalls eine vertraute Interpretation für Vektorräume mit einem Skalarprodukt und einer Orthonormalbasis: In diesem Fall erhält man die i -te Koordinate eines Vektors durch das Skalarprodukt mit dem i -ten Basisvektor: $x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i)$.

11.6.3 Ein paar mathematische Feinheiten

In unendlich dimensionalen Vektorräumen gelten zwar viele Relationen, die auch aus endlich dimensionalen Vektorräumen bekannt sind, leider gibt es aber auch Dinge, bei denen man vorsichtig sein muss.

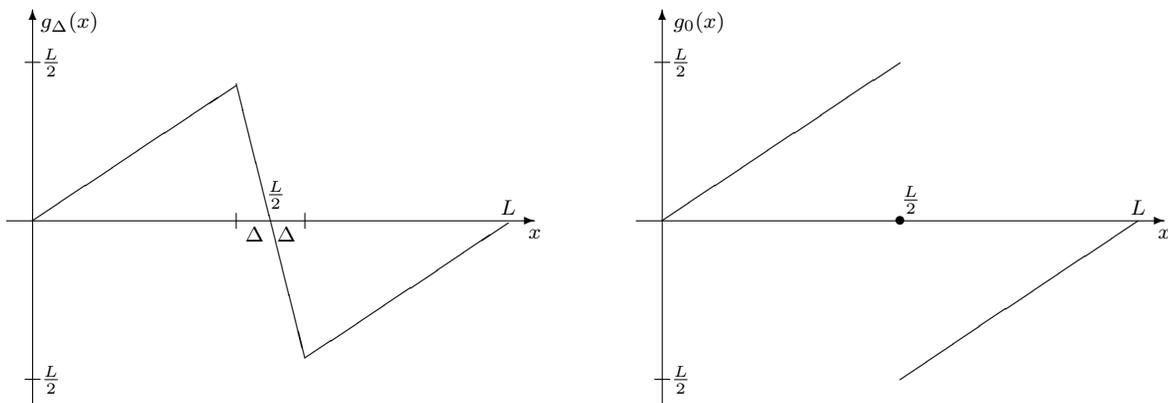


Abbildung 11.1: Eine (bezüglich des definierten Skalarprodukts) konvergente Folge von stetigen Funktionen $g_\Delta(x)$ (links) kann als Grenzwert ($\Delta \rightarrow 0$) eine nicht-stetige Funktion haben (rechts).

Wir betrachten dazu zwei Beispiele. Zunächst untersuchen wir die Funktion

$$g_\Delta(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} - \Delta \\ \frac{1}{\Delta} \left(\frac{L}{2} - \Delta \right) \left(\frac{L}{2} - x \right) & \frac{L}{2} - \Delta < x < \frac{L}{2} + \Delta \\ -L + x & \frac{L}{2} + \Delta \leq x \leq L \end{cases} \quad (11.37)$$

Diese Funktion (Abb. 11.1) steigt zunächst linear an, fällt dann in dem Intervall $(\frac{L}{2} - \Delta, \frac{L}{2} + \Delta)$ steil ab auf den entsprechenden negativen Wert, und steigt von dort wieder mit derselben Steigung wie vorher linear an. Man kann diese Funktion nun in x periodisch fortsetzen. Bei $x = L$ (und ganzzahligen Vielfachen) ist diese Funktion stetig und ableitbar. Für $\Delta > 0$ ist g_Δ überall stetig. Nun betrachten wir die Folge von Funktionen $(g_{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$. Der Wert von $\Delta = \frac{1}{n}$ geht also gegen 0. Jedes Element dieser

Folge ist stetig, doch der Grenzwert ist

$$g_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ 0 & x = \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} + x & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases} . \quad (11.38)$$

Diese Funktion ist bei $x = \frac{L}{2}$ nicht stetig. Der Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen kann also eine nicht-stetige Funktion sein. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Folge der Normen dieser Funktionenfolge konvergiert.

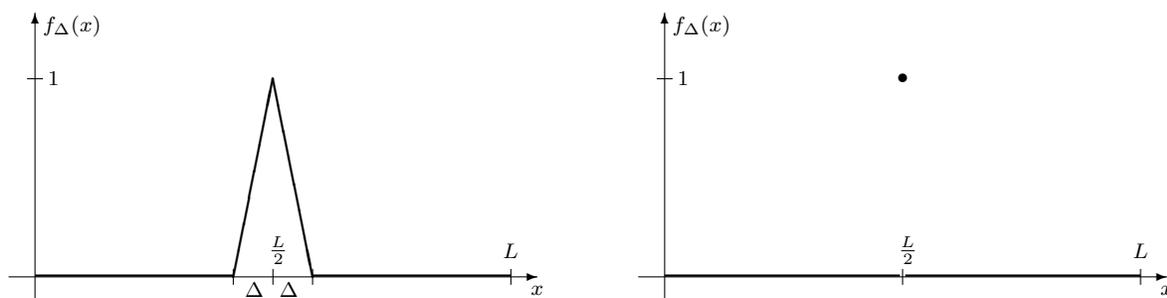


Abbildung 11.2: Eine Nullfolge (bezüglich des definierten Skalarprodukts) von stetigen Funktionen $f_\Delta(x)$ (links) kann als Grenzwert ($\Delta \rightarrow 0$) eine nicht überall verschwindende Funktion haben, deren Norm allerdings 0 ist (rechts).

Als zweites Beispiel betrachten wir eine Nullfolge von Vektoren. Nullfolgen sind in diesem Fall Folgen von stetigen periodischen Funktionen, deren Norm gegen 0 geht. Hier ist unser Beispiel:

$$f_\Delta(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} - \Delta \\ \frac{1}{\Delta}(x + \Delta - \frac{L}{2}) & \frac{L}{2} - \Delta \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{1}{\Delta}(\frac{L}{2} + \Delta - x) & \frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} + \Delta \\ 0 & \frac{L}{2} + \Delta \leq x \leq L \end{cases} \quad (11.39)$$

Diese Funktion ist überall 0 außer in dem Intervall $(\frac{L}{2} - \Delta, \frac{L}{2} + \Delta)$, wo die Funktion eine dreiecksförmige Zacke der Höhe 1 hat. Diese Funktion (zunächst nur definiert für $0 \leq x \leq L$) wird wieder periodisch fortgesetzt. Sie ist stetig für jedes $\Delta > 0$. Betrachtet man nun eine Nullfolge für Δ (z.B. $\Delta = \frac{L}{2n}$, $n = 1, 2, \dots$) so ist jedes Element dieser Folge stetig, der Grenzwert ist aber die Funktion

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} . \quad (11.40)$$

Wiederum ist dieser Grenzwert keine stetige Funktion.

Für die Norm dieser Funktionenfolge kann man sich leicht überzeugen, dass das Integral über das Quadrat dieser Funktion (im Wesentlichen ein Integral über eine Parabel) gleich $\|f_\Delta\|^2 = \frac{4}{3}\Delta$ ist. Somit ist für $\Delta \rightarrow 0$ auch die Folge der Normen eine Nullfolge. Wie zu erwarten hat die Grenzfunktion, die lediglich in einem Punkt von 0 verschieden ist, die Norm 0. Das bedeutet, es gibt Nullfolgen von stetigen Funktionen, deren Grenzwert nicht die 0-Funktion ist. (Diese Funktionenfolge wäre übrigens keine Nullfolge, wenn man statt der Skalarproduktnorm Gl. 11.35 die Supremumsnorm $\|f\| = \max_x\{|f(x)|\}$ gewählt hätte.)

Diese beiden Faktoren spielen eine wichtige Rolle, wenn wir den Vektorraum zu einem Banach-Raum bzw. zu einem Hilbert-Raum (vgl. Abschnitt 2.4.3) erweitern wollen. In diesem Fall muss man den Raum vervollständigen, ähnlich wie wir das schon im Zusammenhang mit dem Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen gemacht haben. Das bedeutet:

1. Wir müssen die Grenzwerte aller Cauchy-konvergenten Folgen mit in unseren Vektorraum aufnehmen. Damit kommen wir nicht umhin, auch nicht stetige Funktionen mit aufzunehmen, die, wie wir gesehen haben, als Grenzwerte von stetigen Funktionen auftreten können.
2. Wir müssen Äquivalenzklassen von Folgen betrachten, die denselben Grenzwert haben. Das bedeutet aber, dass wir beispielsweise Funktionen, die sich nur in Mengen vom Maß null unterscheiden, identifizieren müssen. Das Rechnen mit Äquivalenzklassen als Elemente eines solchen Vektorraums ist recht unanschaulich. Gewöhnlich wählt man möglichst glatte Repräsentanten der Äquivalenzklasse.
3. Man möchte auf diesen Vektorräumen natürlich auch gerne ableiten können. Das heißt, man muss die Ableitung der oben erwähnten Äquivalenzklassen erst definieren. Außerdem kann es passieren, dass die Ableitung einer Funktion (bzw. der Äquivalenzklasse zu dieser Funktion) kein Element des Vektorraums mehr ist. Beispielsweise führt die Ableitung von nicht-stetigen Funktionen aus dem Vektorraum heraus.

All diese Punkte erfordern einen recht aufwendigen mathematischen Formalismus. Das zugehörige Themengebiet der Mathematik bezeichnet man als *Funktionalanalysis* [*functional analysis*].

11.6.4 Komplexe Fourier-Reihen

Für das Folgende betrachten wir weiterhin periodische Funktionen über der reellen Achse mit Periode L , der Wert dieser Funktionen darf aber eine komplexe Zahl sein.

Die Periodizität bezieht sich dann sowohl auf den Real- als auch den Imaginärteil dieser Funktion. Das Komplex-konjugierte einer Funktion f ist die Funktion f^* , bei der der Realteil unverändert und der Imaginärteil durch sein Negatives ersetzt wurde. Die Bedeutung der Einschränkung auf reellwertige Funktionen wird später offensichtlich.

Auch diese Funktionen bilden einen Vektorraum. Da es sich um komplexe Funktionen handelt, definieren wir als Skalarprodukt (vgl. S. 55):

$$(f, g) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f^*(x)g(x) dx. \quad (11.41)$$

Der Grund für die Wahl der Integrationsgrenzen (die eine volle Periode umfassen) wird später offensichtlich. Ebenso die Wahl der Normierung, bei der wir den Faktor $1/L$ weggelassen haben.

Statt der Sinus- und Kosinusfunktionen wählen wir als Basis die Funktionen

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (11.42)$$

Man beachte, dass wir nun für n auch negative ganze Zahlen zulassen (dies hätten wir auch bei den Fourier-Reihen durch die Definition $b_n = a_{-n}$ machen können). Außerdem haben wir einen Faktor $1/\sqrt{L}$ eingefügt, sodass diese Funktionen bezüglich des obigen Skalarprodukts auf 1 normiert sind:

$$(e_n, e_m) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i(m-n)x}{L}\right) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}. \quad (11.43)$$

Jede komplexwertige, stetige, periodische Funktion lässt sich nun in folgender Form nach der obigen Basis entwickeln:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right). \quad (11.44)$$

Dies nennt man eine (diskrete) *Fourier-Entwicklung*. Die Koeffizienten $\{c_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}$) berechnen sich nach

$$c_n = (e_n, f) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{L}\right) f(x) dx \quad (11.45)$$

und sind somit im Allgemeinen beliebige komplexe Zahlen.

Falls $f(x)$ eine reellwertige Funktion ist, folgt aus Gl. 11.44

$$f(x)^* = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{L}\right) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = f(x) \quad (11.46)$$

und damit die Bedingung

$$c_n^* = c_{-n}. \quad (11.47)$$

Diese Bedingung bezeichnet man manchmal auch als *Realitätsbedingung*. Unter anderem ist c_0 reell. Außerdem ist offensichtlich, dass die Koeffizienten c_n zu einer reellen Funktion im Allgemeinen nicht reell sind.

Die Koeffizienten $\{c_n\}$ bezeichnet man als die *Fourier-Transformierte* der Funktion $f(x)$. Tatsächlich lässt sich Gl. 11.45 als Integraltransformation interpretieren, wobei der „Kern“ durch $K(n, x) = 1/\sqrt{L} \exp(-\frac{2\pi i n x}{L})$ gegeben ist und das erste Argument n nur diskrete Werte annimmt. Die Fourier-Reihe Gl. 11.44 ist dann die Rücktransformation. In den Koeffizienten $\{c_n\}$ steckt somit (fast) dieselbe Information wie in der Funktion $f(x)$.

Den Zusammenhang mit der Reihenentwicklung nach Sinus- und Kosinusfunktionen (Gl. 11.29) für reellwertige Funktionen erkennt man, wenn man die Realitätsbedingung ausnutzt und die Fourier-Entwicklung in der Form

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) + c_n^* \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{L}\right) \right) \right) \quad (11.48)$$

schreibt. Mit $c_n = \frac{\sqrt{L}}{2}(a_n - ib_n)$ folgt direkt die Entwicklung aus Gleichung 11.29.

11.7 Fourier-Transformation

Ob man schon die Entwicklung in Gl. 11.44 und ebenso die Rücktransformationen 11.45 als Fourier-Transformation bezeichnet, ist eine Frage der Definition. Oft versteht man unter der Fourier-Transformation die Erweiterung der komplexen Fourier-Reihenentwicklung auf beliebige (nicht periodische) Funktionen über der reellen Achse.

Man erhält diese Darstellung, indem man den Grenzwert $L \rightarrow \infty$ betrachtet. Die „Periode“ wird somit unendlich lang. Der folgende Abschnitt versucht diesen Gedankengang zu konkretisieren.

11.7.1 *Der Grenzwert $L \rightarrow \infty$

Wir definieren zunächst eine Variable

$$k_n = \frac{2\pi n}{L}. \quad (11.49)$$

Da $n \in \mathbb{Z}$, nimmt auch k_n (diskrete) Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an. Allerdings ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Werten nun

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L}. \quad (11.50)$$

Dieser Abstand wird also immer kleiner.

Nun schreiben wir für Gl. 11.44:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(k_n) \exp(ik_n x), \quad (11.51)$$

wobei wir einfach $c(k_n) \equiv c_n$ definiert haben. Für große Werte von L sollten sich die Koeffizienten nicht sehr rasch als Funktion von n verändern, sodass man die Koeffizienten als eine Funktion von k_n interpretiert.

Für diese Koeffizienten gilt nun:

$$c(k_n) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp(-ik_n x) f(x) dx. \quad (11.52)$$

Es zeigt sich (wegen des Faktors $1/\sqrt{L}$ und weil die Funktion $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen 0 gehen muss, vgl. Abschnitt 11.7.2), dass die Koeffizienten $c(k_n)$ für sehr große Werte von L kleiner werden, sodass wir eine neue Funktion definieren:

$$\tilde{f}(k_n) := \sqrt{\frac{L}{2\pi}} c(k_n), \quad (11.53)$$

wobei der Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ reine Konvention ist (dadurch werden die Formeln am Ende symmetrischer). Mit dieser Funktion wird aus Gleichung 11.51:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_n) \exp(ik_n x) \Delta k. \quad (11.54)$$

Im Grenzfall $L \rightarrow \infty$ entspricht die rechte Seite der Definition des gewöhnlichen Integrals und wir erhalten:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \exp(ikx) dx. \quad (11.55)$$

Andererseits wird aus Gleichung 11.52:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x) dx. \quad (11.56)$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als *Fourier-Transformation*. Die Funktion $\tilde{f}(k)$ ist die *Fourier-Transformierte* der Funktion $f(x)$, und Gl. 11.55 nennt man die *Fourier-Darstellung* der Funktion $f(x)$. Während für endliche Werte von L die Summen und Integrale alle existieren, muss man natürlich die Existenz des Grenzwerts $L \rightarrow \infty$ erst beweisen. Tatsächlich gilt dies nur für sogenannte quadratintegrale Funktionen (s.u.).

Bezieht sich in der Physik der Parameter x auf eine Raumkoordinate, ist L die Länge der Periode und $k = \frac{2\pi}{L}$ bezeichnet man als *Wellenzahl*. Die Funktion $\exp(ikx)$

beschreibt eine Welle mit der Wellenlänge L . Die Fourier-Darstellung ist eine Zerlegung einer beliebigen Funktion nach reinen harmonischen Wellen, und die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ gibt die Amplitude an, mit der eine Welle mit Wellenzahl k in dieser Zerlegung vertreten ist. Bezieht sich der Parameter x auf die Zeit (in diesem Fall wählt man natürlich meist den Buchstaben t), spricht man bei $f(t)$ oft von einer Zeitreihe. Statt k schreibt man in diesem Fall $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und bezeichnet die Periode mit T . ω ist nun die (Winkel)-frequenz. Man kann sich die Fourier-Darstellung eines akustischen Signals $f(t)$ als eine Zerlegung nach reinen Tönen mit der Frequenz ω vorstellen und entsprechend die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\omega)$ als die Amplitude, mit der eine reine bestimmte Frequenz in einem Signal vertreten ist.

11.7.2 Der Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen

Wir erhalten auf diese Weise einen neuen Vektorraum, auf dem das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) dx \quad (11.57)$$

definiert ist. Für die durch dieses Skalarprodukt definierte Norm einer Funktion gilt damit offensichtlich

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (11.58)$$

Damit dieser Vektorraum aus normierbaren Elementen besteht, müssen wir für die Funktionen verlangen, dass dieses Integral existiert (also einen endlichen Wert annimmt). Man bezeichnet eine Funktion, für die das obige Integral endlich ist, als *quadratintegabel* (oder auch *quadratnormierbar*). Die Menge aller quadratintegablen Funktionen nennt man den $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, dx)$ oder einfacher \mathcal{L}_2 . (Das Argument \mathbb{R} soll andeuten, dass es sich um Funktionen über der reellen Achse handelt, und das Argument dx gibt an, bezüglich welchen Maßes die Funktionen quadratintegabel sind).

Man kann beweisen, dass beliebige Folgen von quadratintegablen Funktionen, die bezüglich der angegebenen Norm konvergieren, selbst wieder quadratintegabel sind. Für Einschränkungen der quadratintegablen Funktionen auf stetige oder gar differenzierbare quadratintegable Funktionen gilt eine entsprechende Aussage nicht, wie wir andeutungsweise gesehen haben: Bezüglich der angegebenen Norm konvergente Folgen von stetigen oder differenzierbaren Funktionen müssen nicht wieder stetig oder differenzierbar sein. Man kann jedoch mit dem Vektorraum stetiger (oder sogar beliebig oft differenzierbarer) quadratintegabler Funktionen beginnen und gelangt durch eine Vervollständigung zum \mathcal{L}_2 . Der \mathcal{L}_2 ist nicht nur ein Banach-Raum, sondern, da ein Skalarprodukt definiert ist, sogar ein Hilbert-Raum.

Man kann sich nun fragen, was aus der Normierung der Basisfunktionen (Gl. 11.43) bei einer Fourier-Reihe in dem Grenzfall $L \rightarrow \infty$ wird. Offenbar sind die neuen

Basisfunktionen

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx). \quad (11.59)$$

Bilden wir das Skalarprodukt von zwei solchen Funktionen, erhalten wir:

$$(e_k, e'_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(k' - k)x) dx. \quad (11.60)$$

Dieses Integral sollte für $k \neq k'$ verschwinden, was sich auch streng beweisen lässt. Doch für $k = k'$ integrieren wir die konstante Funktion 1 über die gesamte reelle Achse und sollten unendlich erhalten.

Wir betrachten die Fourier-Darstellung einer Funktion (Gl. 11.55) und bilden davon die Fourier-Transformation, das sollte uns zur Fouriertransformierten bringen:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{f}(k') e^{ik'x} \right) \quad (11.61)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k' - k)x} \right) \tilde{f}(k') \quad (11.62)$$

In Klammern finden wir nun genau die gesuchte „Funktion“, diesmal allerdings als ein Integralkern mit den Argumenten k und k' . Offenbar reproduziert dieser Integralkern gerade die Funktion $\tilde{f}(k)$. Genau das war (vgl. Gl. 11.21) die Definition der „ δ -Funktion“ (die keine Funktion im strengen Sinne ist). Es folgt also:

$$(e_k, e'_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(k' - k)x) dx = \delta(k - k'). \quad (11.63)$$

Für $k = k'$ ist diese „Funktion“ nicht definiert. Daher liegen die Basisfunktionen $e_k(x)$ auch nicht mehr im Hilbert-Raum der quadratintegrablen Funktionen. Noch so eine „mathematische Feinheit“, mit der man sich in der Funktionalanalysis (und z.T. auch in der Quantenmechanik) beschäftigt.

11.7.3 Anwendungen

Eine wichtige Eigenschaft der Fourier-Transformation ist ihr Verhalten unter Ableitungen. Wenn wir in Gl. 11.55 die Ableitung nach x bilden, erhalten wir:

$$\frac{df(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \left(\frac{d}{dx} \exp(ikx) \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) ik \exp(ikx) dx. \quad (11.64)$$

Die Ableitung einer Funktion nach x bedeutet somit, dass die Fourier-Transformierte mit ik multipliziert wird. Das macht Fourier-Transformationen besonders interessant für die Suche nach Lösungen von Differentialgleichungen, insbesondere lineare Differentialgleichungen.

Eine andere wichtige Eigenschaft ist das Verhalten der Fourier-Transformation unter Faltungen. Seien $g(x)$ und $f(x)$ zwei Funktionen mit ihren jeweiligen Fourier-Transformierten $\tilde{g}(k)$ und $\tilde{f}(k)$. Was ist die Fourier-Transformierte der Faltung von f mit g ? Dazu stellen wir in der Definition des Faltungsintegrals f und g durch ihre Fourier-Transformierten dar:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-y)} \tilde{g}(k) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-ik'y} \tilde{f}(k') \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk' \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i(k-k')y} \right) \tilde{g}(k) \tilde{f}(k') \right) \quad (11.65) \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \tilde{g}(k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk' \delta(k-k') \tilde{f}(k') \right) \quad (11.66)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \tilde{g}(k) \tilde{f}(k) \quad (11.67)$$

Bei dem Schritt von der zweiten zur dritten Zeile haben wir wieder die Integraldarstellung der δ -Funktion ausgenutzt und im nächsten Schritt die Definition der δ -Funktion (welche die Funktion \tilde{f} einfach reproduziert). Wir erhalten also, dass die Fourier-Transformation einer Faltung von zwei Funktionen g und f gerade das Produkt der Fourier-Transformierten \tilde{g} und \tilde{f} ist. Aus diesem Grund sind Fourier-Transformationen auch immer von Bedeutung, wenn man es mit Faltungsintegralen zu tun hat.

In der Datenanalyse spielt die Fourier-Transformation auch eine wichtige Rolle, um „versteckte“ periodische Abhängigkeiten beispielsweise in einer Zeitreihe von Daten zu finden. Sei z.B. $T(t)$ eine Datenreihe, welche die Temperatur als Funktion der Zeit über mehrere Jahre darstellt. Man würde erwarten, dass es besonders große Fourier-Amplituden zu Werten von k (oder ω) gibt, die einer Periode von einem Tag entsprechen (tagsüber ist es meist wärmer als nachts) und auch einem Jahr (im Winter ist es meist kälter als im Sommer). Man kann in diesen Daten aber auch eine Periode von 11 Jahren finden, die mit dem Zyklus der Sonnenaktivität zu tun hat, die das Wetter auf der Erde beeinflusst.

Literaturverzeichnis

- [1] Alsina, Claudi, Nelson, Roger; *Charming Proofs – A Journey Into Elegant Mathematics*, The Mathematical Association of America, 2010.
- [2] Cantor, Georg; *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*; Mathematische Annalen 46 (1895) S. 481.
- [3] Cohen, Paul J.; *Set Theory and the Continuum Hypothesis*; Benjamin, Reading MA, 1966.
- [4] Ebbinghaus, Heiz-Dieter; Flum, Jörg; Thomas, Wolfgang; *Einführung in die mathematische Logik*; Vieweg+Teubner Verlag, 2008 (3. Aufl.).
- [5] Filk, T.; *Skript zum Vorkurs Mathematik*; Universität Freiburg.
www.mathphys.uni-freiburg.de/physik/filk/public_html/Skripte/Texte/Vorkurs.pdf
.
- [6] Filk, T.; *Einführung in die Methoden der Theoretischen Physik*; Skript, Universität Freiburg.
www.mathphys.uni-freiburg.de/physik/filk/public_html/Skripte/Texte/Theo_1.pdf
.
- [7] Gödel, Kurt; *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*; Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931) S. 173–198.
- [8] Gödel, Kurt; *The Consistency of the Axiom of Choice and of the generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Ann. of Math. Stud. 3, Princeton Univ. Press, S. 33–101.
- [9] Hilbert, David; *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen 95 (1926) S. 170.
- [10] Hildebrandt, Stefan; *Analysis I*, 2. Auflage, Springer Verlag, 2006.
- [11] Kuwert, Ernst; *Analysis I*; Skript zur Vorlesung WS 2007/08 am Mathematischen Institut Freiburg.

- [12] Kuwert, Ernst; *Analysis II*; Skript zur Vorlesung SS 2008 am Mathematischen Institut Freiburg.
- [13] Kuwert, Ernst; *Analysis III*; Skript zur Vorlesung WS 2008/09 am Mathematischen Institut Freiburg.
- [14] Lang, Serge; *Real Analysis*; Addison-Wesley Publishing Company, Second printing, 1973.
- [15] Rudin, Walter; *Analysis*, 4. Auflage; Oldenbourg Verlag, 2009.
- [16] Russell, Bertrand; *The principles of Mathematics*, Cambridge 1903, Kap. X.
- [17] Wikipedia, Stichwort „Holomorphe Funktion“ (Version vom 25. September 2015).

Index

- Abbildung (siehe auch Funktion), 37
 - bijektive, 39
 - injektive, 38
 - lineare, 61
 - messbar, 211
 - surjektive, 38
- abelsche Gruppe, 50
- abgeschlossen, 90
- abgeschlossene Menge, 74, 91, 92
- Ableitung, 118
 - partielle, 125
- absolute Konvergenz, 79
- Abstandsfunktion, 68
- abzählbar unendlich, 43
- Adjazenzmatrix, 33
- adjungierte Matrix, 62
- Äquivalenz, 17
- Äquivalenzklasse, 264
- affiner euklidischer Raum, 207
- affiner Raum, 200
- algebraisch abgeschlossen, 83, 99
- algebraische Zahlen, 68
- Allquantor \forall , 18
- analytische Fortsetzung, 255
- analytische Funktion, 251
- Anfangsbedingungen, 154, 156
- antisymmetrische Relation, 31
- aperiodischer Grenzfall, 165
- Äquivalenzklasse, 35
- Äquivalenzrelation, 35, 93
- Arbeit, 149, 220
- Argument (einer komplexen Zahl), 102
- Assoziativität, 49, 98
- asymmetrische Relation, 31
- asymptotisches Verhalten, 116
- Atlas, 201
- autonome Differentialgleichung, 159, 161
- Bahnkurve, parametrisierte, 124, 192
- Banach-Raum, 56, 264
- Basis, 54, 234
 - duale bzw. reziproke, 237
 - orthonormierte, 244
- Basistransformation, 234
- Basisvektoren, 54
- Bernoulli'sche Ungleichung, 26, 85
- Bernoulli, Jakob, 26
- Beschleunigung, 131, 194
- beschränkt
 - Folge, 75
 - Menge, 92
- Betrag
 - einer komplexen Zahl, 99
 - einer rationalen Zahl, 67
- Beweis, 21
 - $\sqrt{2}$ ist irrational, 24
 - Aufzählung der Möglichkeiten, 27
 - direkter, 22
 - durch Widerspruch, 23
 - Taubenschlagprinzip, 27
 - Unendlichkeit der Primzahlmenge, 24
 - vollständige Induktion, 25
- Bifurkationspunkt, 184
- bijektiv, 39
- Bild (einer linearen Abbildung), 61
- Bildmenge, 37

- Bilinearform, symmetrische, 55
- Binominalkoeffizienten, 28
- Binormalenvektor, 196
- Bogenlänge, 219
- Bogenlängenparametrisierung, 194, 196, 219
- Bolzano-Weierstraß, Satz von, 76
- Bolzano-Weierstraß, Satz von, 92, 114
- Borel-Algebra, 210
- Borel-messbar, 210

- Cantor, Georg, 13, 43, 45, 47
- Cardano, Gerolamo, 97
- Cauchy'scher Integralsatz, 254
- Cauchy-Folge, 71
- Cauchy-Gleichungen, 252
- Cauchy-Konvergenz, 71
- Cauchy-Schwarz Ungleichung, 56
- Chaos, 185
- charakteristische Abbildung, 42
- Christoffel-Symbole, 246
- Cohen, Paul, 47

- d'Alembert-Operator, 134
- Dedekind, Richard, 106
- Deduktion, 22
- Definitionsbereich, 37
- Delta-Funktion, 216, 217, 269
- Diagonalisieren einer Matrix, 170
- Diagonalisierungsargument, 46
- dichte Menge, 91, 105
- Differentialgleichung, 153, 158
 - autonome, 159, 161
 - Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, 160
 - gedämpfter Oszillator, 163
 - gekoppelte, 153
 - gewöhnliche, 153
 - harmonischer Oszillator, 156
 - homogene, 161
 - inhomogene, 161, 162, 168
 - lineare, 161
 - mit konstanten Koeffizienten, 163
 - logistische, 177
 - Ordnung, 153
 - Quadratur, 175
 - Zerfall und Wachstum, 154
- Differentialgleichungssystem
 - entkoppeltes, 170
 - gekoppeltes, lineares, 169
- Differenz von Mengen, 19
- Differenzenquotient, 120
- Dimension, 54
- Dirac-Maß, 216, 217
- Dirichlet-Funktion, 38
- disjunkte Mengen, 19
- diskrete Topologie, 90
- Distribution, 257
- Distributivgesetz, 51, 53
- Divergenz (eines Vektorfeldes), 130
 - krummlinige Koordinaten, 247
- Divergenz einer Reihe, 77
- Doppelkegel, 202
- doppelte Überlagerung, 256
- Dreibein, mitgeführtes, 195, 197
- Dreiecksungleichung, 57, 68
- duale Basis, 237
- dualer Vektor (Gradient), 126
- Dualraum, 237
- Durchschnittsgeschwindigkeit, 125
- Durchschnittsmenge, 19

- Ebene, 202
- Eigenraum, 62
- Eigenvektor, 62
- Eigenwert, 62, 133
- Eigenwerte, 172
- Einbettung, 235
- einfach wegzusammenhängend, 227
- Einselement, 49
- Einstein'sche Summenkonvention, 235

- Element einer Menge, 14
- Elementarereignisse, 212
- Ellipse, 204
- Energie, 188
- Energieerhaltung, 188
- entartet (Eigenwert), 62
- Entartungsgrad, 62
- Ereignisse, 212
- erstes Integral, 188
- Erwartungswert, 215
- Euler'sche Formel, 100, 101
- Euler'sche Zahl, 84
- Euler, Leonhard, 97
- ϵ -Umgebung, 72
- Existenzquantor \exists , 18
- Exponentialansatz, 163, 165
- Exponentialfunktion, 84
 - Ableitung, 138
 - verallgemeinerte, 87
- Extrempunkt, 132
- Faktorregel, 120
- Faltung, 258, 270
- „fast überall“, 211
- Federenergie, 150
- Fermat, Satz von, 132
- Fermi-Verteilung, 178
- Fernwirkung, 154
- Fixpunkt, 180
- Fläche, 197
 - implizite Darstellung, 200
 - parametrisierte, 197
- Flächenelement, 222
 - Kugeloberfläche, 223, 243
 - Polarkoordinaten, 218, 241
 - Rotationskörper, 152
- Flächenintegral, 222
- Flächenmaß, 222
- Fluß (Vektorfeld), 222
- Fluss; im Phasenraum, 181
- Folge, 41
 - Äquivalenz von, 93
 - beschränkte, 75
 - monotone, 76
- Folgenstetigkeit, 110
- Fourier, Jean, 259
- Fourier-Darstellung, 267
- Fourier-Entwicklung, 265
- Fourier-Koeffizienten, 265
- Fourier-Transformation, 266, 267
 - Ableitung, 269
 - Faltung, 270
- Fourier-Transformierte, 266, 267
- Fubini, Satz von, 214
- Fundamentalform, erste und zweite, 247
- Fundamentalsatz der Algebra, 82, 99
- Fundamentalsatz der Arithmetik, 66
- Funktion, 37
 - analytische, 251
 - analytische Fortsetzung, 255
 - holomorphe, 251
 - meromorphe, 256
 - periodisch, 259
 - quadratintegrabel, 268
- Funktionalanalysis, 264
- Funktionalgleichung, 84, 87
- Ganghöhe, 192
- ganze Zahlen, 14, 50, 67
- Gauß, Carl Friedrich, 97, 116
- Gauß-Verteilung, 215, 258
- Gauß'scher Integralsatz, 229
- GD, Gleitender Durchschnitt, 258
- gekoppelte Differentialgleichungen, 153
- Geodäte, 239
- geometrische Reihe, 78, 139
- Geschwindigkeit, 124, 192
- gleichmäßige Stetigkeit, 115
- Gleichungen, quartische und kubische, 97
- Gleichungssystem, lineares, 62

- globales Maximum, 132
- globales Minimum, 132
- Gödel, Kurt, 47
- Grad (eines Polynoms), 82
- Gradient
 - allgemeine orthonormale Koordinaten, 246
 - Kugelkoordinaten, 249
 - Polarkoordinaten, 248
 - Zylinderkoordinaten, 249
- Gradientenfeld, 220
- Graph (einer Funktion), 40
- Grenzwert, 69, 70
 - Rechenregeln, 75
- Gruppe, 49
 - abelsch, 50
- Gruppenhomomorphismus, 51
- Hadamard, Jacques S., 116
- harmonische Folge, 71
- harmonische Reihe, 77
 - alternierende, 77
- harmonischer Oszillator, 156
 - gedämpfter, 163
 - getriebener, 167
- Häufungspunkt, 70
- Hauptachse, 62
- Hauptachsen, 62, 133
- Hauptnormalenvektor, 196
- Hauptsatz der Integralrechnung, 145
- Hausdorff-Topologie, 91
- Heaviside-Funktion, 38
- Heine-Borel, Satz von, 92
- Helix, 192
 - Beschleunigung, 194
 - Geschwindigkeit, 193
- Hesse-Matrix, 131, 133, 173
- Hilbert, David, 13
- Hilbert-Raum, 58, 264
 - \mathcal{L}_2 , 268
- Hintereinanderschaltung
 - allgemeiner Abbildungen, 41
 - linearer Abbildungen, 61
- Hochpunkt, 133
- holomorphe Funktion, 251
- Homöomorphismus, 109
- Homomorphismus, 110
- Hyperbel, 204
- hyperbolische Funktion, 88
- Identitätsmatrix, 62
- Implikation, 17
- implizite Ableitung, 123
- implizite Funktion, 123
- Induktiver Beweis, 25
- Infimum, 104
- Infinitesimalrechnung, 120
- injektiv, 38
- innerer Punkt, 91
- Inneres Produkt, 55
- Integral, 142, 213
 - unbestimmtes, 145
- Integralgleichung, 155, 160
- Integralgleichung von Cauchy, 254
- Integralsatz von Cauchy, 254
- Integraltransformation, 257
- Integrationskonstante, 154, 162
- Intervalle, 66
- Intervallschachtelung, 75
- inverses Element, 49, 99
- Involution, 99
- Irrationalität von $\sqrt{2}$, 24
- Isomorphismus, 109
 - von Gruppen, 51
- iterative Gleichung, 155, 160
- Jacobi-Determinante, 228, 240
- Jacobi-Matrix, 240
- Karte, 201, 233

- Kartesisches Produkt, 30
- Kegelschnitte, 202
- Kern (einer linearen Abbildung), 61
- Kern einer Integraltransformation, 257
- Kettenbruch, 72
- Kettenregel, 121
- Kommutativität, 50
- kompakte Menge, 92
- kompakte Räume, 92, 114
- Komplementmenge, 20
- komplexe Konjugation, 99
- komplexe Zahlen, 97
- Kontinuitätsgleichung, 231
- Kontinuumshypothese, 47
- Kontradiktion, 17
- kontravarianter Vektor, 235
- Konvergenz, 77
 - absolute, 77
 - gleichförmige, 89
 - punktweise, 89
- Koordinatendarstellung, 101
- Koordinatensingularitäten, 198
- Koordinatensystem
 - Parameterbereich, 205
- Koordinatentransformation, 206, 235
- Körper, 51
- Kosinus-Funktion, 87
 - Ableitung, 123, 139
 - Fourier-Reihe, 259
 - Orthogonalität, 260
 - Taylor-Entwicklung, 139
- kovarianter Vektor, 235
- Kraft, konservative, 187
- Kreis, 204
- Kronecker-Delta-Symbol, 59, 260
- Krümmung, 195
- Krümmungsradius, 195
- Krümmungsvektor, 195
- Kugel, 229
- Kugelkoordinaten, 206, 242, 249
 - Winkelkoordinaten, 198
- Kugeloberfläche, 197, 200, 222, 242
- kumulative Wahrscheinlichkeit, 216
- Kurvenlänge, 151
- La Vallée Poussin, Charles-Jean de, 116
- Landau, Edmund, 115
- Landau-Symbole, 115
- Laplace-Gleichung, 252
- Laplace-Operator, 134
 - krummlinige Koordinaten, 248
 - Kugelkoordinaten, 249
 - Polarkoordinaten, 248
 - Zylinderkoordinaten, 249
- Laurent-Reihe, 257
- Leibniz Kriterium, 81
- Leistung, 151
- Levi-Civita-Symbol, 59
- L'Hospital, Satz von, 137
- Limes inferior, 104
- Limes superior, 104
- Lindemann, Ferdinand von, 141
- linear unabhängig, 54
- lineare Abbildung, 61
- lineare Differentialgleichung, 161
- lineare Näherung, 181
- Linearkombination (von Vektoren), 54
- Linienelement, 150, 152, 219
 - allgemeine Metrik, 239
- Lipschitz-stetig, 114
- Logarithmus, natürlicher, 87
- logistische Abbildung, 182
- logistische Gleichung, 177
- lokales Maximum, 132
- lokales Minimum, 132
- Lokalität, 154
- Mächtigkeit, 42
- Maclaurin, Colin, 136

- Maclaurin-Reihe, 136
- Majorantenkriterium, 80
- Mandelbrot-Menge, 186
- Mannigfaltigkeit, 233
- Mantelfläche eines Rotationskörpers, 152
- Maß, 211
 - eines Quaders, 213
- Matrix, 61
 - adjungierte, 62
 - diagonalisierbar, 170
 - inverse, 170
 - selbstadjungierte, 62
- Matrixmultiplikation, 61
- Maximum
 - globales, 132
 - lokales, 132
- Maximum, lokales und globales, 133
- Menge, 13
 - abgeschlossen, 74, 90, 92
 - dicht, 91
 - disjunkt, 19
 - Durchschnitt, 19
 - kartesisches Produkt, 30
 - leere, 14
 - offen, 73
 - offene, 90, 91
 - Potenzmenge, 20
 - Teilmenge, 20
 - Vereinigung, 19
- meromorphe Funktion, 256
- messbare Abbildung, 211
- messbare Menge, 210
 - Gegenbeispiel, 210
- messbarer Raum, 210
- Metrik, 68, 236
 - Kugelkoordinaten, 242
 - Kugeloberfläche, 243
 - Polarkoordinaten, 241
- metrischer Feldtensor, 237
- metrischer Raum, 68
- Minimum
 - globales, 132
 - lokales, 132
- Minimum, lokales und globales, 133
- Mittelwert, 215
- Modulo-Rechnen, 37
- Momentangeschwindigkeit, 125
- monotone Folge, 76
- natürliche Zahlen, 14, 50
- neutrales Element, 49
- Newton'sche Bewegungsgleichung, 153, 159
- NICHT (logischer Operator), 16
- Norm, 56
 - einer Funktion, 261, 264, 268
- Normalvektor, 198
- Normalverteilung, 215, 258
- normiertes Polynom, 82
- Nullstelle, 82
- \mathcal{O} , o -Notation, 116
- ODER (logischer Operator), 16
- offen, 90
- offene Menge, 73, 91
- offener Ball, 72
- Ordnung einer Differentialgleichung, 153
- Ordnungsrelation, 33, 103
 - natürliche, 95
- orthogonal, 56
- Orthogonalität von Funktionen, 260
- orthonormal, 56
- Orthonormalbasis, 56, 244, 246
 - Kugelkoordinaten, 249
 - periodische Funktionen, 261, 265
 - Polarkoordinaten, 241, 248
- Parabel, 204
- Parameterdarstellung, 201
 - Doppelkegel, 202

- Fläche, 197
- Kugeloberfläche, 197
- Mannigfaltigkeit, 199
- Wege, 191
- parametrisierte Fläche, 197
- Partialbruchzerlegung, 146
- Partialordnung, 34
- Partialsomme, 77, 79
- partielle Ableitung, 125
- partielle Integration, 146
- Partition, 20, 36, 213
- Pascal'sches Dreieck, 30
- Peano-Axiome, 66
- periodische Funktion, 259
- Permutation
 - zyklische und antizyklische, 59
- Permutationsgruppe, 51
- Phasenraum, 160, 162
- Picard-Lindelöf, 155, 157, 160
- Poincaré, Satz von, 227
- Polarkoordinaten, 205, 241, 248
- Polynom, 82
 - normiertes, 82
- potentielle Energie, 150
- Potenzmenge, 20, 34, 42, 47
- Primzahl, 66
- Primzahlsatz, 116
- Produktmaß, 213
- Produktregel, 120
- Proposition, 15
- Pseud-Zufallszahlgenerator, 215
- Punkt
 - innerer, 91
 - Rand, 91
- Punktverteilung, 216
- Quadermaß, 213
- quadratintegabel, 268
- Quadratur, 141
- Quantoren, 18, 50
- Quellendichte, 230
- Quotientenkriterium, 80
- Quotientenmenge, 36
- Quotientenregel, 122
- rationale Zahlen, 14, 50, 52, 67
 - Abzählbarkeit, 45
 - dicht, 105
 - Unvollständigkeit, 104, 105
- Raum
 - metrischer, 68
- Raum, als Menge aller Orte, 193, 205
- Realitätsbedingung, 266
- reell-analytische Funktion, 137
- reelle Zahlen, 52, 94
 - Überabzählbarkeit, 45
- reflexive Relation, 31
- Reihe, 76
 - geometrische, 78
 - harmonische, 77
 - Rechenregeln, 81
- Relation, 31
 - antisymmetrisch, 31
 - Äquivalenzrelation, 35
 - asymmetrisch, 31
 - homogen, 31
 - linksvollständig, 40
 - mehrstellig, 31
 - Ordnungsrelation, 33
 - rechtseindeutig, 40
 - reflexiv, 31
 - symmetrische, 31
 - transitiv, 31
 - vollständig, 31
 - zu einer Abbildung, 40
- reziproke Basis, 237, 245
 - im \mathbb{R}^3 , 237
 - Polarkoordinaten, 241
- Richtungsableitung, 126
- Riemann'sche Fläche, 256

- Riemann-Integral, 142
- Rotation (eines Vektorfeldes), 130, 223
- Rotationskörper, 151
- Russell, Bertrand, 14

- Sattelpunkt, 133
- Satz, implizite Funktionen, 201
- Schmiegeebene, 196
- Schranke, 75
 - größte untere, 104
 - kleinste obere, 103
 - obere, 103
 - untere, 103
- Schwarz, Satz von, 131
- selbstadjungierte Matrix, 62
- σ -Algebra, 210
- Sinus-Funktion, 87
 - Ableitung, 123, 139
 - Fourier-Reihe, 259
 - Orthogonalität, 260
 - Taylor-Entwicklung, 139
- Skalarprodukt, 54, 236
 - auf \mathcal{L}_2 , 268
 - hermitesches, 55
 - kartesisches, 55
 - komplexe periodische Funktionen, 265
 - reelle periodische Funktionen, 261
- Spatprodukt, 60
- Stabilität von Fixpunkten, 182
- Stammfunktion, 144
- Standardabweichung, 215
- stationärer Punkt, 133
- Stetigkeit, 109, 110
 - Epsilon-Delta-Stetigkeit, 110
 - Folgenstetigkeit, 110
 - Umgebungsstetigkeit, 109
- Stetigkeitsregeln, 113
- Stokes'scher Satz, 223
- stückweise stetig, 142
- Substitutionsregel, 147

- Summenkonvention, 235
- Summenregel, 120, 260
- Superpositionsprinzip, 161
- Supremum, 103
- Supremumseigenschaft, 105
- Supremumsnorm, 264
- surjektiv, 38
- symmetrische Relation, 31

- Tangentialraum, 199
- Tangentialvektor, 199, 207, 235
 - an eine Fläche, 198
 - an einen Weg, 192
- Taubenschlagprinzip, 27, 76
- Tautologie, 17
- Taylor-Reihe, 136, 217
- Teilfolge, 70
- Teilmenge, 20, 42
 - beschränkte, 92
 - charakteristische Abbildung, 42
 - echte, 20
- Tiefpunkt, 133
- Tonelli, Satz von, 214
- Topologie, 73, 90
 - diskrete, 90
 - Hausdorff, 91
 - triviale, 90
- topologischer Raum, 73, 90, 210
- Totalität, 34
- Totalordnung, 34
- Trajektorie, 192
- transitive Relation, 31
- transzendente Zahl, 68
- Trennung der Variablen, 175
- Trennungsaxiom, 91
- Treppenfunktion, 212
- triviale Topologie, 90

- Überabzählbarkeit, 45
- Umgebung, 90

- Umgebungsstetigkeit, 109
- Umkehrabbildung, 39
- Umkehrfunktion, 122
- Umordnungssatz, Riemann'scher, 78
- UND (logischer Operator), 16
- Universum, 20
- Untergruppe, 51
- Urbildmenge, 37

- Varianz, 215
- Vektor
 - dualer, 126
 - kontravarianter, 235
 - kovarianter, 235
- Vektorprodukt, 58
- Vektorraum, 53, 234
 - normierter, 56
 - periodischer Funktionen, 261
 - von Funktionen, 63
- Vereinigungsmenge, 19
- Verkettung (siehe auch Hintereinanderschaltung), 41
- Verteilungsfunktion, 212
- Vervollständigung, 94
 - von Funktionenräumen, 264
- vollständige Relation, 31
- vollständiger metrischer Raum, 94
- Volumenelement, 228, 240
 - Kugelkoordinaten, 242
 - Polarkoordinaten, 241
- Volumenintegral, 228

- Wahrheitstabelle, 16
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 212
 - Gauß-Verteilung, 215
 - gleichverteilt, 216
- Wahrscheinlichkeitsfunktion, 212
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 211
- Wahrscheinlichkeitsraum, 212
- Weg, parametrisierter, 191
- Wegintegral, 151
- Weglänge, 239
- Weierstraß, Satz von, 83, 114, 132
- Wellenoperator, 134
- Wellenzahl, 267
- Wendepunkt, 133
- Winkel, 56
- Winkelkoordinaten der Kugeloberfläche, 242
- Winkelsumme im n -Eck, 26
- Winkelsumme im Dreieck, 22
- Wirbeldichte, 225
- Wurzelkriterium, 80

- \mathbb{Z}_p , 37, 52
- Zeittranslationsinvarianz, 166
- Zeta-Funktion, Riemann'sche, 78
- Zielmenge, 37
- Zufallsvariable, 212
- Zweistellige Relation, 31
- Zwischenwertsatz, 113
- Zylinderkoordinaten, 205